На правах рукописи

Рыжов Евгений Андреевич

Динамика квази-геострофических вихрей при наличии сдвиговых потоков и топографических преград

25.00.28 – Океанология

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Владивосток – 2019

Работа выполнена в *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Тихоокеанском океанологическом институте им. В. И. Ильичёва Дальневосточного отделения Российской академии наук.*

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук,
Заведующая лабораторией физики моря Атлантического отделения Института океанологии им. П.П. Ширшова, РАН *Чубаренко Ирина Петровна*

Доктор физико-математических наук,
Заведующий лабораторией геофизической гидродинамики Института физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, *Чхетиани Отто Гурамович*

Доктор физико-математических наук,
Профессор НИЭ Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде, Факультет математики и компьютерных наук, *Абрашкин Анатолий Александрович*

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт водных проблем Российской академии наук

Защита состоится "20"сентября 2019 г. в 13 часов на заседании диссертационного совета *Д005.017.02* при *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Тихоокеанском океанологическом институте им. В. И. Ильичёва Дальневосточного отделения Российской академии наук*, расположенном по адресу: *г. Владивосток, ул. Балтийская, д. 43*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Федерального государственного бюджетного учреждения науки Тихоокеанского океанологического института им. В. И. Ильичёва Дальневосточного отделения Российской академии наук.*

Автореферат разослан «_____» _______________ 2019 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат географических наук *Храпченков Ф.Ф.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Вихревые структуры, наблюдаемые в разнообразных непрерывных средах, в том числе в океане и атмосфере, являются крайне популярными объектами для исследования. Интерес к этим структурам в океанологии обусловлен их важнейшей ролью в формировании мезо- и суб-мезомасштабной динамики океанических потоков. В то же время, современные исследования показывают, что крупномасштабная циркуляция в океане также подвержена существенному влиянию вихревых структур. Дополнительной мотивацией для исследования вихревых структур является то, что они, по-видимому, остаются устойчивыми на обширном интервале масштабов с характерными размерами, равными десяткам и сотням километров, и временами существования, измеряемыми месяцами и даже годами. Статистические методы оценки количества таких структур по спутниковым данным показывают, что одновременно могут существовать десятки тысяч вихревых структур в различных областях Мирового океана. Наблюдаются как локализованные вихри, то есть находящиеся в ограниченной области достаточно длительное время, так и перемещающиеся вихри, преодолевающие сотни и тысячи километров, оставаясь при этом когерентыми и сохраняя свою гидрологическую структуру. Последнее свойство особенно важно, так как посредством таких долгоживущих распространяющихся вихрей осуществляется транспорт вод с определенными характеристиками в области океана со значительно отличающимися свойствами вод. Известно, что изолированные монопольные вихревые структуры, находящиеся в однородном потоке с ровным дном, не перемещаются в пространстве. Чтобы монопольный вихрь начал движение необходимо наличие либо бета-эффекта, либо неоднородностей дна, либо фонового потока, либо вихрь должен образовать с другими вихрями мультипольную структуру. Тогда такие структуры могут формировать самодвижущиеся объекты. Причем расстояния, преодолеваемые подобными вихрями, сильно зависят от направления вращения отдельных вихрей внутри мультиполей. Так, если внутри мультиполя преобладают вихри одинакового направления вращения, то он будет вращаться в относительно локализованной области. Если же общая завихренность мультиполя будет близка к нулю, при этом он будет состоять из достаточно интенсивных вихрей, вращающихся в разные стороны, то можно ожидать, что подобная структура может преодолевать значительные расстояния, двигаясь практически равномерно и прямолинейно. Помимо этого, океанические потоки часто существенно стратифицированы, с ярко выраженной слоистой структурой. Динамика вихревых структур, принадлежащих одному слою, в целом, соответствует аналогичной однослойной (баротропной) конфигурации, однако, если вихри находятся в разных слоях, то их взаимодействие меняет характер. В реальных условиях редко встречаются изолированные вихревые структуры. Чаще всего, вихри испытывают внешнее влияние, которое в линейном приближении моделируются сдвиговым потоком. Наличие сдвигового потока может оказывать значительное влияние на эволюцию вихревых структур. Например, в зависимости от собственной интенсивности и параметров сдвига, вихревая структура, которая без внешних потоков оставалась бы когерентной в некоторой ограниченной области, может начать разрушаться, порождая новые изолированные вихревые структуры, расходящиеся от центра сдвига. Еще одним фактором, существенно влияющим на динамику вихревых структур в океане, является наличие топографических неоднородностей, таких как подводные изолированные возвышенности и искривленная береговая черта. Так, например, большой объем экспериментальных данных подтверждает наличие топографически-захваченных вихрей, то есть областей замкнутой рециркуляции, генерируемых взаимодействием внешнего потока и топографических неоднородностей. Окрестности топографически-захваченных вихрей известны своей высокой биопродуктивностью, так как наличие практически стационарной замкнутой рециркуляции увеличивает концентрацию био- и зоопланктона. Наличие бухт вдоль береговой черты также оказывает значительное влияние на вихревые структуры, движущиеся вдоль них. В некоторых случаях, если вихрь является достаточно интенсивным, он может быть захвачен внутри такой бухты, которая будет играть роль своеобразного потенциального барьера для его траектории. При этом форма бухты будет определять траекторию движения вихря. Помимо собственно динамики вихрей значительный интерес для исследования представляет поведение окружающей жидкости, которая не принадлежит самим вихревым структурам, но при этом может смешиваться с жидкостью внутри вихрей, захватываться и переноситься этими вихрями. Посредством такого смешения происходит обмен водными массами между вихрями и внешними потоками. В рамках диссертационной работы рассматривается ряд теоретических моделей вихревых взаимодействий, описывающих динамику одного или нескольких вихрей внутри баротропных и стратифицированных квази-геострофических потоков при наличии сдвиговых внешних потоков и топографических особенностей.

Цели и задачи диссертационной работы:

Список **целей**:

1. Исследование регулярной и нерегулярной динамики в окрестности топографически-захваченных вихревых структур, индуцируемых взаимодействием потоков с нерегулярностями дна и искривленными границами.

2. Анализ динамики свободных вихревых структур в постоянном и переменном сдвигово-

вращательном потоке.

3. Исследование влияния стратификации потока на поведение свободных и захваченных вихревых структур.

Для достижения поставленных целей были решены следующие **задачи**:

1. Исследование регулярного и нерегулярного переноса пассивной примеси в окрестности топографического вихря в баротропной и многослойной постановках. Определение размера области заведомо регулярного переноса примеси в окрестности интенсивных топографически захваченных вихрей при наличии нестационарных внешних потоков.

2. Определение условий, приводящих к появлению топографических торообразных вихрей в баротропной вращающейся жидкости, анализ стационарной и возмущенной конфигураций.

3. Определение условий, приводящих к локализованному и нелокализованному движению монопольного и дипольного точечных вихрей, движущихся в окрестности подводной преграды в баротропной и бароклинной постановках. Определение характера взаимодействия самодвижущихся вихревых структур с изолированной подводной возвышенностью в случае, когда вихревая структура располагается в одном слое и в случае двухслойной вихревой структуры (хетона).

4. Анализ динамики точечного вихря и сопутствующего переноса пассивной примеси вдоль прямолинейной границы с выемкой в виде сектора окружности. Исследование переноса пассивной примеси в простейшей модели излучения вихрей за цилиндрической преградой (модель Фёппля).

5. Исследование динамики двух точечных вихрей произвольных интенсивностей, испытывающих влияние внешнего деформационного потока, состоящего из линейных сдвиговых и вращательных компонент. Поиск локализованных и нелокализованных режимов движения вихревой системы, а также анализ перемешивания жидких частиц в обоих случаях.

6. Оценка совместного влияния хаотической адвекции и мелкомасштабной турбулентной диффузии на поток жидких частиц из ядра вихря с помощью модели эволюции распределенного эллипсоидального вихря, помещенного в линейный сдвиговый поток.

Научная новизна. Все представленные результаты являлись новыми на момент публикации в рецензируемых журналах.

Показано, что тороидальный топографический вихрь может появляться в неограниченной баротропной жидкости в окрестности симметричной изолированной топографической преграды произвольного кусочно-постоянного профиля.

Баротропная самодвижущаяся вихревая структура при взаимодействии с топорафической преградой может захватываться в окрестностях топографической преграды. Бароклинный самодвижущийся диполь может совершать непредсказуемое количество оборотов вокруг топографической преграды, в то время как захват баротроного диполя является регулярным.

При наличии внешнего вдольберегового течения, изолированный вихрь может быть захвачен округлой выемкой, при этом совершая в ней периодические колебания. Также, в простейшей модели динамики двух вихрей за округлой преградой, показано, что при смещении с их положений равновесия, вихри начинают периодически колебаться. Такое периодическое движение вихрей играет роль периодического возмущения для жидких частиц в их окрестности, в результате жидкие частицы хаотически перемешиваются и переносятся в потоке.

Проанализирована эффективность перехода к хаотическому движению жидких частиц в окрестности двух точечных вихрей произвольных интенсивностей, помещенных в линейный сдвиговый поток в баротропной жидкости на f–плоскости. В случае, если компоненты линейного сдвигового потока и внешнего вращения гармонически меняются с разными амплитудами, показана возможность параметрической неустойчивости, приводящей к смене типа движения двух-вихревой конфигурации.

В задаче эволюции эллипсоидального вихря в бароклинной жидкости с линейным профилем частоты плавучести, помещенного в линейный деформационный поток, проанализировано совместное влияние детерминированной нерегулярной динамики и турбулентной диффузии. Показано, что нерегулярная детерминированная динамика усиливает поток жидких частиц из ядра вихря во внешнюю область, что способствует более быстрой потере завихренности вихревой структурой.Показано, что при наличии вертикальной компоненты диффузии (которая на порядки слабее по сравнению с горизонтальными компонентами), ее влияние сравнимо с влиянием горизонтальных компонент.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, показывают сложность взаимодействия вихревых структур при наличии неоднородных потоков и топографических преград. Результаты имеют, в первую очередь, теоретический характер, демонстрируя типичные динамические картины взаимодействия малого числа изолированных вихрей. Помимо этого, методы, применяемые в работе для описания переноса примеси, могут быть использованы для исследования лагранжевого транспорта в полях скорости, полученных с помощью спутниковой альтиметрии и океанических моделей высокого разрешения.

Методология и методы исследования. В диссертации используется комбинация аналитических и численных методов решения динамический уравнений эволюции вихревых структур. Динамические уравнения описываемых процессов получены в рамках общепринятых подходов: квази-геострофическое приближение для слоистых геофизических потоков, точечные и распределенные вихри в качестве модели изолированных вихревых структур. Используется теория дельта-коррелированных случайных процессов для учета влияния мелкомасштабной диффузии на транспорт пассивной примеси.

Положения, выносимые на защиту:

1. Показано, что тороидальный топографический вихрь может появляться в неограниченной баротропной жидкости в окрестности симметричной изолированной топографической преграды произвольного кусочно-постоянного профиля. В таком вихре, жидкие частицы двигаются по поверхности правильных торов, периодически опускаясь и всплывая в вертикальном направлении.

2. Баротропная самодвижущаяся вихревая структура (вихревой диполь) при взаимодействии с топорафической преградой в неограниченной жидкости без фоновых потоков может совершать два типа движения: (а) нелокализованная динамика – диполь продолжает свое направленное движение после взаимодействия с топографической преградой; (б) локализованная динамика – диполь квази-периодически колеблется вокруг топографической преграды. Бароклинный самодвижущийся диполь (хетон) имеет аналогичные типы движения: локализованное и нелокализованное. Однако показано, что захваченный хетон может совершать непредсказуемое количество оборотов вокруг топографической преграды, в то время как захват баротроного диполя является регулярным.

3. При наличии искривленных границ, изолированные вихри могут быть захвачены в окрестности особенностей границ. При периодическом возмущении внешнего течения, динамика вихрей в окрестности особенностей может быть нерегулярной. В случае, когда вихри захватываются в окрестности особенностей, их колебания могут служить возмущением для движения жидких частиц в их окрестностях, тчо приводит к эффективному перемешиванию.

4. Проанализирована эффективность перехода к хаотическому движению жидких частиц

в окрестности двух точечных вихрей произвольных интенсивностей, помещенных в линейный сдвиговый поток в бароклинной слоистой жидкости на f–плоскости. Показана возможность параметрической неустойчивости, приводящей к смене типа движения двух-вихревой конфигурации, при наличии гармонисечких колебаний сдвигового потока.

