

## ОТРАЖЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКИХ СРЕД. НЕСАМОСОПРЯЖЁННАЯ МОДЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА

**Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б.**

*Институт проблем морских технологий им. академика Агеева М.Д., г. Владивосток,  
kasatkas@marine.febras.ru*

При решении традиционных граничных задач (ГЗ) акустики в слоистом пространстве подразумевается задание соответствующего дифференциального уравнения, граничных условий и условий на бесконечности, означающих в совокупности задание некоторого оператора, описывающего данную ГЗ. В соответствии с определением, приведённым в работе [1], ГЗ считается корректно поставленной при соблюдении двух условий: ГЗ имеет решение в каком-то классе функций, решение ГЗ в этом классе функций является единственным. Согласно общепринятой терминологии, все операторы, описывающие ГЗ, делятся на самосопряжённые и несамосопряжённые. Формальным признаком самосопряжённого оператора является вещественный спектр собственных значений, тогда как спектр собственных значений несамосопряжённого оператора является комплексным с конечным подмножеством вещественных значений. Неформальным признаком самосопряжённого оператора является тот факт, что он всегда описывает консервативную систему, в которой отсутствуют какие-либо потери, например, потери на поглощение звука, потери на трансформацию одного типа волн в волны другого типа, потери на излучение через границы раздела. Потери на трансформацию одного типа волн в волны другого типа хорошо известны в теории твёрдых волноводов, в которых продольные и поперечные волны связаны механизмом взаимной трансформации при отражении от границ раздела. В идеальных (без учёта потерь) жидких слоистых средах звуковое поле описывается одним типом волн, а такой тип трансформации невозможен. Однако это не исключает появления других механизмов трансформации, которые могут сделать модельную постановку ГЗ несамосопряжённой. Наконец, наличие границ раздела, как правило, означает утечку энергии из одной среды, где расположен источник энергии, в другие среды через границы раздела, что также означает, что соответствующая ГЗ должна описываться несамосопряжённым оператором. В свою очередь, это означает, что в акустике слоистых сред несамосопряжённые операторы

должны играть ключевую роль при решении ГЗ, а несамосопряжённая модельная постановка должна быть корректно сформулирована.

Отражение плоской волны на границе раздела двух жидких сред. Рассмотрим простейшую ГЗ на отражение плоской волны на границе раздела двух жидких сред, впервые сформулированную Ньютоном. Амплитудный коэффициент отражения плоской волны определяется из условия непрерывности суммарного поля по давлению и нормальной компоненте колебательной скорости.

$$V = V_{nn} = \frac{k_{31} - \rho_{12}k_{32}}{k_{31} + \rho_{12}k_{32}}.$$

В принятых обозначениях  $\rho_1, c_1, \rho_2, c_2$  – плотность и скорость звука в верхнем и нижнем полупространствах соответственно,  $\rho_{12} = \rho_1 / \rho_2$ ,  $k_{32} = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}$ ,  $k_{31} = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$ ,  $k_{1,2} = \omega / c_{1,2}$ ,  $\omega$  – круговая частота,  $\xi$  – горизонтальное волновое число (постоянная распространения).

В классической схеме поток мощности через границу раздела при докритических углах падения (потери на излучение для источника в верхнем полупространстве) отличен от нуля. По этому формальному признаку схема решения граничной задачи и определение коэффициента отражения плоской волны соответствуют несамосопряжённой модельной постановке. При углах падения, больших критического, коэффициент отражения становится комплексным, равным по модулю единице, а преломлённая волна становится неоднородной волной, амплитуда которой экспоненциально убывает в нижнем полупространстве.

$$V = e^{i2\psi}, \quad k_{32} = -i\alpha, \quad \theta_1 \geq \theta_{1,кp}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\rho_{12}\alpha_2}{k_{31}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\xi^2 - k_2^2},$$

$$\theta_{1,кp} = \arcsin c_{12}, \quad c_{12} = c_1 / c_2,$$

Классическое решение, полученное в несамосопряжённой модельной постановке, не является физически корректным в силу его характерных особенностей, перечисляемых ниже.

- Решение описывает полное отражение при закритических углах падения, только если под коэффициентом отражения понимать комплексное число, модуль которого равен единице.

