

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ
В РАМКАХ РАСШИРЕННОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО
УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

Куркина О.Е.¹, Пелиновский Е.Н.², Куркин А.А.¹

¹*Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, oksana.kurkina@mail.ru*

²*Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова, г. Нижний Новгород, pelinovsky@appl.sci-nnov.ru*

Неустановившиеся длинные волны малой, но конечной амплитуды, описываемые нелинейными эволюционными уравнениями (типа Кортевега-де Вриза (КдВ)), качественно и количественно хорошо воспроизводят физические процессы в различных контекстах (прежде всего, таких как распространение и трансформация поверхностных и внутренних гравитационных волн). Важный шаг в аналитической теории волн связан с обобщениями таких моделей, в частности, включением дополнительных слагаемых, в том числе, высших нелинейностей. Однако, в этом направлении исследований остается множество нерешенных вопросов. Одним из них является вопрос о возможности возникновения и исчезновения интенсивных короткоживущих импульсов, которые, наряду с солитонами, являются важным элементом нелинейной динамики волновых полей. Основным механизмом для таких процессов является модуляционная неустойчивость [1, 2], приводящая также к возникновению и распространению особых квазистационарных неизлучающих локализованных возмущений – бризеров [3]. В модулированной волне нелинейные искажения огибающей становятся существенными на больших пространственно-временных масштабах. В квазиоптическом приближении они описываются нелинейным уравнением Шредингера для комплексной амплитуды или его аналогами для действительных амплитуды и частоты [4–6] и их соответствующими обобщениями высших порядков [7].

В представленной работе нелинейное уравнение Шредингера высокого порядка с комбинированными нелинейностями выведено нами с помощью классической асимптотической процедуры из модельного модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза с комбинацией нелинейностей третьей и пятой степени (называемого также (2+4)-КдВ [8]) для слабонелинейных волновых пакетов в контексте внутренних волн в

трехслойной среде [8–10]. Коэффициенты нелинейности и дисперсии исходного и полученного уравнений определяются конкретной физической ситуацией и зависят от параметров среды, в которой происходит распространение волн. С точки зрения волновой динамики важными являются знаки коэффициентов различных слагаемых, а также их сочетания, которые были проанализированы для нашего случая. Рассмотрены стационарные локализованные решения полученного уравнения, включающие широкие солитоны огибающей [11].

Обсуждаются фокусирующие свойства и эффекты модуляционной неустойчивости в рамках $(2+4)$ -КдВ. С помощью численных расчётов для этой модели продемонстрированы и проанализированы особенности поведения модулированных периодических волн с различными параметрами (длина несущей и огибающей, амплитуда волны и модуляции). Проведено сравнение с динамикой в рамках классического модифицированного уравнения КдВ (мКдВ). Результаты показывают, что неустойчивость возникает при малых амплитудах и подавляется при больших – волновое поле в рамках уточненного уравнения $(2+4)$ -КдВ характеризуется большей шириной волновых пакетов при их более умеренной амплитуде, тогда как динамика в рамках классического уравнения мКдВ приводит к формированию более узких и более короткоживущих пакетов, но с существенно большей амплитудой.

Представленные результаты получены в рамках государственного задания в сфере научной деятельности (тема № FSWE-2023-0004 «Нелинейная волновая динамика прибрежной зоны в условиях меняющегося климата и антропогенного воздействия»).

Литература

1. Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В., Талипова Т.Г., Хари́ф К. Нелинейное параболическое уравнение и экстремальные волны на морской поверхности // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2003. Т. 46. № 7. С. 499–512.
2. Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Хари́ф К. Модуляционная неустойчивость длинных внутренних волн умеренной амплитуды в стратифицированном горизонтально неоднородном океане // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2011. Т. 94. № 3. С. 199–203.
3. Pelinovsky D., Grimshaw R. Structural transformation of eigenvalues for a perturbed algebraic soliton potential // Physics Letters A. 1997. V. 229. P. 165–172.
4. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит. 2003. 400 с.
5. Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E., Talipova T. Wave group dynamics in weakly nonlinear long-wave models // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2001. V. 159. No. 1–2. P. 35–57.

6. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., Ruderman M., Erdelyi R. Short-Lived Large-Amplitude Pulses in the Nonlinear Long-Wave Model Described by the Modified Korteweg–De Vries Equation // *Studies in Applied Mathematics*. 2005. V. 114(2). P. 189–210.
7. Слюняев А.В. Нелинейное уравнение высокого порядка для огибающей гравитационных волн на воде конечной глубины // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2005. Т. 128. № 5. С. 1061–1077.
8. Kurkina O.E., Kurkin A.A., Soomere T., Pelinovsky E.N., Rouvinskaya E.A. Higher-order (2+4) Korteweg–de Vries–like equation for interfacial waves in a symmetric three-layer fluid // *Physics of Fluids*. 2011. V. 23(11). Art. No. 116602.
9. Куркина О.Е., Куркин А.А., Рувинская Е.А., Пелиновский Е.Н., Соомере Т. Динамика солитонов неинтегрируемой версии модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2012. Т. 95. № 2. С. 98–103.
10. Kurkina O., Pelinovsky E. Nonlinear Transformation of Sine Wave within the Framework of Symmetric (2+ 4) KdV Equation // *Symmetry*. 2022. V. 14(4). Art. No. 668.
11. Birnbaum Z.E., Malomed B.A. Families of spatial solitons in a two-channel waveguide with the cubic-quintic nonlinearity // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2008. V. 237(24). P. 3252–3262.