5. В задаче эволюции эллипсоидального вихря в бароклинной жидкости с линейным профилем частоты плавучести, помещенного в линейный деформационный поток, проанализировано совместное влияние детерминированной нерегулярной динамики и турбулентной диффузии. Показано, что нерегулярная детерминированная динамика усиливает поток жидких частиц из ядра вихря во внешнюю область, что способствует более быстрой потере завихренности вихревой структурой.Показано, что при наличии вертикальной компоненты диффузии, ее влияние сравнимо с влиянием горизонтальных компонент, что приводит к существенно более интенсивному потоку частиц из ядра вихря.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: "Конференция молодых ученых Тихоокеанского океанологического института"(Владивосток, 2009, 2010, 2011, 2013, 2016), "Потоки и структуры в жидкостях. Физика геосфер"(Москва, 2009; Владивосток, 2011), "2nd Intern. Conf. on the High-Reynolds Number Vortex Interactions"(Брест, Франция, 2009), "European Geosciences Union. General Assembly"(Вена, Австрия, 2010), "23rd International congress of theoretical and applied mechanics"(Пекин, Китай, 2012), "Nonlinear Processes in Oceanic and Atmospheric Flows"(Мадрид, Испания, 2012, 2016), "IUTAM Symposium on Vortex Dynamics: Formation, Structure and Function"(Фукуока, Япония, 2013), "Регулярная и хаотическая гидродинамика"(Ижевск, 2014), "American Physical Society. Division of Fluid Dynamics. 68th Annual Meeting"(Бостон, США, 2015), "IAPSO. 26th General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG)"(Прага, Чехия, 2015), "Dynamics of concentrated vortices"(Новосибирск, 2016), "Dynamical systems and fluids"(Бремен, Германия, 2017), "Vortices and coherent structures: from ocean to microfluids"(Владивосток, 2017), "Комплексные исследования мирового океана"(Москва, 2017), "Vortex Equilibrium and Dynamics in Geophysics"(Рим, Италия, 2018). Неоднократно на семинаре по "Нелинейной динамике"в ТОИ ДВО РАН, семинаре по "Гидродинамике"в Институте водных проблем РАН, отчетной сессии программы Президиума РАН по "Нелинейной динамике"в Институте океанологии РАН.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 34 печатных работах, из них

34 статей в рецензируемых журналах [1–34].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 6 глав, из них первая глава – обзорная, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 222 страниц, из них 184 страницы текста, включая 90 рисунков. Список литературы включает 597 наименований на 38 страницах.

Содержание работы

Во Введении приводятся обоснование актуальности диссертационной работы, формулировка ее целей и задач, а также представлены основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена обзору работ, имеющих непосредственное отношение к задачам геофизической гидродинамики и теории вихрей.

Во второй главе анализируется модель тороидального топографического вихря, возникающего над изолированной топографической преградой в геофизической постановке. В данной модели учитывается наличие конечных вертикальных скоростей. что приводит к возникновению пространственной структуры топографического вихря. Предполагая радиальную симметрию и стационарность однородного баротропного потока, формулируется спектральная граничная задача для линейного дифференциального оператора на одну из компонент скорости. Остальные две компоненты скорости выражаются через полученную. В качестве граничных условий используются условия невозрастания скоростей в центре симметрии и на бесконечности.

Рассмотрим простейший вид изолированной топографической преграды – изолированный цилиндр. Неограниченный баротропный поток над цилиндром радиуса r_0^* и высоты h_0^* индуцирует следующую потенциальную завихренность на f–плоскости

$$\omega = -\frac{f^*}{H^*} h^*\left(r^*\right), \tag{1}$$

где f^* – постоянный параметр Кориолиса, H^* – постоянная глубина и

$$h^*\left(r^*\right) = \begin{cases} h_0^*, \ r^* \le r_0^*, \\ 0, \ r^* > r_0^*. \end{cases} \tag{2}$$

Далее вводятся горизонтальный и вертикальный масштабы L^*, H^* и масштаб скорости U^*, тогда $\{r, r_0\} = 1/L^*\{r^*, r_0^*\}$, $\{h, h_0, H\} = 1/H^*\{h^*, h_0^*, H^*\}$, $V_\theta = V_\theta^*/U^*$, $f = f^*L^*Ro/U^* \equiv 1$, где $Ro = U^*/(f^*L^*)$ – число Россби. Можно получить асимптотические безразмерные распределения скорости непосредственно над и рядом с цилиндром:

$$V_\theta(r) = v_0(r) = -\frac{\sigma}{2}\begin{cases} r, r \le r_0, \\ \frac{r_0^2}{r}, r > r_0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\sigma = h_0/(HRo)$ – топографический параметр.

Вводя цилиндрически координаты (r, θ, z) и предполагая независимость потока от угла θ и времени t, рассматривается поле безразмерной скорости $\mathbf{U} = (u_r, v_0(r) + u_\theta, u_z)$, где $|\{u_r, u_\theta, u_z\}/v_0| \ll 1$ и безразмерное давление имеет вид $P = P_0 + Ep$, где E – число Экмана, характеризующее отношение вязких сил к параметру Кориолиса. Подставляя скорость $\mathbf{U}$ в исходные уравнения на f–плоскости, и линеаризуя систему, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,\\
&\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} = -\lambda\left(\frac{2v_0}{r} + 1\right)u_\theta,\\
&\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} = \lambda\left(\frac{dv_0}{dr} + \frac{v_0}{r} + 1\right)u_r,\\
&\Delta u_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + 1/r \cdot \partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа, независимый от угла, и $\lambda = 1/E$ – спектральный параметр.

Далее анализируется задача на собственные значения. Собственные значения будут соответствовать точкам бифуркации, в которых устойчивый квази-геострофический вихрь становится неустойчивым. В результате возмущения скорости $u_r,\ u_\theta, u_z$ перестают быть пренебрежимо малыми, порождая новые вихревые структуры в окрестности изолированной преграды.

Представим собственные решения (4) в виде

$$\begin{aligned}
&u_r = u(r)\cos\alpha z\,, \quad u_\theta = v(r)\cos\alpha z,\\
&u_z = w(r)\sin\alpha z\,, \quad p = q(r)\cos\alpha z,
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$w(r) = -\frac{1}{\alpha r}\frac{d}{dr}[r\,u(r)], \quad q(r) = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \alpha^2\right)w(r). \tag{6}$$

Вертикальная скорость u_z равна нулю на дне $(z = 0)$ и на поверхности $(z = 1)$, поэтому $\alpha = k\pi,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$. Граничные условия на границах цилиндра пишутся при $z = 0$, что

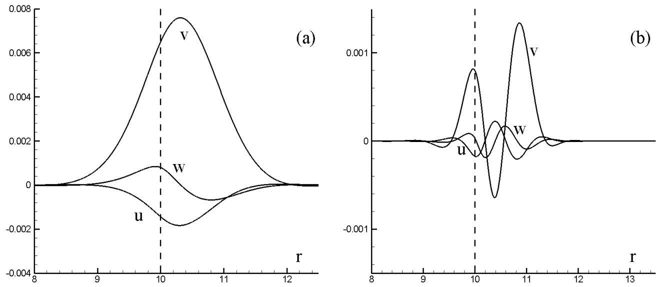

Рис. 1. Собственные функции $u\,(r)\,, v\,(r)\,, w\,(r)$ в случае подводной возвышенности в виде одного цилиндра для (a) первого $\lambda = 49.8286$ и (b) третьего $\lambda = 661.0226$ собственного значения.

предполагает малую высоту топографической преграды. Подставляя (6) и (5) в (4), получаем

$$(\bar{L} - \alpha^2)^2 u = \alpha^2 \lambda\, d(r)\, v,$$
$$(\bar{L} - \alpha^2) v = \lambda\, g(r)\, u, \qquad (7)$$

где

$$d(r) = \frac{2v_0}{r} + 1, \quad g(r) = \frac{dv_0}{dr} + \frac{v_0}{r} + 1, \quad \bar{L} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}. \qquad (8)$$

Далее, полагая $g(r) = const$, из (8) и (7) получаем линейное дифференциальное уравнение шестого порядка

$$(\bar{L} - \alpha^2)^3 v = \lambda^2 \alpha^2 d(r)\, g(r)\, v. \qquad (9)$$

Для этого уравнения ставятся следующие граничные условия. Учитывая, что возмущения скорости должны затухать в точке симметрии и на бесконечности, имеем

$$v \to 0, \quad L\, v \to 0, \quad \frac{d}{dr}[(\bar{L} - \alpha^2)]v \to 0, \quad r \to 0,\ \infty. \qquad (10)$$

Далее рассмотрим возможные численные решения данной спектральной задачи. Построение численных решений для данной задачи выполняется, используя метод погружения. Для этого уравнение (9) преобразуется к матричному уравнению Риккати с переменными коэффициентами. После этого, интервал интегрирования разбивается на большое количество субинтервалов, на которых изменением коэффициентов можно пренебречь. Далее строятся рекуррентные соотношения, которые сходятся к искомому решению.

Рассмотрим полученные решения. Используемые параметры вычислений $\sigma = 1.2$, $r_0 = 10$, $h_0 = 0.12$, $\alpha = \pi$. Первые три значения спектрального параметра равны $\lambda_1 \approx 49.8286$, $\lambda_2 \approx 192.0159$, $\lambda_3 \approx 661.0226$. На рисунке 1 представлены собственные функции $u\,(r)\,, v\,(r)\,, w\,(r)$, соответствующие первому, второму и третьему значениям спектрального параметра, соответственно.

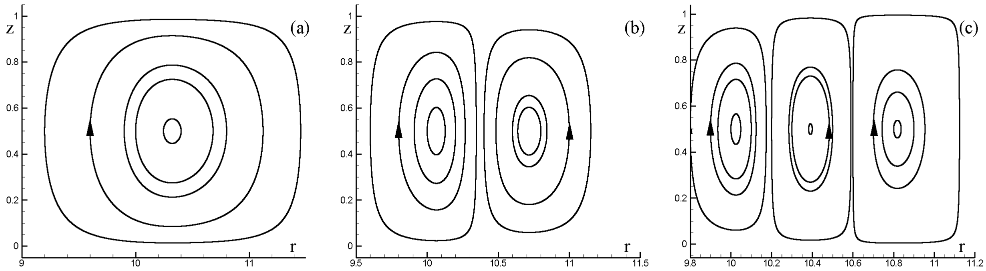

Рис. 2. Сечения трехмерных траекторий, описывающих торообразные поверхности, на плоскости $(r;\, z)$.

Используя уравнения адвекции для пассивной жидкой частицы,

$$\frac{dr}{dt} = u_r\left(r, z\right), \quad r\frac{d\theta}{dt} = v_0\left(r\right) + u_\theta\left(r, z\right), \quad \frac{dz}{dt} = u_z\left(r, z\right), \tag{11}$$

можно построить траектории жидких частиц, соответствующие найденным возмущениям полей скорости. Жидкие частицы двигаются в пространстве по торообразным поверхностям. Стоит, однако, напомнить, что исходная задача формулировалась в условиях радиальной симметрии, поэтому достаточно построить сечение траекторий в координатах $(r;\, z)$. На рисунке 2 представлены сечения траекторий жидких частиц соответствующие возмущениям скорости с рисунка 1. Жидкая частица сначала поднимается рядом с цилиндром, затем погружается на некотором расстоянии от цилиндра, совершая спиралевидное движение.

В результате была разработана динамически–согласованная модель трехмерного топографического вихря, образующегося над изолированной цилиндрической возвышенностью во вращающейся жидкости. Данная модель может представлять интерес для изучения вертикальных движений жидкости в окрестностях изолированных возвышений с радиальной симметрией. Учитывая, что при $\sigma = 1.2$ и $h_0/H = 0.12$, число Россби мало $Ro = 0.1$. Такое число Россби соответствует линейному масштабу явления $L^* = 10^4$ *м*, характерной скорости $U^* = 0.1$ *м/с* и параметру Кориолиса $f^* = 10^{-4}$ *1/с*. Таким образом, видно, что модель описывает мезомасштабное вихревое образование. Так же стоит отметить, что $\lambda_3 = 661.0226$ соответствует числу Экмана $E \approx 1.5 \cdot 10^{-3}$, которое попадает в интервал допустимых значений числа Экмана.

Результаты второй главы опубликованы в работах [16, 19, 20].

В третьей главе продолжается исследование влияния изолированных топографических возмущений на динамику модельных океанических структур. В данной главе анализируется влияние подобной топографической преграды на поведение когеретных вихревых структур. Рассматриваются особенности динамики монопольного вихря, а также дипольной вихревой структуры, двигающихся в окрестности замкнутой области рециркуляции, образующейся за счет подводной возвышенности.