- Зависимость фазы коэффициента отражения от горизонтального волнового числа (от угла падения) означает горизонтальный сдвиг волнового процесса в верхнем полупространстве на величину  $\Delta = \frac{2\partial\psi}{\partial\xi}$ , который оказывается бесконечно большим при критическом угле падения и в предельном случае  $\theta_1 = \pi / 2$ . Экспериментально наблюдаемый сдвиг, известный как сдвиг Гооса – Генхена, имеет конечную величину

и наблюдается только при возбуждении на границе раздела пограничной волны типа Рэлея – Шолте. Однако на границе раздела двух жидких полупространств пограничная волна отсутствует, а потому физический сдвиг волнового процесса вдоль границы раздела в классическом описании невозможен.

▪ Отражение при закритических углах падения является полным, но не внутренним (по Ньютону). Отличный от нуля горизонтальный поток мощности в нижнем полупространстве не имеет источника энергии в нижнем полупространстве и не имеет энергетической связи с источником энергии, находящимся в верхнем полупространстве (поток мощности через границу раздела равен нулю).

Следует отметить, что решение ГЗ на отражение плоской волны на границе раздела двух жидких сред было получено Ньютоном почти триста лет назад. Он же назвал полное отражение при углах падения, больших критического значения, полным внутренним отражением. Однако физическая некорректность классического описания полного внутреннего отражения, насколько нам известно, впервые была отмечена только в работе [2], но иная модельная постановка не была сформулирована и не получила должного математического обоснования.

Корректное (обобщённое) описание полного внутреннего отражения в несамосопряжённой модельной постановке может быть построено с учётом того, что классическое решение, полученное в НМП, не является единственным при углах падения, больших критического значения. Второе решение, соответствующее комплексно-сопряжённому значению вертикального волнового числа, экспоненциально растёт по амплитуде в нижнем полупространстве. В классическом модельном решении ГЗ это частное решение исключается из общего решения как не удовлетворяющее условию погашаемости в нижнем полупространстве. Однако с физической точки зрения подобный выбор единственного решения не является корректным. Обобщённая составляющая, амплитуда которой экспоненциально растёт в нижнем полупространстве, не исключается из общего решения, а подвергается процедуре трансформации в сходящуюся волну отдачи, амплитуда которой экспоненциально убывает в нижнем полупространстве. Разрывность обобщённого решения на горизонте трансформации порождает взаимосвязанные скачки давления и нормальной компоненты вектора колебательной скорости, которые, в свою очередь, порождают генерацию на горизонте трансформации нормальной компоненты вектора интенсивности

Процедура регуляризации поясняется рис. 1а и сводится к построению собственной функции поперечного сечения, которая является разрывной по волновой функции на горизонте трансформации, который играет роль горизонта полного внутреннего отражения  $z = -z_1$ . Как вид-

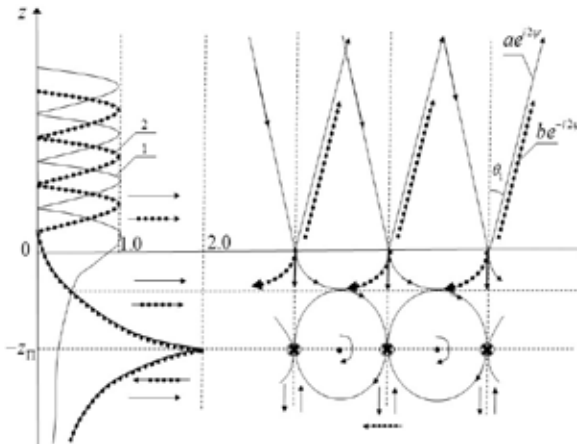


Рис. 1. Структура функций поперечного сечения для регулярной составляющей (1) и обобщённой составляющей (2) (а), лучевая трактовка полного внутреннего отражения с встречным сдвигом (б)