Сначала рассмотрим трехслойную модель геофизического фонового потока. В результате взаимодействия такого потока с изолированной топографической преградой в окрестности преграды возникает замкнутая область рециркуляции. Причем в каждом слое данной модели область рециркуляции будет разной площади. Далее, используя теорию сингулярных вихрей, поместим монопольный вихрь по отдельности сначала в верхний, потом в средний слои модели. Результирующие функция тока в слоях $(i = 1, 2, 3)$ будет иметь вид:

$$\psi_{im} = -Wy + \Phi_{1m} + \alpha_i \Phi_{2m} + \beta_i \Phi_{3m}, \tag{12}$$

где $m = 1, 2$ соответствует движению свободного вихря интенсивности μ_1 в верхнем и нижнем слое, соответственно, W – скорость проточного течения, $\alpha_3 = \beta_3 = 1$, баротропная мода имеет вид:

$$\Phi_{1m} = \frac{f}{\gamma}\left(\frac{(-1)^{3-m}\left(\alpha_{3-m} - \beta_{3-m}\right)\mu_1}{H_1}\log\left(r_{i1}^*\right) + \frac{\left(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\right)\tau_\infty}{H_3}\log\left(r_i\right)\right) \tag{13}$$

и две бароклинные моды имеют вид:

$$\begin{aligned}\Phi_{2m} = &-\frac{f}{\gamma}\left(\frac{(-1)^{3-m}\left(\beta_{3-m} - 1\right)\mu_1}{H_1}K_0\left(\sqrt{k_3\left(\alpha_2 - 1\right)}r_{i1}^*\right) + \right.\\ &\left. + \frac{\left(\beta_1 - \beta_2\right)\tau_\infty}{H_3}K_0\left(\sqrt{k_3\left(\alpha_2 - 1\right)}r_i\right)\right),\\ \Phi_{3m} = &-\frac{f}{\gamma}\left(\frac{(-1)^{3-m}\left(1 - \alpha_{3-m}\right)\mu_1}{H_1}K_0\left(\sqrt{k_3\left(\beta_2 - 1\right)}r_{i1}^*\right) + \right.\\ &\left. + \frac{\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\tau_\infty}{H_3}K_0\left(\sqrt{k_3\left(\beta_2 - 1\right)}r_i\right)\right)\end{aligned} \tag{14}$$

где $r_i = \sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2}$ и $r_{im}^* = \sqrt{\left(x_i - x_m^*\right)^2 + \left(y_i - y_m^*\right)^2}$. Данные функции тока описывают динамику самих свободных вихрей в окрестности изолированной топографической преграды, а так же эволюцию жидких частиц, которые подвержены как влиянию топографии, так и влиянию свободного вихря.

Можно ввести два параметра, которые определяют поведение жидких частиц в окрестности взаимодействия свободного вихря и топографической возвышенности:

$$\chi = \frac{f\tau}{H_3 UL} = \frac{h_0\pi}{\varepsilon H_3}, \quad \kappa_m = \frac{f\mu_1}{H_m UL}. \tag{15}$$

Данные параметры характеризуют безразмерную интенсивность зоны рециркуляции, образующейся в окрестности топографии, и интенсивность свободного вихря, двигающегося в m – ом слое. Чтобы удовлетворить условию квази-геострофичности $\frac{h_0}{H_3}\ O\left(\varepsilon\right)$, выберем $\chi = \pi$.

Такой выбор параметров обеспечивает следующие размерные характеристики $H_1 = 200$ *м*, $H_2 = 400$ *м*, $H_3 = 3000$ *м*, $\rho_1 = 1026.56$ *кг/м*^{3}, $\rho_2 = 1027.84$ *кг/м*^{3}, $\rho_3 = 1028.32$ *кг/м*^{3}, тогда характерный размер области рециркуляции в окрестности топографии L $1.3 \cdot 10^4$ *м*.

Стоить отметить, что центр свободного вихря не испытывает влияния от поля скорости, генерируемого этим вихрем. То есть, центр движется как пассивная частица в поле скорости, индуцируемом топографией и внешним потоком. Таким образом, все результаты по движению пассивных частиц в таком поле, изложенные во второй главе, автоматически распространяются на движение центра свободного сингулярного вихря. В случае если скорость внешнего потока постоянна ($W = const$), в окрестности топографической преграды образуется область рециркуляции, размер которой зависит от скорости внешнего потока. Помещая свободный вихрь в эту зону рециркуляции, получим, что сам вихрь будет двигаться по замкнутым линиям тока и никогда не покинет данную область периодического движения. Если же сразу поместить вихрь в область проточного течения, то вихрь аналогично будет двигаться по невозмущенным линиям тока и удалится вместе с течением. То есть, как уже отмечалось, движение самого вихря не отличается от движения пассивной частицы, рассмотренное во второй главе.

Однако совсем иным будет поведение жидких частиц в поле скорости, индуцируемым топографической преградой и свободным вихрем одновременно. В данном случае, стационарное движение жидких частиц возмущается периодически за счет свободного вихря. Действительно, движение вихря, совершающего обороты вокруг топографии, выступает в роли нестационарного возмущения для движения частиц. В результате часть жидких частиц выходит из области замкнутой рециркуляции во внешнюю проточную область и уносится вместе с потоком.

Рассмотрим поведение пассивных частиц в случае нестационарного внешнего потока. Пусть скорость внешнего потока меняется гармонически. Данные гармонические колебания выступают в роли периодического возмущения для движения свободного вихря. Так как свободный вихрь двигается в области рециркуляции как пассивный маркер, то траектория вихря может теперь демонстрировать нерегулярное поведение, то есть в зависимости от начального положения, вихрь может перемещаться между областью рециркуляции и проточной областью. Соответственно значительно усложняется динамика жидких частиц в окрестности свободного вихря и топографии.

Проведем следующий численный эксперимент. Расположим большое количество маркеров внутри стационарной области рециркуляции, и $1.5 \cdot 10^3$ маркеров в окружности в окрестности свободного вихря. Далее проследим эволюцию адвекции данных маркеров для случая,

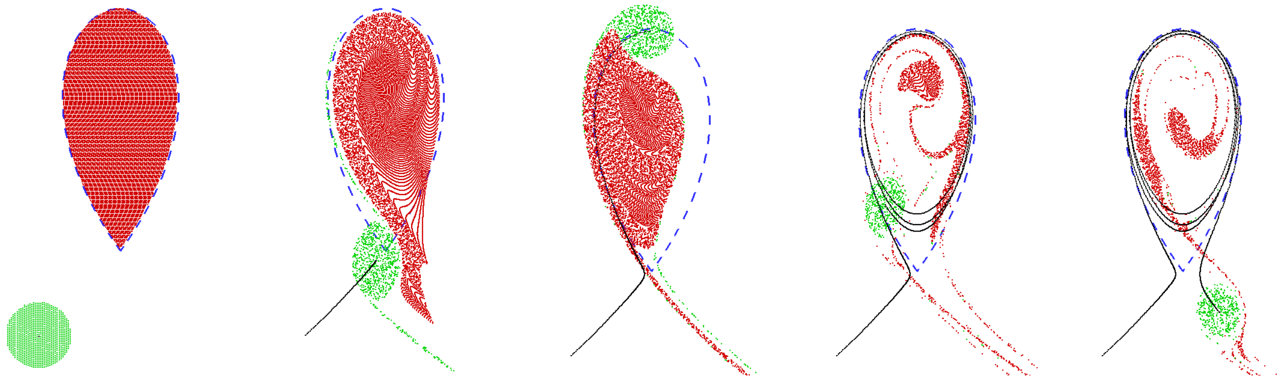

Рис. 3. Адвекция пассивных маркеров при краткосрочном взаимодействии поверхностного свободного вихря и изолированной топографической преграды. Для безразмерного значения времени (a) 0, (b) 30, (c) 90, (d) 240, (e) 315.

когда свободный вихрь начинает свое движение в проточном течении, потом захватывается топографией, совершает несколько оборотов вокруг нее, но, в конце концов, опять выходит в проточную область и уносится вместе течением. На рисунке 3 представлена серия мгновенных распределений ансамбля маркеров. Более темные маркеры изначально распределены в окрестности топографии, более светлые соответствуют свободному вихрю.

Рисунок 3 демонстрирует, что адвекция частиц в случае такого взаимодействия является очень эффективной. Однако в зависимости от интенсивности свободного вихря и зоны рециркуляции эффективность адвекции будет отличаться. Следующий рисунок 4 показывает эффективность адвекции, посчитанной как доля частиц, покинувших зону рециркуляции n_a к изначально распределенным частицам n_i: $E = n_a/n_i$.

В следующем параграфе четвертой главы продолжается исследование взаимодействия вихревых структур с изолированными преградами. В баротропной постановке анализируются возможные режимы взаимодействия самодвижущейся вихревой пары с топографией, представленной в виде дельта-функции. Здесь и далее, под самодвижущейся вихревой парой подразумевается вихревая структура, состоящая из двух точечных вихрей одинаковых интенсивностей, но разного направления вращения. Такая вихревая пара представляет собой интересный объект для исследования в приложениях к геофизическим потокам. Это связано с тем, что вихревые пары в неограниченной однородной среде двигаются неограниченно с постоянной скоростью. При этом обмена жидкостью между вихревой областью и внешней средой не происходит. То есть, такие вихревые пары могут переносить воду с определенными характеристиками на значительные расстояния. Вихревой областью пары или вихревой атмосферой будем называть область, в которой жидкие частицы двигаются по замкнутым

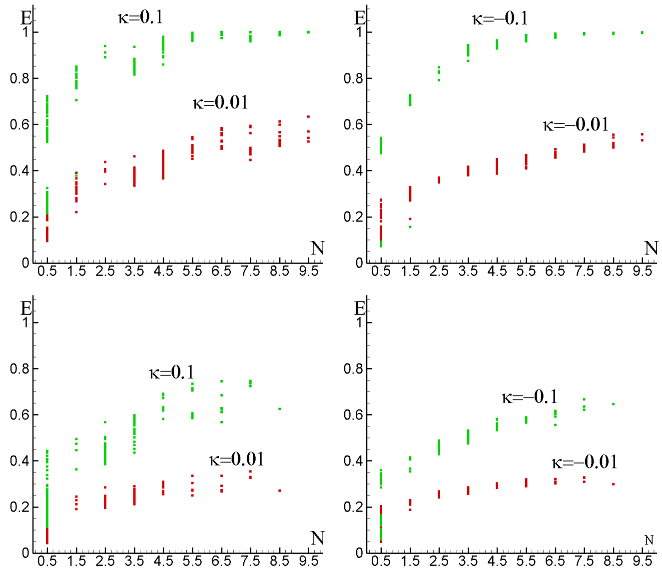

Рис. 4. Эффективность адвекции жидких частиц за счет свободного вихря интенсивности в зависимости от количества оборотов вихря вокруг топографии N. (a) антициклонический поверхностный вихрь, (b) циклонический поверхностный вихрь, (c) антициклонический вихрь среднего слоя, (d) циклонический вихрь среднего слоя.

траекториям в системе координат, связанной с центром пары.

Итак, пусть вихревая пара с интенсивностью μ двигается в направлении изолированной подводной возвышенности, моделируемой дельта–функцией, вокруг которой формируется вращательный поток интенсивности σ за счет приближения f–плоскости. Функция тока, описывающая динамику каждой точки потока, имеет гамильтонову форму:

$$\psi = \sigma \ln (r_0) + \mu \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right), \tag{16}$$

где $r_0 = \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right)^{1/2}$ – расстояние до фиксированного точечного вихря, играющего роль топографии в точке (x_0, y_0), $r_i = \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right)^{1/2}$, $i = 1, 2$ – расстояние до соответствующих вихрей в вихревой паре. Уравнения движения самих вихрей имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -\sigma \frac{(y_i - y_0)}{{r_{0i}}^2} + \mu \frac{(y_i - y_j)}{{r_{ij}}^2}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \sigma \frac{(x_i - x_0)}{{r_{0i}}^2} - \mu \frac{(x_i - x_j)}{{r_{ij}}^2}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, $i \neq j$, $r_{0i} = \left((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \right)^{1/2}$,
$r_{ij} = \left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right)^{1/2}$. В то время как движение жидких частиц в поле скорости, индуцируемом вихревой парой и фиксированным вихрем имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\left(\sigma \frac{(y - y_0)}{{r_0}^2} + \mu \left(\frac{(y - y_1)}{{r_1}^2} - \frac{(y - y_2)}{{r_2}^2} \right) \right),$$

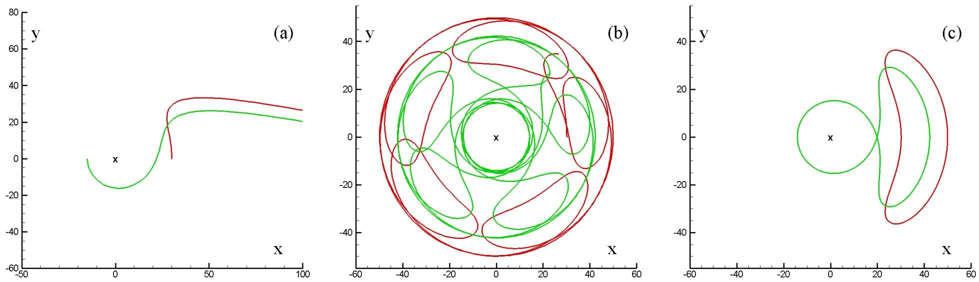

Рис. 5. Траектории вихрей в самодвижущейся вихревой паре при взаимодействии с изолированным фиксированным вихрем (отмечен крестом), играющем роль топографической преграды. (a) неограниченное движение; (b) ограниченное периодическое движение; (c) то же, что и (b), но во вращающейся системе координат.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \sigma\frac{(x-x_0)}{{r_0}^2} + \mu\left(\frac{(x-x_1)}{{r_1}^2} - \frac{(x-x_2)}{{r_2}^2}\right). \tag{18}$$

Сначала рассмотрим движение самих вихрей. Несмотря на то, что система (17) не интегрируется в квадратурах, ее решения являются регулярными, то есть решения устойчивы к малым изменениям в начальных условиях. Можно показать, что решения данной системы могут быть двух типов: неограниченные и ограниченные. В первом случае, вихревая пара двигается в направлении фиксированного вихря, взаимодействует с ним, меняет свое направление, но после этого продолжает свое направленное движение. Во втором случае, вихревая пара двигается периодически в окрестности фиксированного вихря. На рисунке 5 представлены примеры траекторий для неограниченного (a) $\sigma = 30$; $\mu = 10$; $x_1(0) = 30,1$; $y_1(0) = 0$; $x_2(0) = -15$; $y_2(0) = 0$ и неограниченного движения (b) и (c) $\sigma = 30$; $\mu = 10$; $x_1(0) = 30,1$; $y_1(0) = 0$; $x_2(0) = -14,19178$; $y_2(0) = 0$. Интересной особенностью ограниченного движения является то, что можно подобрать вращающуюся систему координат, в которой вихри буду двигаться периодически по замкнутым траекториям, что и показано на рисунке 5(c).

Оба режима движения вихревой пары представляют интерес с точки зрения переноса и перемешивания жидких частиц внутри вихревых областей. В первом случае будет наблюдаться краткосрочная деформация вихревой атмосферы пары при ее прохождении рядом с топографией. При этом часть жидких частиц выйдет из вихревой атмосферы пары и попадет во внешнюю среду, в то время как на их место проникнут частицы из внешней среды. Во втором случае, периодическое движение вихрей будет играть роль возмущения для адвекции жидких частиц, что будет приводить к появлению нерегулярной динамики, аналогичной рассмотренной в предыдущей главе.

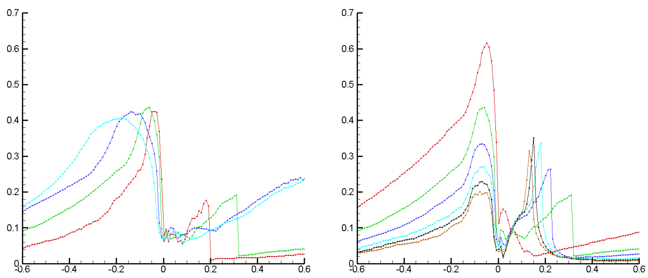

Рис. 6. (a) Доля маркеров, вышедших из вихревой атмосферы пары при взаимодействии с фиксированным вихрем, в зависимости от угла падения пары. Кривые соответствуют начальному расстоянию между вихрями пары (слева направо, сверху вниз) $r_{12}(0)$: 6, 10, 14, 20, для параметров $\mu = 10$, $\sigma = 5$. (b) Кривые соответствуют интенсивности пары (слева направо, сверху вниз) μ: 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Рассмотрим непериодический режим. Количество маркеров, остающихся в окрестности топографии, зависит от интенсивностей вихревых образований и от начального положения вихревой пары. На рисунке 6a показано доля маркеров, оставшихся в окрестности топографии, в зависимости от угла, под которым пара начинает приближаться к топографии с расстояния в 300 единиц длины. Для следующих параметров модели: $\mu = 10$, $\sigma = 5$, $x_c\,(0) = -90$, $y_c\,(0) = 0$. Кривые слева направо соответствуют начальному расстоянию между вихрями в паре $r_{12}\,(0)$: 6, 10, 14, 20. На рисунке 6b показана та же характеристика, но кривые соответствуют различным значениям интенсивности вихрей пары. Слева направо μ: 5, 10, 15, 20, 25, 30. Видно, что доля маркеров, перешедших из вихревой области пары в внешнюю область и затем оставшихся в окрестности топографии, значительно зависит от параметров модели, а именно от угла, под которым пара приближается к топографии и от интенсивности вихрей пары.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [1–6, 13, 14, 17, 27, 31, 32].

В четвертой главе анализируется движение изолированного вихря в ограниченной области. В предыдущих главах рассматривались модели, описывающие динамику вихревых структур в неограниченной области, где единственным ограничением служило наличие изолированной топографической преграды. При этом обязательным условием было выполнение условия квази-геострофики, то есть, топографическая преграда должна быть малой высоты по сравнению с общей толщиной потока.

В данной главе будет рассмотрено поведение изолированного вихря при наличии цилиндрической преграды, располагающейся на всей глубине баротропного потока. Известно, что при набегании направленного потока на такой изолированный «остров», за ним будет образовываться замкнутая область рециркуляции жидких частиц. Такой процесс называется вихревой шеддинг, он является начальным этапом появления широко-известного феномена – вихревой дорожки фон Кармана. Простейшей моделью для описания вихревого шеддинга является вихревая модель Фёппля, которая и будет рассмотрена в данной главе.

Далее в этой же главе рассматривается влияние искривленной границы на движение изолированного вихря. В простейшем случае прямолинейной границы, вихрь будет двигаться вдоль границы прямолинейно и равномерно. Однако наличие изгибов границы приведет к появлению областей рециркуляции, в которых вихрь может надолго задерживаться. В данной главе будет рассмотрена прямолинейная граница с единственной выемкой в форме сектора окружности.

Итак, рассматривается изолированный точечный вихрь в баротропном потоке при наличии цилиндрического «острова». Известно, что в случае постоянного однородного набегающего потока в системе существуют неподвижные эллиптические точки. Положения этих точек называют положениями равновесия Фёппля. Находясь в этих положениях, точечные вихри генерируют в своей окрестности стационарное поле скорости. В этом поле движение жидких частиц регулярно и ограничено. Иная картина наблюдается при отклонении положения точечных вихрей от эллиптических точек. Сами вихри начинают двигаться вокруг эллиптических точек периодически по замкнутым орбитам. Посредством такого движения, поле скоростей, генерируемое вихрями, становится периодически-зависимым от времени. В результате движение жидких частиц в окрестности вихрей становится значительно сложнее. Часть траекторий близких жидких частиц расходятся экспоненциально за конечное время. Данное расхождение приводит к тому, что часть жидких частиц уносится из вихревой области во внешний поток. Таким образом происходит хаотическая адвекция жидких частиц из вихревой атмосферы во внешний поток и обратно.

В декартовых координатах функция тока системы двух точечных вихрей в присутствии цилиндра имеет вид:

$$\psi = Uy\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha \left(\ln r_\alpha - 0.5 \ln\left(\left(x - \frac{a^2 x_\alpha}{\rho_\alpha^2}\right)^2 + \left(y - \frac{a^2 y_\alpha}{\rho_\alpha^2}\right)^2\right)\right), \tag{19}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_a = \sqrt{(x - x_\alpha)^2 + (y - y_\alpha)^2}$, $\rho_a = \sqrt{{x_\alpha}^2 + {y_\alpha}^2}$, (x_α, y_α) – координаты центров вихрей и $\alpha = 1, 2$ – соответствует верхнему и нижнему вихрю.

Для анализа поведения пассивной примеси в окрестности вихревой конфигурации, сначала поместим вихри в положения равновесия Фёппля. Равновесие Фоппля является устойчивым по отношению к малым симметричным возмущениям начальных условий. Помещая вихри в точки равновесия Фёппля, то есть $x_1(0) = x_e, y_1(0) = y_e$, система становится стационарной. Область, ограниченную сепаратрисой, будем называть вихревой атмосферой точечного вихря. В зависимости от скорости внешнего потока, размер и форма границы вихревой атмосферы значительно меняются. Будем рассматривать три характерных значения скорости $U = 3; 0.8; 0.4$. При $U = 3$ размер вихревой атмосферы примерно совпадает с размером цилиндра, при $U = 0,8$ размер вихревой атмосферы значительно больше размера цилиндра, однако влияние цилиндра на поведение жидких частиц все еще сильно, при $U = 0,4$ цилиндр не влияет на поведение частиц в окрестности вихря.

Интерес представляет исследование нерегулярного переноса жидких частиц в окрестности вихревой конфигурации Фёппля. Поэтому отклоним начальное положение вихрей от точек равновесия Фёппля на некое расстояние δ. Такое отклонение приводит к тому, что вихри начинают двигаться периодически по замкнутым орбитам вокруг равновесия Фёппля, при этом индуцируя хаотическое движение жидких частиц. Проведем ряд численных экспериментов, показывающих процесс рассеяния пассивной примеси в окрестности возмущенной конфигурации Фоппля. Рассмотрим случай сильного влияния цилиндра. Равномерно распределим пассивные маркеры, соответствующие жидким частицам, в области, ограниченной сепаратрисой невозмущенной вихревой атмосферы. Далее отклоним начальное положение вихря от положения равновесия на величину $\delta = 0.15$. В результате часть маркеров будет вынесена из вихревой области в проточную. Процесс выноса изображен на рисунке 7. Рисунок 7a показывает область начального распределения маркеров (соответствует невозмущенной вихревой атмосфере при $U = 3$). На следующем рисунке (7b) хорошо видна сложная структура складок, по которым маркеры выносятся в внешнюю область. Далее, после соударения о цилиндр (7c), складки значительно утончаются. Это свидетельствует о том, что наиболее интенсивный вынос маркеров происходит на начальном этапе движения вихря, до его ударения о цилиндр. Рисунок 7d показывает картину распределения маркеров после одного периода оборота вихря. Видно, что большая часть маркеров, которые заведомо должны выноситься в проточную область, уже покинула вихревую область. Далее же будет происходить очень медленный вынос таких оставшихся маркеров. Таким образом, рисунок 7d иллюстрирует остаток возмущенной вихревой атмосферы, которая не обменивается массой с внешней областью.

Далее в данной главе рассматривается задача влияния искривленной границы на движение изолированного вихря. Данная модель может служить простейшей моделью для описания вихревого движения вдоль океанических заливов при условии сохранения вихрем его когерентной структуры достаточно продолжительное время. Простейшая возможная гра-

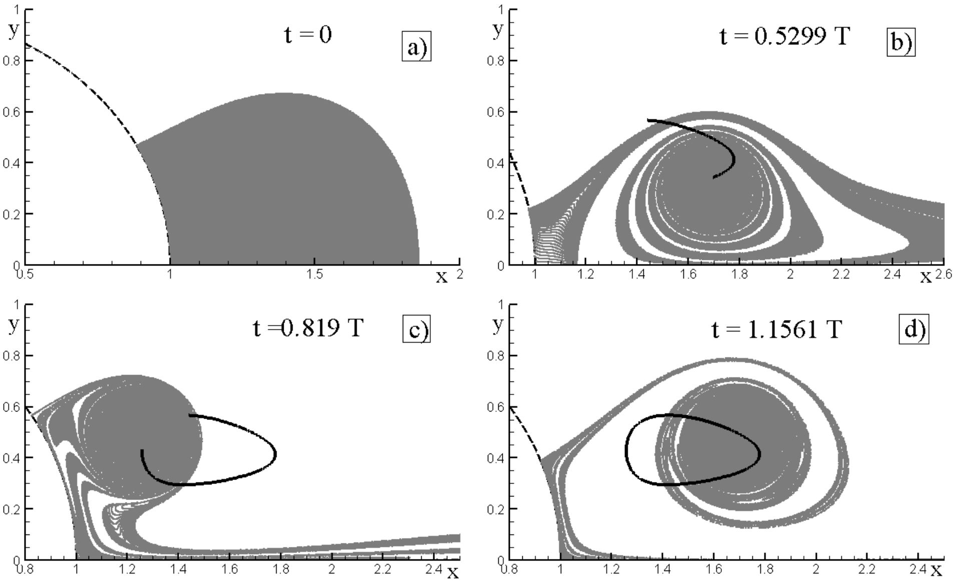

Рис. 7. Процесс рассеяния маркеров в возмущенной системе Фёппля для соответствующих времен.