но из рисунка, на этом горизонте расходящаяся волна, амплитуда которой экспоненциально растёт по вертикальной координате, трансформируется в сходящуюся волну отдачи с убывающей амплитудой. Разрывность решения по волновой функции означает появление скачка давления и скачка нормальной компоненты вектора колебательной скорости на горизонте трансформации. Однако возникающая на горизонте трансформации вертикальная компонента вектора интенсивности оказывается знакопеременной с периодом  $\lambda/2$  ( $\lambda$  – длина волны), а поток мощности через горизонт трансформации равен нулю. Иначе говоря, горизонт трансформации обладает свойствами горизонта полного внутреннего отражения по Ньютону. На рис. 1б показано расщепление падающей волны на две составляющие, регулярную и обобщённую. Регулярная составляющая зеркально отражается со сдвигом в направлении распространения волны, тогда как обобщённая составляющая зеркально отражается со сдвигом в обратном направлении. Встречный сдвиг порождает генерацию вихревой составляющей вектора интенсивности в нижнем полупространстве, формирование узловых точек на горизонте трансформации и седловых точек в придонном слое, названных в работах [3]–[4] дислокациями фазового фронта. Как следует из (1), именно такая разрывность звукового поля по давлению и нормальной компоненте вектора колебательной скорости на горизонте трансформации порождает вертикальную компоненту вектора интенсивности, знакопеременную с периодом  $\lambda/2$ , для которой поток мощности тождественно равен нулю. Можно отметить, что интерференция двух составляющих обобщённого решения «открывает» границу раздела по вертикальному потоку мощности, который соответствует отличной от нуля вертикальной компоненте вектора интенсивности

$$I_{z,\Pi} = \begin{cases} I_0 \cos \theta_1 4ab(\text{Im}V)^2, z > -z_{\Pi} \\ 0, z < -z_{\Pi} \end{cases} \quad (1)$$

В свою очередь, на самом горизонте трансформации генерируется вихревая составляющая вектора интенсивности

$$z = -z_{\Pi}$$

$$\Delta p(x) = 2\omega\rho_1 b(1 + V^*) \sin \xi x, \quad \Delta v_z(x) = 2\alpha_2 \rho_{12} b(1 + V^*) \cos \xi x,$$

$$\alpha_2 = k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_2 - c_{12}^2}$$

$$\Delta I_z(x) = \frac{1}{2} \text{Re} \Delta p \Delta v_z^* = I_0 D(\theta_1) \sin 2\xi x \quad (2)$$

$$D(\theta_1) = 4b^2 \cos \theta_1 \text{Im} V; I_0 = \frac{1}{2} \omega \rho_1 k_1,$$

$p(x)$ -звуковое давление,  $v_z(x)$ -вертикальная компонента вектора колебательной скорости,  $z=-z_{\Pi}$ -горизонт трансформации, играющий роль горизонта полного внутреннего отражения.

$$\Delta I_{z,B}(x, z) = I_0 D(\theta_1) e^{-2\xi|z+z_{\Pi}|} \sin 2\xi x \quad (3)$$

$$\Delta I_{x,\Pi} = \begin{cases} I_0 D(\theta_1) e^{-2\xi|z+z_{\Pi}|} [2 + \cos(2\xi x)], z > -z_{\Pi} \\ -I_0 D(\theta_1) e^{-2\xi|z+z_{\Pi}|} [2 + \cos(2\xi x)], z < -z_{\Pi} \end{cases}$$

Сам переход в энергетике звукового поля, который описывается формулами (2)-(3), можно рассматривать как трансформацию потенциальной составляющей вертикальной компоненты вектора интенсивности в вихревую составляющую. Структура вихревой составляющей вектора интенсивности поясняется рис. 2 для углов падения  $\theta_1=74^\circ$ . Координаты на рисунках нормированы на длину волны. Таким образом, на примере простейшей задачи на отражение плоской волны на границе двух жидких полупространств в полной мере проявились новые механизмы взаимной

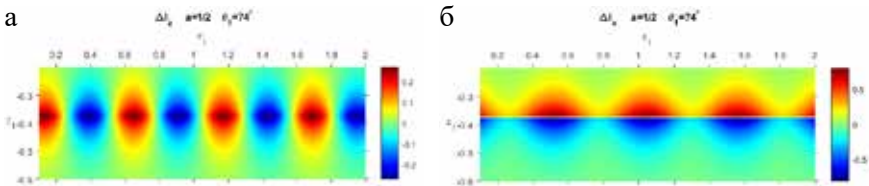


Рис. 2. Пространственная структура вертикальной а) и горизонтальной б) компонент вихревой составляющей вектора интенсивности,  $b=1/2$ , угол падения  $\theta_1=74^\circ$

трансформации волновых процессов, не отмеченные ранее при решении ГЗ акустики. Сам горизонт полного внутреннего отражения определяется уравнением

$$\left| (1 + \operatorname{Re} V) [e^{\alpha_2 z_n} - 2a \operatorname{sh}(\alpha_2 z_n)] - i \operatorname{Im} V [e^{\alpha_2 z_n} - 2a \operatorname{ch}(\alpha_2 z_n)] \right| = 2. \quad (4)$$

Зависимость горизонта полного внутреннего отражения от угла падения поясняется рис. 3, параметром кривых является амплитуда регулярной составляющей суммарного решения. Можно отметить, что при увеличении угла падения уровень звукового давления на границе раздела уменьшается вследствие эффекта мягкого экрана, уменьшается и поток мощности через границу раздела. С другой стороны, поток мощности через границу раздела уменьшается и при приближении угла падения к критическому значению. С учётом этих двух факторов горизонт полного внутреннего отражения также должен увеличиваться по мере приближения угла падения к критическому значению.

Решение, скорректированное процедурой регуляризации и построенное с участием разрывных функций, будем ниже называть обобщённым решением в отличие от регулярного решения, построенного в классе функций, удовлетворяющих условиям локальной  $(p, v_z)$ -непрерывности. Основное свойство обобщённого решения заключается в том, что на горизонте трансформации оно является непрерывным только по импедансу, определённому через отношение интегральных величин, таких как сила, действующая на элемент поверхности, и объёмная колебательная скорость, определённая для этого элемента поверхности, при условии, что размер элемента поверхности достаточно велик по сравнению с длиной волны. Использование пары сопряжённых решений позволяет построить суммарное решение, в котором появляется отличный от нуля поток мощности

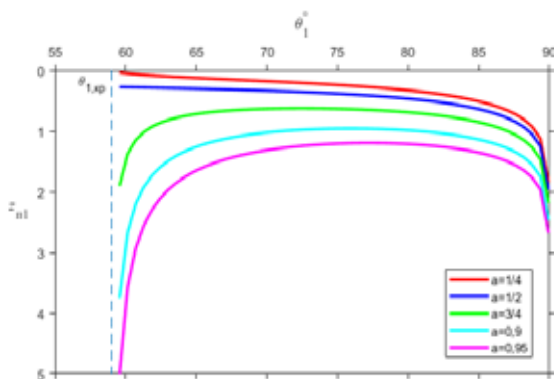


Рис. 3. Угловая зависимость горизонта полного внутреннего отражения  $z_{v1} = z_v / \lambda_1$

через границу раздела. Этот поток реализует гипотезу Ньютона о том, что полное отражение должно быть внутренним, связанным с затеканием потока мощности на горизонт полного внутреннего отражения с последующим её возвратом (или невозвратом) в верхнее полупространство с источником.

Численный анализ граничной задачи. Структура поля звукового давления при полном внутреннем отражении представлена на рис. 4 при различных углах падения (в области закритических углов падения). В расчётах приняты характерные для шельфовой зоны параметры сопряжённых сред  $\rho_{12} = 1,0/1,6$ ;  $c_{12} = 1,5/1,75$  ..

Общие особенности структуры поля звукового давления, заключаются в следующем. В верхнем полупространстве поле носит характер стоячей волны по вертикальной координате и расходящейся волны по горизонтальной координате. В придонном слое уровень звукового давления экспоненциально растёт вплоть до горизонта полного внутреннего отражения и убывает ниже горизонта полного внутреннего отражения. Разрывность звукового давления на горизонте полного внутреннего отражения порождает поле стоячей волны, модулированной по фазе встречным сдвигом