ница - прямолинейная граница. В таком случае, точечный вихрь движется вдоль границы равномерно и прямолинейно. Данная задача эквивалентна рассмотрению динамики вихревого диполя в неограниченной области в однородном потоке. Искривления в границе приводят к изменению в топологии вихревого движения, что в свою очередь влияет на результирующий перенос жидких частиц. Итак, рассмотрим конформное отображение, отображающее границу с округлой выемкой в верхнюю полуплоскость

$$\zeta = b\frac{1}{1-\gamma z_2},\ \ z_2 = z_1^{\frac{1}{2-\alpha}},\ \ z_1 = \frac{z-a}{z+a}, \tag{20}$$

где $a = R\sin(\pi\alpha)\,,\ b = 2a/(2-\alpha)$, $\pi\alpha$ – характерный угол выемки (смотри рисунок 8a), $z = x + iy$ – комплексная переменная в исходной геометрии и $\zeta = \xi + i\eta$ – комплексная геометрия в отображаемой полуплоскости. Здесь $\gamma = 1$ если $y \geq 0$ и $\gamma = \exp\{2i\pi/(2-\alpha)\}$ если $y < 0$. Тогда, точечный вихрь интенсивности μ двигается в $z-$ плоскости в соответствии с выражением:

$$\frac{dz_v^*}{dt} = \left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_v}\left(W + \frac{\mu}{2\eta_v(z_v)}\right) - i\mu\frac{\left.\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right|_{z=z_v}}{2\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_v}}, \tag{21}$$

где индекс v соответствует положению вихря и $\cdot^*$ – комплексное сопряжение. Выражение $W + \frac{\mu}{2\eta_v}$ соответствует влиянию зеркального вихря и плоского фонового потока скорости W. Выражение $i\mu\frac{\left.\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right|_{z=z_v}}{2\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_v}}$ появляется из-за того, что интенсивность вихря в исходной области должна совпадать с интенсивностью вихря в отраженной плоскости. Тогда, решая уравнения

$$\frac{dx_v}{dt} = \mathrm{Re}\frac{dz_v^*}{dt},\ \ \frac{dy_v}{dt} = -\mathrm{Im}\frac{dz_v^*}{dt}, \tag{22}$$

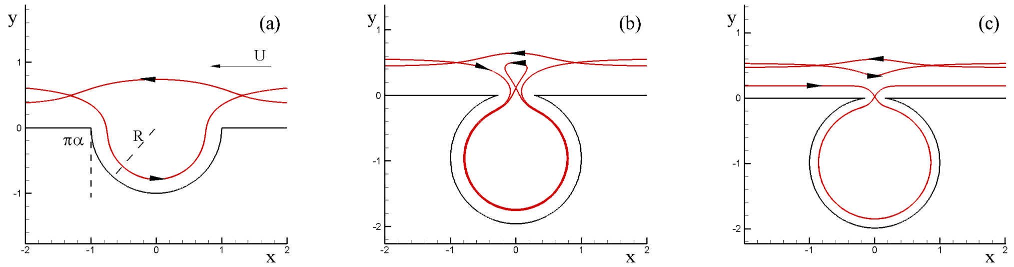

Рис. 8. Типичные фазовые портреты движения вихря в окрестности выемки для $W = -1$, $\mu = 1$:(a) $\alpha = 0,5$, (b) $\alpha = 0,09$, (c) $\alpha = 0,05$.

получаем траектории вихря.

В случае прямолинейной границы движение вихря очень простое – вихрь равномерно и прямолинейно движется вдоль границы. Если направить фоновый поток той же скорости, что и самораспространение вихря, по направлению движения вихря, то вихрь станет неподвижным. Изменение формы границы приводит к появлению локализованных периодических движений вихря. Пусть фоновый поток будет в виде периодических колебаний. В стационарном случае, т.е. амплитуда колебаний равна нулю, в зависимости от размера округлой выемки имеем следующие стационарные фазовые портреты движения вихря. На рисунке 8 изображены сепаратрисы движения, отделяющие области с различным типом движения вихря в окрестности выемки.

Рассматривая возмущенную ситуацию, то есть амплитуда колебаний внешнего потока не равна нулю, движения вихря может становиться хаотическим. На рисунке 9 продемонстрированы сечения Пуанкаре в возмущенном случае. Видно, что значительная часть вихревых траекторий хаотизировалась во внешней области, в то время как движение внутри выемки все еще остается достаточно устойчивым.

Таким образом, показано, что изменения граничных условий могут значительно влиять на динамику вихревых структур.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [10, 21, 24, 33, 34].

В пятой главе рассматривается эволюция двух сингулярных вихрей произвольных интенсивностей в неограниченной области, помещенных во внешний неоднородный поток. Неоднородный поток представляет собой комбинацию сдвиговой и вращательной компонент скорости. Рассматривается баротропная и бароклинная двухслойная и трехслойная постановки. Изучается движение как самих вихрей в таком потоке, так и жидких частиц, находящихся в окрестности двух вихрей. Данная постановка интересна тем, что в реальных

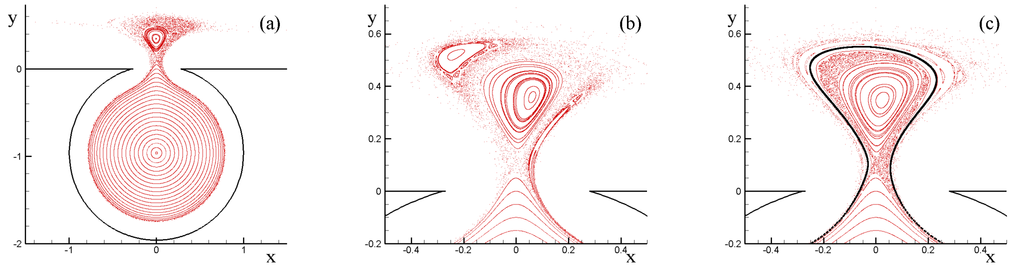

Рис. 9. Сечения Пуанкаре для случая рисунка 8b и амплитуды колебаний фонового потока 0.01:(a) частота колебаний $0,7$, (b) частота колебаний $1,3$, (c) частота колебаний $1,45$, жирная линия показывает транспортный барьер в хаотической области.

потоках когерентные вихревые структуры часто подвергаются воздействию других объектов. Это воздействие часто приводит к значительному изменению траектории движения рассматриваемых структур. Деформационный поток – это простейший способ учесть сдвиговое и вращательное воздействие от вихревых структур в внешнем потоке. Итак, рассмотрим два точечных вихря произвольных интенсивностей μ_α, $\alpha = 1, 2$ в баротропном деформируемом потоке. Функция тока такого потока будет иметь вид:

$$\psi = S\left(t\right)\left(x^2 - y^2\right) + \Omega\left(t\right)\left(x^2 + y^2\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha \log\left(\left(x - x_\alpha\right)^2 + \left(y - y_\alpha\right)^2\right), \tag{23}$$

где (x_α, y_α) – координаты вихрей, $S(t)$ – сдвиг скорости, $\Omega(t)$ – внешнее вращение потока. Будем рассматривать внешний поток в виде

$$S\left(t\right) = S_0\left(1 + \varepsilon_1 \sin \nu t\right), \Omega\left(t\right) = \Omega_0\left(1 + \varepsilon_2 \sin \nu t\right). \tag{24}$$

Сначала проанализируем динамику самих вихрей в таком переменном внешнем потоке. Перейдем в систему координат, связанную с центром завихренности системы двух вихрей. Координаты центра завихренности определятся выражением

$$x_c = \frac{L_x}{\mu_1 + \mu_2}, y_c = \frac{L_y}{\mu_1 + \mu_2}, \tag{25}$$

где

$$L_x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, L_y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \tag{26}$$

– компоненты линейного момента диполя.

Тогда уравнение движения компонент линейного момента имеют вид:

$$\ddot{L}_x - \frac{\left(\dot{S} - \dot{\Omega}\right)}{\left(S - \Omega\right)}\dot{L}_x - 4\left(S^2 - \Omega^2\right)L_x = 0, \quad \ddot{L}_y - \frac{\left(\dot{S} + \dot{\Omega}\right)}{\left(S + \Omega\right)}\dot{L}_y - 4\left(S^2 - \Omega^2\right)L_y = 0. \tag{27}$$

Данные выражения являются уравнениями Хилла. Известно, что уравнение Хилла допускает появление параметрического резонанса в системе, приводящего к экспоненциальному росту решений. Сначала проанализируем уравнения (27) для случая совпадения амплитуд колебаний внешнего сдвига и вращения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. В данном случае, система (27) интегрируется в элементарных функциях

$$
\begin{aligned}
&L_x = L_x(0)\cos\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right) - \\
&\sqrt{\frac{(\Omega_0 - S_0)}{(S_0 + \Omega_0)}}L_y(0)\sin\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right), \\
&L_y = L_y(0)\cos\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right) + \\
&\sqrt{\frac{(S_0 + \Omega_0)}{(\Omega_0 - S_0)}}L_x(0)\sin\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right).
\end{aligned} \tag{28}
$$

Из (28) следует, что в случае если $S_0^2 - \Omega_0^2 > 0$ и центр деформации не совпадает с центром завихренности в начальный момент времени, то центр завихренности движется неограниченно по гиперболической траектории от центра деформации, то есть движение диполя является не локализованным для произвольных значений интенсивностей. Если же $S_0^2 - \Omega_0^2 < 0$ то движение становится локализованным. При этом центр завихренности движется по эллиптической траектории вокруг центра сдвига и вращения:

$$
L_x^2 = \frac{(S_0 - \Omega_0)}{(S_0 + \Omega_0)}L_y^2 + \frac{1}{4}\left({L_x}^2(0) - \frac{S_0 - \Omega_0}{S_0 + \Omega_0}{L_y}^2(0)\right). \tag{29}
$$

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ и примем, что $\Omega_0^2 > S_0^2$. Далее будет показано, что, несмотря на преобладание вращения над сдвигом, всегда существуют такие значения параметров $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, \nu$, при которых движение вихрей становится нелокализованным. В данном случае, уравнение Хилла (28) допускает появление параметрического резонанса, приводящего к нелокализованной динамике центра завихренности вихрей. Используя теорию Флоке, можно получить точные границы в пространстве параметров, соответствующие параметрической неустойчивости. На рисунке 10 темные области соответствуют параметрической неустойчивости. Жирные линии показывают границы размеров главной области неустойчивости, полученные с помощью аналитической оценки.

На рисунке 5 приведены примеры (а) устойчивого и (б) неустойчивого решений.

Приведенный анализ демонстрирует особенности движения точечных вихрей, как целой системы. То есть, движение центра завихренности показывает, как движется система в

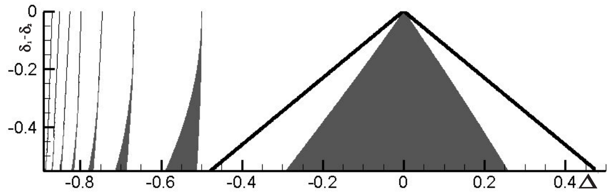

Рис. 10. Зоны параметрической неустойчивости решений уравнений (28).

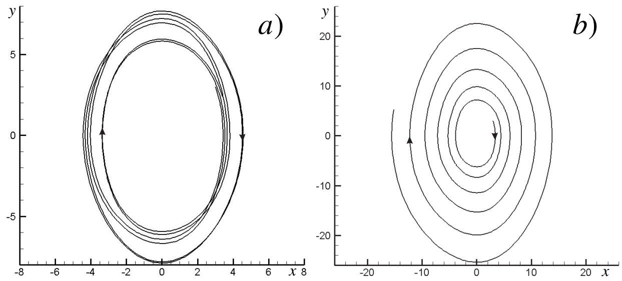

Рис. 11. Траектории центра завихренности пары вихрей. a) локализованное движение; b) нелокализованное движение.

целом, при этом динамика самих вихрей и жидких частиц из их окрестности может быть значительно сложней. Рассмотрим теперь адвекцию жидких частиц в стационарной и нестационарной задачах. С точки зрения приложений геофизической гидродинамики, адвекция жидких частиц сингулярными вихрями представляет основной интерес. Для сравнения результатов теоретических расчетов с реальными наблюдениями нужно учитывать не только траекторию движения сингулярного вихря, но и количество жидкости, которая перемещается вместе с вихрем в его непосредственной окрестности.

Рассмотрим стационарную задачу, т.е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ в (24). Уравнения движения жидких частиц:

$$\dot{x} = -\frac{\partial\left(\psi_v + \psi_d\right)}{\partial y} = 2y\left(S_0 - \Omega_0\right) - \left(\mu_1 \frac{y - y_1}{{\rho_1}^2} + \mu_2 \frac{y - y_2}{{\rho_2}^2}\right),$$
$$\dot{y} = \frac{\partial\left(\psi_v + \psi_d\right)}{\partial x} = 2x\left(S_0 + \Omega_0\right) + \mu_1 \frac{x - x_1}{{\rho_1}^2} + \mu_2 \frac{x - x_2}{{\rho_2}^2}, \qquad (30)$$

где $\rho_1 = \sqrt{\left(x - x_1\right)^2 + \left(y - y_1\right)^2}$, $\rho_2 = \sqrt{\left(x - x_2\right)^2 + \left(y - y_2\right)^2}$.

В общем случае система уравнений (30) нестационарна, так как координаты вихрей явно зависят от времени, т.е. $x_1 \equiv x_1(t)$, $y_1 \equiv y_1(t)$, $x_2 \equiv x_2(t)$, $y_2 \equiv y_2(t)$. Примеры возможных стационарных фазовых портретов движения жидких частиц приведены на рисунке 12.