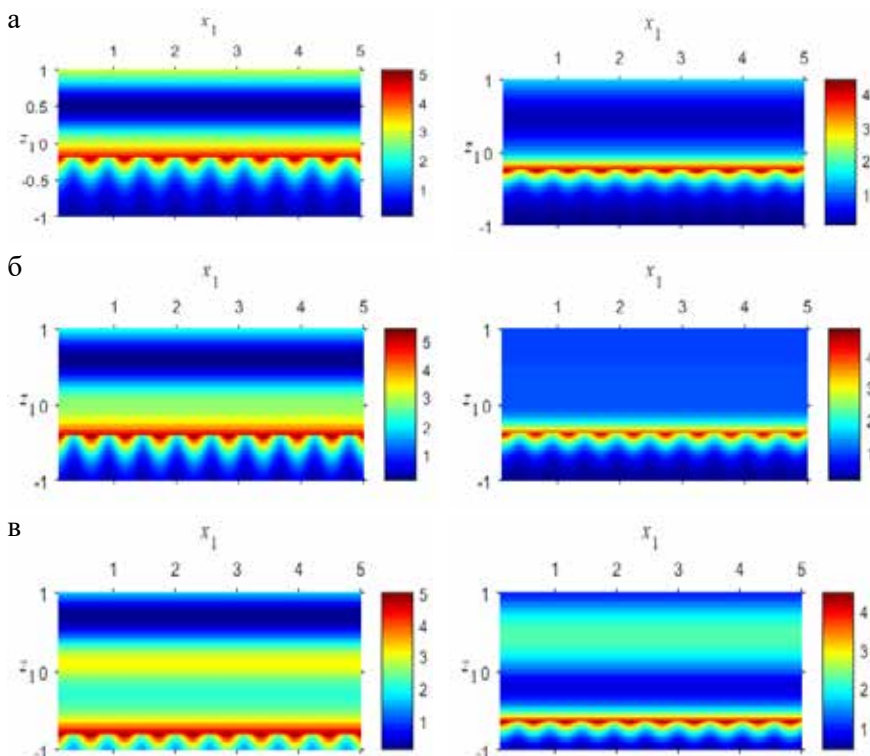


Рис. 4. Структура поля звукового давления при полном внутреннем отражении для угла падения  $\theta_1 = 65^\circ$  (левый столбец),  $\theta_1 = 74^\circ$  (правый столбец) : а –  $a = 1/4$  ; б –  $a = 1/2$  ; в –  $a = 3/4$  ;  $x_1 = x/\lambda$  ,  $z_1 = z/\lambda$

## Отражение сферической волны на границе раздела двух жидких полупространств.

При построении обобщённого решения этой более сложной ГЗ в не-самосопряженной модельной постановке необходимо учесть появление в поле отражённых и преломлённых волн обобщённых составляющих, которые поясняются на рис. 5. Появление обобщённых составляющих, связанных с отражением обратных волн отдачи от оси симметрии, играющей роль жёсткой границы, приводит к нарушению однозначности определения коэффициента отражения  $V = V_{пл}$  на границе раздела двух сред и необходимости его обобщения. Схема обобщения подразумевает разбиение падающей сферической волны на две составляющие, регулярную и обобщённую, которые при отражении приобретают разность фаз, как это показано на рис. 5а. В соответствии с рисунком, можно получить следующие оценки фазовых задержек и формулу обобщения коэффициента отражения во всей области углов падения.

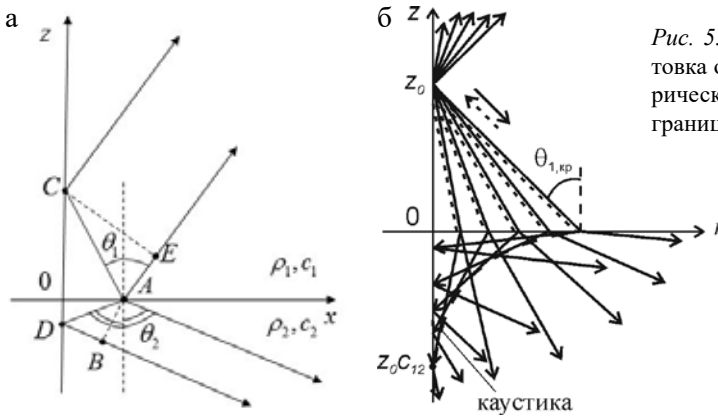


Рис. 5. Лучевая трактовка отражения сферической волны на границе раздела двух сред

$$\Delta\psi_1 = k_1\Delta r_1 = k_1(AC - AE), \quad \Delta\psi_2 = k_2\Delta r_2 = k_2(AD + DB),$$

$$\Delta\psi_1 = \Delta\psi_2 = \Delta\psi = 2k_1z_0 \sin \theta_1 \operatorname{tg} \theta_1,$$

$$V_{сф} = aV + bVe^{-i\Delta\psi}, \quad \theta_1 \leq \theta_{1,кр} \quad (5)$$

$$V_{сф} = (a + be^{-i\Delta\psi})(aV + bV^*), \quad \theta_1 \geq \theta_{1,кр} \quad a + b = 1. \quad (6)$$

Численный анализ коэффициента отражения сферической волны, определённого формулами (5), (6), поясняется ниже рис. 6.

Зависимость модуля коэффициента отражения  $V_{сф}$  от угла падения представлена на рис. 7 при различных значениях амплитуды регулярной составляющей в случае придонного источника  $z_{01} = z_0 / \lambda_1 = 10$ . Интерфе-



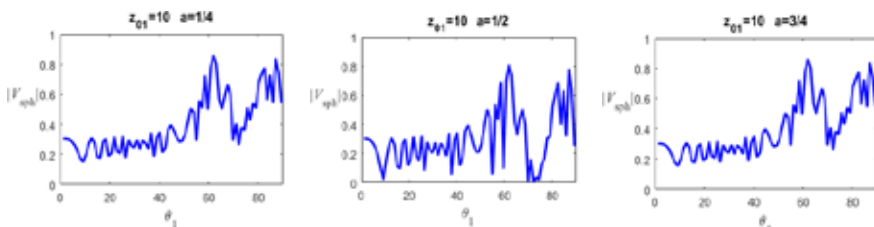


Рис. 6. Угловая зависимость модуля коэффициента отражения  $V_{cf}$

ренция двух составляющих в поле отражённых и преломлённых волн, регулярной и обобщённой, приводит к интерференционной изменчивости модуля коэффициента отражения, однако максимальный уровень коэффициента отражения строго ограничен условием  $|V_{cf}| \leq 1$ . Выполнение этого условия косвенно подтверждает корректность определения коэффициента отражения сферической волны во всём диапазоне углов падения, чего не удалось добиться в более ранних работах [2], [5]–[6]. Кроме того, экспериментальные данные, приведённые в работе [2], хорошо подтверждают существенную вариабельность модуля коэффициента отражения сферической волны. Полное обобщённое решение ГЗ на отражение сферической волны на границе раздела двух жидких сред в несамосопряжённой модельной постановке приведено в работах [5]–[6].

Экспериментальные оценки коэффициента отражения. Достаточно полный анализ работ, связанных с экспериментальной оценкой коэффициента отражения, выполнен в монографии [2]. Приведём наиболее характерные примеры этого анализа. На рис. 7а, который взят из работы [7], приведены результаты измерения коэффициента отражения при нормальном падении, полученные в наиболее простых условиях выровненного морского дна. Существенный рост коэффициента отражения с понижением частоты можно объяснить влиянием сходящихся волн отдачи и, соответственно, эффектом самофокусировки поля ненаправленного источника. Этот эффект проявляется в формировании каустики в донном полупространстве и фокального пятна на оси симметрии, как это поясняется рис. 5б. Само фокальное пятно может служить вторичным источником, излучение которого в обратном направлении увеличивает уровень отражённой волны и коэффициент отражения, соответственно. Однако такой же эффект самофокусировки должен проявляться и в водной среде на самом источнике, усиливая эффект отражения сферической волны от границы раздела при нормальном падении и коэффициент отражения, соответственно. С понижением частоты расширяется характеристика направленности любого источника, увеличивая его сходство с модельным точечным источником, увеличивается влияние сходящихся волн отдачи и самого явления самофокусировки слабо направленного излучения. Дру-