Положения и количество особых точек системы, описывающей адвекцию жидких ча-

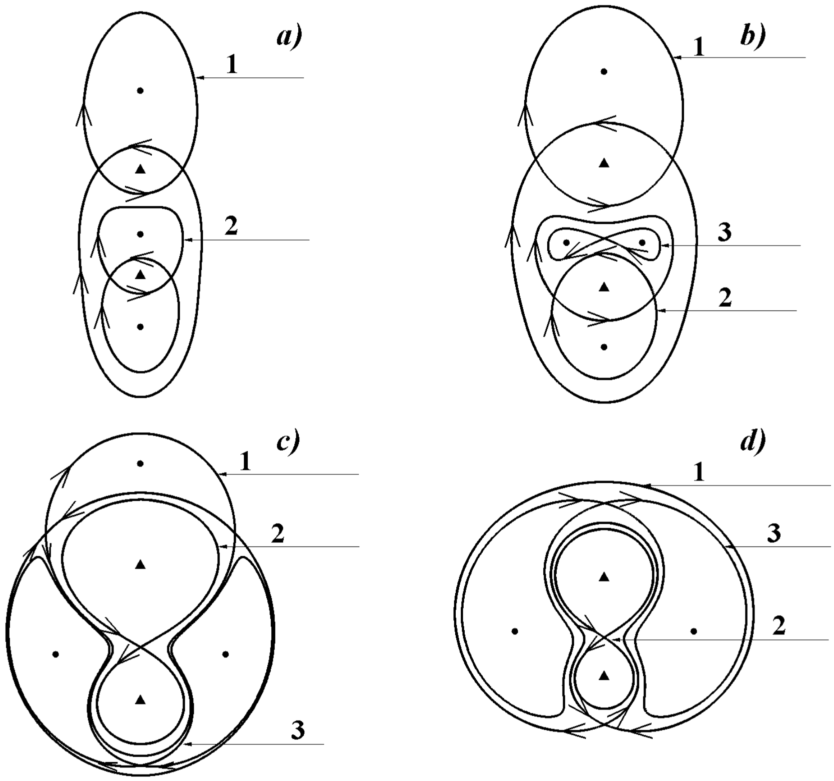

Рис. 12. Качественно различные фазовые портреты системы (30) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\Omega_0 = -0,02$ и четырех значений сдвига S_0 : a) $-0,014$, b) $-0,01$, c) $-0,005$, d) $-0,001$. Жирными линиями обозначены сепаратрисы движения. Треугольники – положения неподвижных вихрей в своих стационарных точках. Жирные точки – эллиптические особые точки в стационарной конфигурации.

стиц, определяются из выражений

$$
\begin{aligned}
&2y\left(S_0-\Omega_0\right)-\left(\mu_1\frac{y-y_1}{{\rho_1}^2}+\mu_2\frac{y-y_2}{{\rho_2}^2}\right)=0,\\
&2x\left(S_0+\Omega_0\right)+\mu_1\frac{x-x_1}{{\rho_1}^2}+\mu_2\frac{x-x_2}{{\rho_2}^2}=0.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Из выражения (31) следует существование до 9 регулярных особых точек. Дополнительно всегда существуют две сингулярные точки, соответствующие положению точечных вихрей (треугольники на рисунке 12). Количество особых точек изменяется в зависимости от значения параметров сдвига и вращения и от интенсивности вихрей. На рисунке 12 также видно, что на вертикальной оси симметрии всегда существуют три регулярные особые точки. В зависимости от типа данных точек можно охарактеризовать все возможные виды фазового портрета стационарной системы Координат данных точек на оси симметрии выражаются из (31) при условии $x = x_1 = x_2 = 0$.

$$
y^3-\left(y_1+y_2\right)y^2+\left(y_1y_2-\frac{\mu_1+\mu_2}{2\left(S_0-\Omega_0\right)}\right)y+\frac{\mu_1y_2+\mu_2y_1}{2\left(S_0-\Omega_0\right)}=0.
\tag{32}
$$

Если же система адвекции частиц возмущается, то появляется нерегулярная динамика. На рисунке 13 продемонстрированы карты конечно-временных показателей Ляпунова, показывающих структуру движения жидких частиц в нестационарном неоднородном потоке. Темные области соответствуют интенсивному растяжению в поле жидких частиц, а светлые области соответствуют застойным областям в поле жидких частиц. Таким образом, в темных областях происходит интенсивный перенос жидких частиц между различными областями в потоке, а в светлых зонах, жидкие частицы остаются продолжительное время. Рисунки 13a,b соответствуют неограниченному распространению пары вихрей для последовательных интервалов времени. Рисунки 13c,d соответствуют локализованной динамике для последовательных интервалов времени.

Данные рисунки демонстрируют, что в случае нелокализованного движения вихрей, жидкие частицы также испытывают значительное растяжение по направлению сдвига скорости. В случае локализованного движения, жидкие частицы остаются в окрестности вихрей, при этом хаотически перемешиваясь между собой.

Результаты пятой главы опубликованы в работах [8, 9, 11, 12, 18, 22, 25, 26, 28].

В шестой главе рассматривается модель эллипсоидального вихря в неоднородном внешнем потоке. Теперь в качестве модели вихревой структуры принимается не сингулярный вихрь, завихренность которого сосредоточена в единственной точке, а распределенный вихрь, завихренность которого распределена равномерно в некоторой замкнутой области. Та-

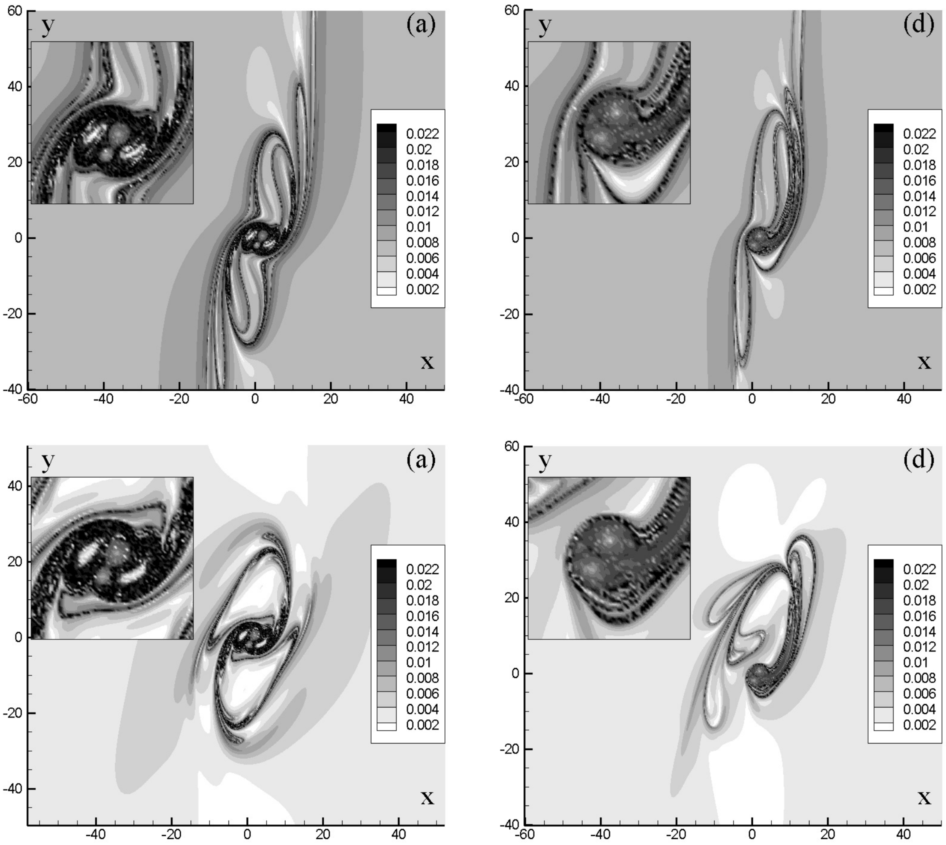

Рис. 13. Конечно-временные показатели Ляпунова для движения жидких частиц в окрестности двух вихрей, двигающихся в неограниченной (a,b) и локализованной (c,d) областях. Рисунки (a,c) соответствуют вихрям одного знака; рисунки (b,d) соответствуют вихрям разных знаков.

кая модель является более подходящей для описания эволюции вихревой структуры с учетом изменения формы границы этой структуры.

Как и прежде будем рассматривать невязкую несжимаемую двумерную жидкость. В жидкости эволюционирует эллиптическое пятно с постоянной потенциальной завихренностью g, на которое действует нестационарный сдвиг скорости $e(t)$ и внешнее вращение $\gamma(t)$. Пятно сохраняет свою начальную эллиптичность с полуосями a и b, $\varepsilon = a/b$ и φ – угол между главной полуосью a и осью абсцисс декартовой системы координат. Уравнения движения для переменных ε и φ имеют вид:

$$\dot{\varepsilon} = 2e\varepsilon\cos 2\varphi, \quad \dot{\varphi} = \gamma + \frac{g\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2} - e\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2-1}\sin 2\varphi. \tag{33}$$

Существует несколько качественно различных типов фазовых портретов с различным количеством и типом особых точек. Часть фазовых портретов имеет эллиптическую стационарную точку, которая соответствует неподвижному вихрю. Нас будут интересовать именно такие конфигурации. Эллиптическая особая точка в фазовом пространстве соответствует неподвижному состоянию эллиптического вихря. Если вихрь будет отклонен от этого положения, то он сначала начнет совершать колебательные движения вдоль оси внешнего сдвига. При выходе отклонения за пределы сепаратрисы, вихрь начнет бесконечно вытягиваться.

Рассмотрим динамику вихря в случае малых периодических возмущений внешнего потока вида

$$e(t) = e_0 + e'(t) = e_0 + e_0\delta\cos\nu t,\ \gamma(t) = \gamma_0 + \gamma'(t) = \gamma_0 + \gamma_0\delta\cos\nu t. \tag{34}$$

Можно показать, что в линейном приближении такой тип возмущения приводит к параметрической неустойчивости фазовых траекторий вихря в окрестности эллиптической особой точки. Параметры, приводящие к параметрической неустойчивости, определяются с помощью теории Флоке. С помощью метода усреднения по быстрым осцилляциям можно получить грубую аналитическую оценку. Аналитическая оценка имеет вид:

$$(2k-\nu) = \pm 2\delta\sqrt{\frac{\sin 2\varphi_0}{e_0}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_0-1)}{(\varepsilon_0+1)^3}}. \tag{35}$$

Обсудим возможные последствия параметрической неустойчивости, характерной для линейной системы, которая описывает динамику в непосредственной близости от эллиптической точки, на исходную нелинейную систему.

Во-первых, в случае параметрической неустойчивости, траектории, начинающиеся в окрестности стационарной эллиптической точки, двигаются неограниченно только до сепаратрисной области, в которой нелинейные эффекты подавляют линейный рост. Такой сценарий,

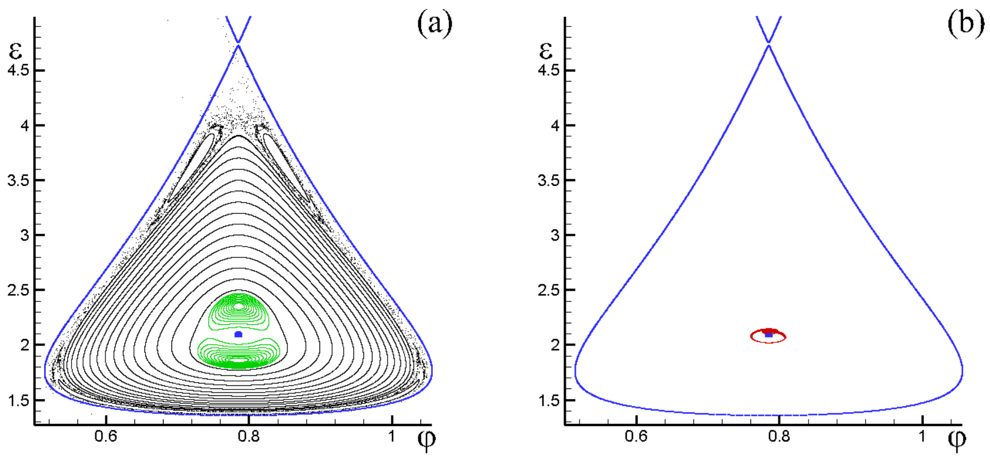

Рис. 14. Динамика возмущенной системы для главной зоны параметрической неустойчивости линеаризованной системы при $\delta = 0,01$, $\nu = 0,6$. Жирными линиями обозначена сепаратриса для невозмущенного фазового портрета. Жирной точкой обозначена эллиптическая особая точка невозмущенной системы. (a) сечение Пуанкаре, иллюстрирующее появление области сильной нелинейности в окрестности стационарной эллиптической точки. Нелинейные резонансы подавляют параметрическую неустойчивость; (b) фазовая траектория в области, ограниченной нелинейным резонансом.

в свою очередь, реализуется только в том случае, если уже в самом начале движения траектории не испытывают сильного нелинейного влияния. Этот эффект наблюдается, например, в случае выбора параметров, соответствующих главной зоне параметрической неустойчивости. В этом случае вид возмущенного фазового портрета существенно отличается от невозмущенного. Сечение Пуанкаре, приведенное на рисунке 14a подтверждает данное наблюдение. При этих параметрах, динамика в окрестности стационарной эллиптической точки определяется положением нелинейного резонанса с числом вращения 1 : 2. Фазовые траектории, начинающиеся в окрестности стационарной эллиптической особой точки не демонстрируют рост, связанный с линейным параметрическим резонансом. На рисунке 14b представлен пример такой траектории, которая очевидно ограниченна положением островов устойчивости, связанных с нелинейным резонансом. Следовательно, линейная система не может применяться для описания динамики в данном случае.

Помимо динамики самого вихря, интерес представляет адвекция жидкости, индуцируемая колебаниями формы вихря в стационарном внешнем потоке. Так как эти колебания являются нестационарными, то жидкие частицы из непосредственной окрестности вихря будут испытывать нестационарное возмущение. В результате, часть из них будет подвержена

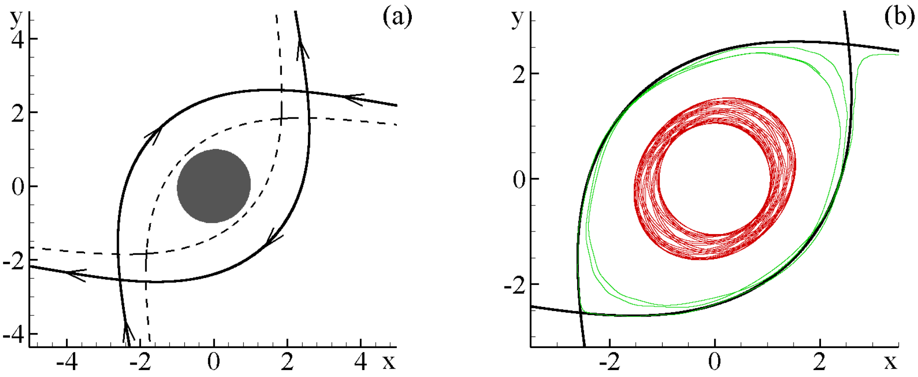

Рис. 15. (a) линии тока на поверхности, ограниченные сепаратрисой (жирная линия). Пунктирная линия – сепаратриса на глубине $z = 1,5$. (b) две траектории возмущенной системы. Квазипериодическая траектория в окрестности вихря – регулярная. Незамкнутая траектория около стационарной сепаратрисы – хаотическая.

хаотическому переносу. Важность данной концепции заключается в том, что когерентные вихри, содержащие в себе жидкость с отличными характеристиками, могут не только переносить эту жидкость на значительные расстояния, но и размешивать жидкость из своей непосредственной окрестности, но имеющую уже характеристики, совпадающими с фоновыми. В результате, размер области, подверженной влиянию вихря может увеличиваться в разы. При этом ядро вихря, отличающееся значением завихренности от фонового, может оставаться неизменной формы и размера.

Рассмотрим обобщение модели вихря Кида на случай непрерывной стратификации с линейным профилем частоты плавучести. Когда $e > \gamma$, внешний поток является гиперболическим, но в непосредственной окрестности вихря появляется зона рециркуляции, ограниченная сепаратрисой. Когда $e < \gamma$ и знаки завихренности потока и вихря не совпадают, то возникает более сложная структура стационарного течения.

Стационарная конфигурация, как и прежде, достигается для начальных условий $\frac{a(0)}{b(0)} = 1,0551$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$. На рисунке 15a приведены линии тока на поверхности, ограниченные сепаратрисой (жирная линия). Пунктирная линия – сепаратриса на глубине $z = 1,5$ показывает, что замкнутая область рециркуляции распространяется на глубины, значительно большие, чем вертикальная полуось эллипсоида ($c = 1$).

На рисунке 16 изображены сечения Пуанкаре, выводимые через период колебаний вихря, на поверхности $z = 0$ (рисунок 16a) и на горизонте $z = 1,5$ (рисунок 16b). Видно, что структура возмущенного фазового портрета значительно изменяется с глубиной. Причиной

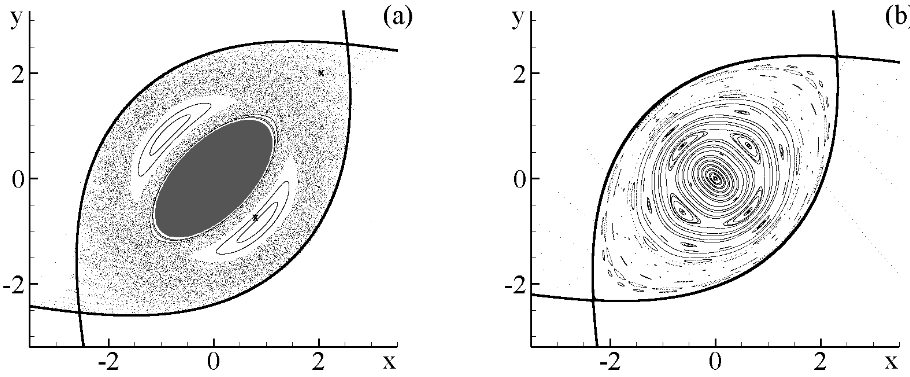

Рис. 16. сечения Пуанкаре возмущенной системы. (a) $z = 0$, (b) $z = 1.5$. Жирные линии – сепаратрисы невозмущенного фазового портрета с рисунка 15a. Крестами обозначены начальные положения траекторий с рисунка 15b.

этого служит то, что на каждом горизонте возмущение от колебаний вихря изменяется. В результате различные параметры возмущения приводят к различным возмущенным конфигурациям. В то же время структура возмущенной конфигурации меняется непрерывно с глубиной.

Введем в систему мелкомасштабную диффузию. Для этого рассмотрим движение пассивного скаляра в заданном поле скорости $\mathbf{U}\left(\mathbf{r},\mathbf{t}\right)$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) q(\mathbf{r},t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} q(\mathbf{r},t),$$
$$q(\mathbf{r},0) = q_0(\mathbf{r}), \tag{36}$$

где $q\left(\mathbf{r},\mathbf{t}\right)$ – скалярное поле концентрации пассивных частиц и κ – коэффициент диффузии. Выражения (36) записаны в безразмерной форме.

Далее добавим диффузионное влияние так же, как и в предыдущем параграфе. Тогда уравнения движения жидких частиц, подверженных влиянию вихря и диффузии, имеют вид

$$u = ex - \gamma y + \tilde{u}\cos\theta - \tilde{v}\sin\theta + \alpha_x,$$
$$v = \gamma x - ey + \tilde{u}\sin\theta + \tilde{v}\cos\theta + \alpha_y,$$
$$w = \alpha_z, \tag{37}$$

где α_x, α_y соответствуют горизонтальному коэффициенту диффузии κ, а α_z соответствует вертикальному компоненту диффузии κ_z.

Рассмотрим возмущенную конфигурацию, т.е. у эллипсоида меняется длина горизонтальных полуосей и ориентация. Из-за изменяющейся длины горизонтальных полуосей, жидкие частицы хаотически переносятся в окрестности вихря. На рисунке 16 приведен пример

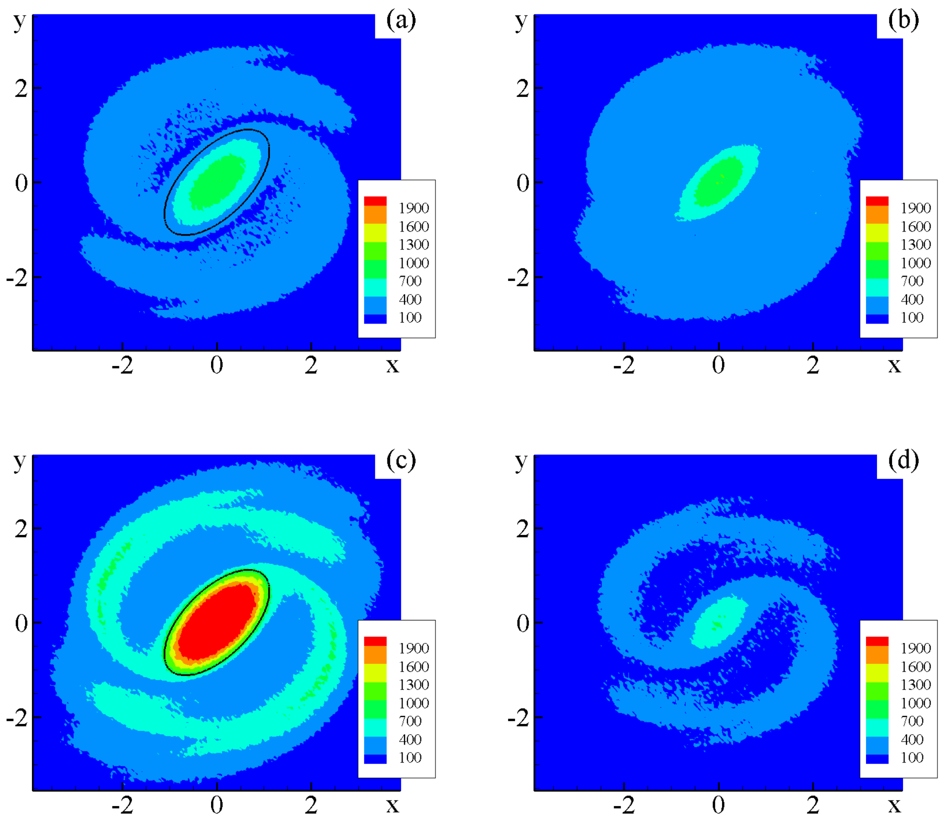

Рис. 17. Возмущенный случай при $a(0)/b(0) = 2$, $\varphi(0) = \pi/4$. Распределение маркеров после 40 временных интервалов с начальной концентрацией $6 \cdot 10^6$ в каждом узле, $\kappa = 0,01$. (a) $\kappa_z = 2\kappa$ – поверхностный слой при $z = 0$, жирная линия указывает на положение границы вихря, (b) $\kappa_z = 2\kappa$ – слой, содержащий крайнюю точку вихря при $z = \tilde{c} = 1$; (c),(d) – то же, что и на (a),(b), но без вертикальной диффузии, $\kappa_z = 0$.

возмущенной конфигурации при $a(0)/b(0) = 2$, $\varphi(0) = \pi/4$. По мере вращения эллипсоида, фазовое пространство периодически сжимается и растягивается. Поэтому, будем рассматривать эволюцию маркеров только в моменты одинаковой фазы. Эллипсоид возвращается в свое исходное положение за время $T_r = 1,89165$. Тогда 40 временных интервалов равно $21 \cdot T_r$. На рисунке 17 приведены поля концентрации через данный интервал.

Как видно из рисунков, возмущенный случай приводит к значительному увеличению дисперсии поля концентрации, так как наряду с диффузией в системе появляется хаотический перенос. Как и в стационарном случае, максимум концентрации сдвигается в вертикальном направлении.

Проанализируем подробно эволюцию поля концентрации в пространстве и времени. Будем использовать следующую численную характеристику. Разделим наше пространство на эллипсоидальные кольца равного объема и одинаковой эллиптичности ($1,0551$ в стационарном случае и 2 в возмущенном) и далее будем рассчитывать количество маркеров, попадающих в данные кольца. В результате получим аналог непрерывной плотности вероятности, показывающий изменение концентрации в пространстве. Дискретный аналог плотности вероятности будет иметь вид:

$$p = \frac{N_{\Delta V}}{N}, \tag{38}$$

где $N_{\Delta V}$ – количество маркеров в эллипсоидальном кольце объема ΔV, N – полное количество маркеров в объеме V. На рисунке 18 изображены полученные кривые плотности вероятности. Рисунки 18a,b соответствуют стационарному случаю при наличии вертикального компонента диффузии и без него, соответственно. Аналогично, рисунки 18c,d соответствуют возмущенному случаю с вертикальной компонентой диффузии и без нее. Каждый рисунок содержит 4 кривых, соответствующих 10, 20, 30, 40 временным интервалам. На рисунках, соответствующих стационарной конфигурации отчетливо виден нормальный закон распределения, тогда как на рисунках, соответствующих возмущенному случаю, кривые имеют иную форму.

И в возмущенном и в невозмущенном случаях учет вертикальной компоненты диффузии приводит к интенсификации переноса жидких частиц через границу вихря, и насыщению внешнего потока. В возмущенному случае, наряду с диффузией появляется хаотический перенос, который способствует увеличению потока через границу вихря и приводит к отличному от нормального распределению концентрации маркеров в области, где появляется хаотический перенос. Помимо интенсификации в вертикальном направлении за счет диффузии, появляется дополнительный эффект. Так как каждое горизонтальное сечение эллипсоида уменьшается в площади с глубиной, маркер, стартовавший внутри эллипсоида может погрузиться глубже сразу же во внешний поток, где он будет подвержен хаотическому переносу. Это приводит к уменьшению вероятности возвращения маркера внутрь области начального распределения маркеров, что увеличивает горизонтальную дисперсию частиц.

Результаты шестой главы опубликованы в работах [7, 15, 23, 29, 30].