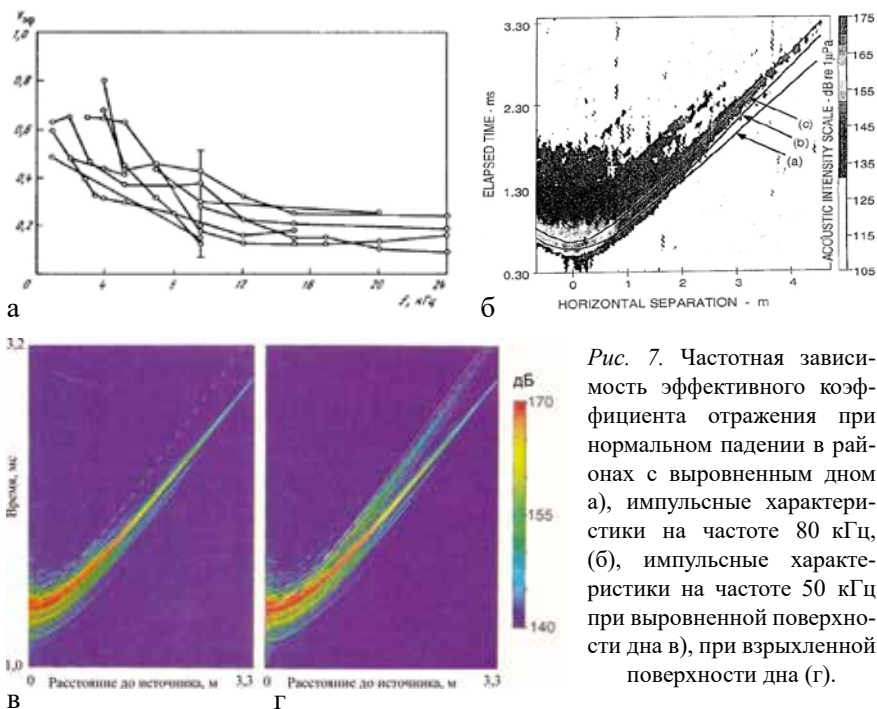


Рис. 7. Частотная зависимость эффективного коэффициента отражения при нормальном падении в районах с выровненным дном а), импульсные характеристики на частоте 80 кГц, б), импульсные характеристики на частоте 50 кГц при выровненной поверхности дна в), при взрыхленной поверхности дна г).

гой эффект незеркального отражения при углах падения, меньших критического значения, поясняется рис. 7, б-г, которые взяты из работ [8]–[9]. В соответствии с лучевой трактовкой незеркального отражения в этом диапазоне углов, поясняемой рис. 5б, незеркально преломлённые лучи образуют в донном полупространстве каустику и фокальное пятно на оси симметрии. На рис. 7б приведены импульсные характеристики, снятые в бассейне на частоте 80 кГц, на дне которого находился слой песка толщиной 2 м, имитирующий донное полупространство. На импульсных характеристиках хорошо видно значительное уширение зондирующего импульса при соосном расположении излучателя, находившегося в воде, и приёмника, находившегося в песчаном грунте. Это уширение прекрасно объясняется обратным (незеркальным) преломлением лучей в песчаном дне. Рис. 7, в-г поясняет импульсные характеристики на частоте 50 кГц и влияние обратного рассеяния на взрыхлённой поверхности дна, которое вносит лишь малую поправку к эффекту обратного преломления. Однако на рис. 7г, который соответствует взрыхлённой поверхности дна, появилась медленная составляющая, скорость которой на (3–5) % меньше скорости звука в воде. Такой составляющей может быть только волна Брюстера, соответствующая корню характеристического уравнения для

границы двух жидких полупространств. Следует также отметить, что достаточно благоприятные условия измерения коэффициента отражения реализуются и при малых углах скольжения в глубоководных акваториях с выровненным дном, когда применим с минимальными погрешностями метод многократных донно-поверхностных отражений, изложенный в работе [10]. Характерные частотно-угловые зависимости коэффициента отражения для этого случая представлены на рис. 8а, взятом из этой работы. Хорошо видно, что в диапазоне углов полного внутреннего отражения формируется характерный минимум коэффициента отражения (0,57–0,65) для рабочих частот эксперимента 64–128 Гц. Аналогичные, по существу, данные содержатся и в работе [11], в которой коэффициент отражения измерен в глубоководном каньоне с помощью многоканальной буксируемой приемной антенны в широком диапазоне углов скольжения 10–80°, из которой и взят рис. 8б. Методика измерений, основанная на использовании техники “spiking filters”, также отличается высокой точностью и стабильностью условий эксперимента в рабочей полосе частот 120 Гц с центральной частотой 50 Гц. На рисунке хорошо видна интерференционная составляющая во всём диапазоне углов падения и характерный минимум коэффициента отражения для углов скольжения 12–15° ( $V \approx 0,4–0,5$ ).