В Заключении приведены основные результаты работы:

1. Во второй главе рассматривается задача генерации тороидальных вихревых структур в окрестности изолированных симметричных подводных преград. Показано, что тороидальный топографический вихрь может появляться в неограниченной баротропной жидкости в окрестности топографической преграды произвольного кусочно-постоянного профиля. В таком вихре, жидкие частицы двигаются по поверхности правильного

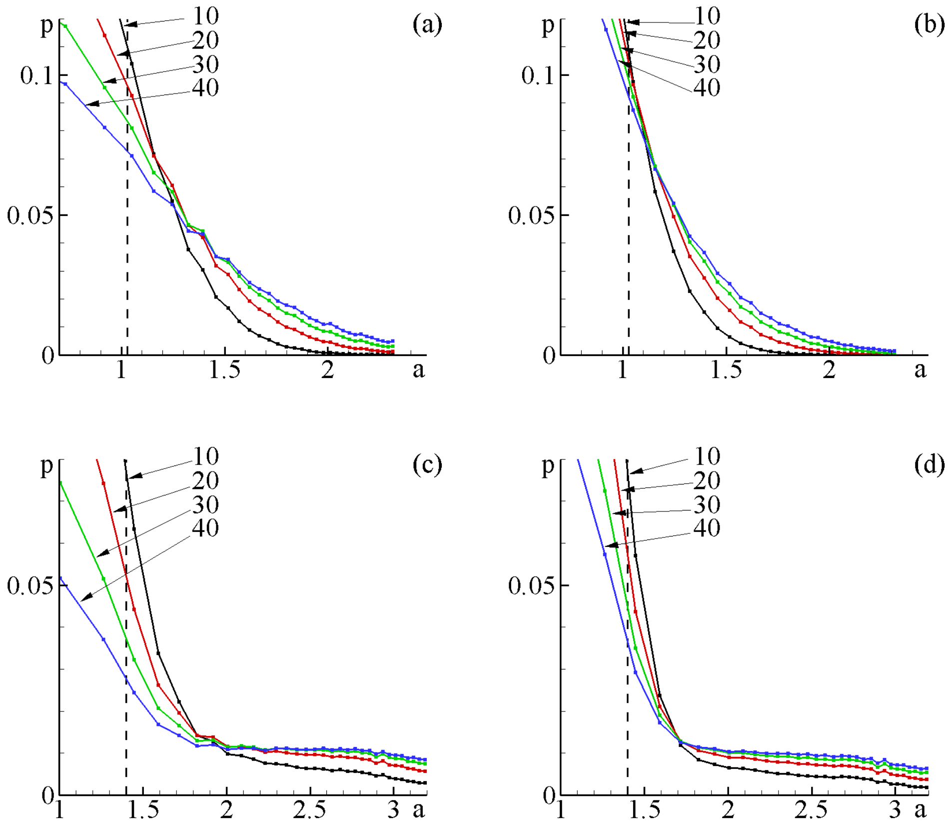

Рис. 18. Плотность вероятности p как функция длины главной полуоси эллипсоида a. Изначально $p = 0,2$ внутри эллипсоида, и $p = 0$ вне эллипсоида. Вертикальная линия указывает на границу вихря. 4 кривых на каждом рисунке соответствуют указанным временным интервалам. (a) стационарный случай с горизонтальной и вертикальной компонентами диффузии; (b) стационарный случай с горизонтальной, но без вертикальной компонент диффузии; (c) возмущенный случай с горизонтальной и вертикальной компонентами диффузии; (d) возмущенный случай с горизонтальной, но без вертикальной компонент диффузии.

тора, периодически опускаясь и всплывая в вертикальном направлении.

2. В третьей главе анализируется поведение самодвижущихся вихревых структур - вихревых диполей в баротропной и бароклинной слоистой постановках. Показано, что баротропная самодвижущаяся вихревая структура (вихревой диполь) при взаимодействии с топорафической преградой в неограниченной жидкости без фоновых потоков может совершать два типа движения. Первое, нелокализованная динамика, при которой диполь продолжает свое направленное движение после взаимодействия с топографической преградой, при этом траектория движения диполя может быть сильно изменена за счет взаимодействия с преградой. Второе, локализованная динамика, при которой диполь начинает колебаться вокруг топографической преграды, при этом диполь периодически разрушается на два изолированных вихря, а потом снова воссоединяется в самодвижущуюся структуру. Бароклинный самодвижущийся диполь (хетон) имеет аналогичные типы движения: локализованное и нелокализованное. Однако движение хетона более сложное, в общем случае переход между локализованным и нелокализованным режимами происходит хаотическим образом. То есть, захваченный хетон может совершать непредсказуемое количество оборотов вокруг топографической преграды, в то время как захват баротроного диполя является регулярным.

3. Четвертая глава посвящена анализу регулярной нерегулярной динамики изолированного вихря при его взаимодействии с прямолинейной границей с особенностью в виде сектора окружности и наличии фонового потока. Показано, что изолированный вихрь может быть захвачен округлой выемкой, при этом совершая в ней периодические колебания. При периодическом возмущении внешнего течения, движение вихря в окрестности выемки усложняется, начинают появляться нерегулярные траектории движения вихря. То есть, вихрь может долгое время колебаться в окрестности выемки, после чего быть вынесенным во внешний поток и продолжить движение вдоль прямолинейной границы. Также, в простейшей модели динамики двух вихрей за округлой преградой, показано, что при смещении с их положений равновесия, вихри начинают периодически колебаться. Такое периодическое движение вихрей играет роль периодического возмущения для жидких частиц в их окрестности, в результате жидкие частицы хаотически перемешиваются и переносятся в потоке. Показано, что эффективность перемешивания определяется частотами оборота жидких частиц в стационарной конфигурации и частотой колебания вихрей относительно их положений равновесия.

4. В пятой главе рассматривается эффективность перехода к хаотическому движению жидких частиц в окрестности двух точечных вихрей произвольных интенсивностей, помещенных в линейный сдвиговый поток в баротропной жидкости на f–плоскости. В случае, если компоненты линейного сдвигового потока и внешнего вращения гармонически меняются с разными амплитудами, показана возможность параметрической неустойчивости, приводящей к смене типа движения такой двух-вихревой конфигурации. В то время как в невозмущенном состоянии, центр завихренности может двигаться только по эллиптическим (локализованное движение) и гиперболическим (нелокализованное движение) траекториям, параметрическая неустойчивость приводит к спиралевидному движению центра завихренности.

5. Шестая глава посвящена рассмотрению эволюции эллипсоидального вихря в бароклинной жидкости с линейным профилем частоты плавучести, помещенного в линейный деформационный поток. Анализируется совместное влияние детерминированной нерегулярной динамики и турбулентной диффузии. Показано, что нерегулярная детерминированная динамика усиливает поток жидких частиц из ядра вихря во внешнюю область, что способствует более быстрой потере завихренности вихревой структурой.Показано, что вынос жидких частиц из ядра вихря происходит неравномерно по пространству с выделенными направлениями вдоль оси сдвига. Показано, что при наличии вертикальной компоненты диффузии (которая на порядки слабее по сравнению с горизонтальными компонентами), ее влияние сравнимо с влиянием горизонтальных компонент, так как отношение коэффициента вертикальной диффузии к вертикальному линейному масштабу имеет тот же порядок, что и отношение коэффициента горизонтальной диффузии к горизонтальному линейному масштабу.

Список публикаций

1. Рыжов Е. А., Кошель К. В., Степанов Д. В. Об оценке толщины слоя хаотизации в модели двухслойного топографического вихря // Письма в ЖТФ. 2008. Vol. 34. Pp. 74–81.
2. Ryzhov E., Koshel K., Stepanov D. Background current concept and chaotic advection in an oceanic vortex flow // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. Pp. 59–64.
3. Рыжов Е. А., Кошель К. В. Хаотический перенос и перемешивание пассивной примеси вихревыми потоками за препятствиями // Изв. РАН. ФАО. 2010. Vol. 46. Pp. 204–211.

4. Рыжов Е. А., Кошель К. В. Эффекты хаотической адвекции в трехслойной модели океана // Изв. РАН. ФАО. 2011. Vol. 47. Pp. 263–274.
5. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Estimating the size of the regular region of a topographically trapped vortex // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2011. Vol. 105. Pp. 536–551.
6. Рыжов Е. А., Кошель К. В. Вентилирование области топографического вихря захваченным свободным вихрем // Изв. РАН. ФАО. 2011. Vol. 47. Pp. 845–857.
7. Zhmur V. V., Ryzhov E. A., Koshel K. V. Ellipsoidal vortex in a nonuniform flow: Dynamics and chaotic advections // J. Mar. Res. 2011. Vol. 69. Pp. 435–461.
8. Ryzhov E. A. On changing the size of the atmosphere of a vortex pair embedded in a periodic external shear flow // Phys. Lett. A. 2011. Vol. 375. Pp. 3884–3889.
9. Рыжов Е. А. Интегрируемое и неинтегрируемое движение вихревой пары в несимметричном деформационном потоке // Нелинейная динамика. 2011. Vol. 7. Pp. 283–293.
10. Ryzhov E. A. Fluid particle advection in the vicinity of the Föppl vortex system // Phys. Lett. A. 2012. Vol. 376. Pp. 3208–3212.
11. Koshel K. V., Ryzhov E. A. Parametric resonance with a point-vortex pair in a nonstationary deformation flow // Phys. Lett. A. 2012. Vol. 376. Pp. 744–747.
12. Ryzhov E. A., Koshel K. V., Carton X. J. Passive scalar advection in the vicinity of two point vortices in a deformation flow // Eur. J. Mech. B- Fluid. 2012. Vol. 34. Pp. 121–130.
13. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Dynamics of a vortex pair interacting with a fixed point vortex // EPL. 2013. Vol. 102. P. 44004.
14. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Interaction of a monopole vortex with an isolated topographic feature in a three-layer geophysical flow // Nonlin. Processes Geophys. 2013. Vol. 20. Pp. 107–119.
15. Koshel K. V., Ryzhov E. A., Zhmur V. V. Diffusion-affected passive scalar transport in an ellipsoidal vortex in a shear flow // Nonlin. Processes Geophys. 2013. Vol. 20. Pp. 437–444.
16. Зырянов В. Н., Рыжов Е. А., Кошель К. В. Вихревые торы над возмущениями дна во вращающейся жидкости // Доклады академии наук. 2013. Vol. 450. Pp. 171–175.
17. Ryzhov E. A. Irregular mixing due to a vortex pair interacting with a fixed vortex // Phys. Lett. A. 2014. Vol. 378. Pp. 3301–3307.
18. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Two-point-vortex evolution in an oscillatory shear flow with rotation // EPL. 2014. Vol. 108. P. 24002.
19. Koshel K. V., Ryzhov E. A., Zyryanov V. N. Toroidal vortices over isolated topography in geophysical flows // Fluid Dyn. Res. 2014. Vol. 46. P. 031405.

20. Koshel K. V., Ryzhov E. A., Zyryanov V. N. A modification of the invariant imbedding method for a singular boundary value problem // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2014. Vol. 19. Pp. 459–470.
21. Рыжов Е. А., Израильсикий Ю. Г., Кошель К. В. Вихревая динамика жидкости вблизи границы с округлой выемкой // Изв. РАН. ФАО. 2014. Vol. 50. Pp. 477–483.
22. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Global chaotization of fluid particle trajectories in a sheared two-layer two-vortex flow // Chaos. 2015. Vol. 25. P. 103108.
23. Koshel K. V., Ryzhov E. A., Zhmur V. V. Effect of the vertical component of diffusion on passive scalar transport in an isolated vortex model // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. P. 053021.
24. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Steady and perturbed motion of a point vortex along a boundary with a circular cavity // Phys. Lett. A. 2016. Vol. 380. Pp. 892–902.
25. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Parametric instability of a many point-vortex system in a multi--layer flow under linear deformation // Regul. Chaotic Dyn. 2016. Vol. 21. Pp. 254–266.
26. Koshel K. V., Ryzhov E. A. Local parametric instability near elliptic points in vortex flows under shear deformation // Chaos. 2016. Vol. 26. P. 083111.
27. Ryzhov E. A., Sokolovskiy M. A. Interaction of a two-layer vortex pair with a submerged cylindrical obstacle in a two layer rotating fluid // Phys. Fluids. 2016. Vol. 28. P. 056602.
28. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Resonance phenomena in a two-layer two-vortex shear flow // Chaos. 2016. Vol. 26. P. 113116.
29. Koshel K. V., Ryzhov E. A. Parametric resonance in the dynamics of an elliptic vortex in a periodically strained environment // Nonlin. Processes Geophys. 2017. Vol. 24. Pp. 1–8.
30. Ryzhov E. A. Nonlinear dynamics of an elliptic vortex embedded in an oscillatory shear flow // Chaos. 2017. Vol. 27. P. 113101.
31. Koshel K. V., Reinaud J. N., Riccardi G., Ryzhov E. A. Dynamics of a vortex pair interacting with a fixed point vortex revisited. Part I: Point vortices // Phys. Fluids. 2018. Vol. 30. P. 096603.
32. Reinaud J. N., Koshel K. V., Ryzhov E. A. Dynamics of a vortex pair interacting with a fixed point vortex revisited. Part II: Finite size vortices // Phys. Fluids. 2018. Vol. 30. P. 096604.
33. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Advection of passive scalars induced by a bay-trapped nonstationary vortex // Ocean Dynamics. 2018. Vol. 68. Pp. 411–422.
34. Ryzhov E. A., Koshel K. V., Sokolovskiy M. A., Carton X. J. Interaction of an along-shore propagating vortex with a vortex enclosed in a circular bay // Phys. Fluids. 2018. Vol. 30. P. 016602.

Научное издание

Рыжов Евгений Андреевич

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук на тему:
Динамика квази-геострофических вихрей при наличии сдвиговых потоков и топографических преград

Подписано в печать Формат 60 × 90 1/16. Тираж 100 экз. Заказ

Отпечатано в ТОИ ДВО РАН

690041, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43