В изложенной выше теории отражения звуковых волн на границе раздела двух жидких полупространств остаётся произвольным соотношение между парциальными коэффициентами  $a+b=1$ . В работе [2] приведено экспериментально подтверждённое предпочтительное значение этих коэффициентов ( $a=3/4, b=1/4$ ). Эти оценки получены с применением комбинированного приёмника и алгоритмов обработки скалярно-векторной информации. Кроме того, эти оценки, приведённые на рис. 6 ( $a=3/4, b=1/4$ ), неплохо соответствуют экспериментальным данным, приведён-

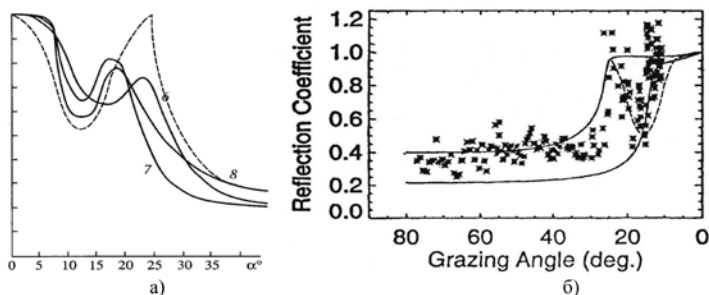


Рис. 8. Экспериментальные зависимости коэффициента отражения от угла скольжения: а) 6 –  $f = 64$  Гц, 7 –  $f = 100$  Гц, 8 –  $f = 128$  Гц; б) крестики – экспериментальные значения, сплошная линия – теоретические значения, пунктирная линия – обобщённая теория

ным на рис. 8, которые получены путём прямых измерений коэффициента отражения.

Результаты разработки несамосопряжённой модельной постановки для рассмотренных ГЗ акустики можно сформулировать в виде ряда положений.

- Полнота решения ГЗ в несамосопряжённой модельной постановке обеспечивается включением в суммарное решение собственных функций двух сопряжённых операторов с возможной их взаимной трансформацией.

- Корректность обобщённого решения ГЗ, построенного в несамосопряжённой модельной постановке, разрывного по давлению и нормальной компоненте вектора колебательной скорости на горизонтах трансформации, обеспечивается равенством нулю потока мощности через горизонт трансформации и, как следствие, отсутствием новых источников энергии, не указанных при формулировке ГЗ.

- Полное внутреннее отражение в терминологии, введённой Ньютоном, не является таковым во всём диапазоне углов падения, включая углы падения, большие критического значения.

- Многочисленные экспериментальные данные хорошо соответствуют модельным оценкам коэффициента отражения, полученным в несамосопряжённой модельной постановке соответствующей граничной задачи.

### Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512 с.
2. Касаткин Б.А., Злобина Н.В. Корректная постановка граничных задач в акустике слоистых сред. М.: Наука. 2009. 496 с.
3. Nye J. F. and Berry M. V. Dislocations in wave trains. 1974. Proc. of the Royal Society. A. P. 165–190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
4. Журавлёв В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А. Потоки энергии в окрестности дислокаций фазового фронта // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. Вып. 5(11). С. 3769-3783.
5. Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б. Модельные задачи в акустике слоистых сред. Владивосток: Дальнаука. 2012. 254 с.
6. Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б., Злобин Д.В., Косарев Г.В. Акустика мелкого моря в скалярно-векторном описании: теория и эксперимент. Владивосток: ИПМТ ДВО РАН. 2019. 360 с.
7. Воловов В.И. Отражение звука от дна океана. М.: Наука. 1993. 270 с.
8. Chotiros N.P. High frequency acoustic bottom penetration: Theory and experiment // Proceeding of Ocean's-89. V. 3. P. 1158-1162.
9. Simpson H.J., Houston B.H. Synthetic array measurements of acoustical waves propagating into a water-saturated sandy bottom for a smoothed and roughened interface // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. № 5. Pt. 1. P. 2329-2337.
10. Студеничник Н.В. Исследование коэффициента отражения звука от дна в диапазоне углов полного внутреннего отражения // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 4. С. 539-546.
11. Heard G.J. Bottom reflection coefficient measurement and geoacoustic inversion at the continental margin near Vancouver Island with the aid of spiking filters // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 101. № 4. P. 1953-1960.