Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичёва Дальневосточного отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Рыжов Евгений Андреевич

Динамика квази-геострофических вихрей при наличии сдвиговых потоков и топографических преград

25.00.28 – Океанология

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Научный консультант
д. ф.-м. н.
Кошель Константин Валентинович

Владивосток – 2019

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Вихревые структуры, наблюдаемые в разнообразных непрерывных средах, в том числе в океане и атмосфере, являются крайне популярными объектами для исследования. Интерес к этим структурам в океанологии обусловлен их важнейшей ролью в формировании мезо- и суб-мезомасштабной динамики океанических потоков. В то же время, современные исследования показывают, что крупномасштабная циркуляция в океане также подвержена существенному влиянию вихревых структур. Дополнительной мотивацией для исследования вихревых структур является то, что они, по-видимому, остаются устойчивыми на обширном интервале масштабов с характерными размерами, равными десяткам и сотням километров, и временами существования, измеряемыми месяцами и даже годами. Статистические методы оценки количества таких структур по спутниковым данным показывают, что одновременно могут существовать десятки тысяч вихревых структур в различных областях Мирового океана. Наблюдаются как локализованные вихри, то есть находящиеся в ограниченной области достаточно длительное время, так и перемещающиеся вихри, преодолевающие сотни и тысячи километров, оставаясь при этом когерентыми и сохраняя свою гидрологическую структуру. Последнее свойство особенно важно, так как посредством таких долгоживущих распространяющихся вихрей осуществляется транспорт вод с определенными характеристиками в области океана со значительно отличающимися свойствами вод. Известно, что изолированные монопольные вихревые структуры, находящиеся в однородном потоке с ровным дном, не перемещаются в пространстве. Чтобы монопольный вихрь начал движение необходимо наличие либо бета-эффекта, либо неоднородностей дна, либо фонового потока, либо вихрь должен образовать с другими вихрями мультипольную структуру. Тогда такие структуры могут формировать самодвижущиеся объекты. Причем расстояния, преодолеваемые подобными вихрями, сильно зависят от направления вращения отдельных вихрей внутри мультиполей. Так, если внутри мультиполя преобладают вихри одинакового направления вращения, то он будет вращаться в относительно локализованной области. Если же общая завихренность мультиполя будет близка к нулю, при этом он будет состоять из достаточно интенсивных вихрей, вращающихся в разные стороны, то можно ожидать, что подобная структура может преодолевать значительные расстояния, двигаясь практически равномерно и прямолинейно. Помимо этого, океанические потоки часто существенно стратифицированы, с ярко выраженной слоистой структурой. Динамика вихревых структур, принадлежащих одному слою, в целом, соответствует аналогичной однослойной (баротропной) конфигурации, однако, если вихри находятся в разных слоях, то их взаимодействие меняет характер. В реальных условиях редко встречаются изолированные вихревые структуры. Чаще всего, вихри испытывают внешнее влияние, которое в линейном приближении моделируются сдвиговым потоком. Наличие сдвигового потока может оказывать значительное влияние на эволюцию вихревых структур. Например, в зависимости от собственной интенсивности и параметров сдвига, вихревая структура, которая без внешних потоков оставалась бы когерентной в некоторой ограниченной области, может начать разрушаться, порождая новые изолированные вихревые структуры, расходящиеся от центра сдвига. Еще одним фактором, существенно влияющим на динамику вихревых структур в океане, является наличие топографических неоднородностей, таких как подводные изолированные возвышенности и искривленная береговая черта. Так, например, большой объем экспериментальных данных подтверждает наличие топографически-захваченных вихрей, то есть областей замкнутой рециркуляции, генерируемых взаимодействием внешнего потока и топографических неоднородностей. Окрестности топографически-захваченных вихрей известны своей высокой биопродуктивностью, так как наличие практически стационарной замкнутой рециркуляции увеличивает концентрацию био- и зоопланктона. Наличие бухт вдоль береговой черты также оказывает значительное влияние на вихревые структуры, движущиеся вдоль них. В некоторых случаях, если вихрь является достаточно интенсивным, он может быть захвачен внутри такой бухты, которая будет играть роль своеобразного потенциального барьера для его траектории. При этом форма бухты будет определять траекторию движения вихря. Помимо собственно динамики вихрей значительный интерес для исследования представляет поведение окружающей жидкости, которая не принадлежит самим вихревым структурам, но при этом может смешиваться с жидкостью внутри вихрей, захватываться и переноситься этими вихрями. Посредством такого смешения происходит обмен водными массами между вихрями и внешними потоками. В рамках диссертационной работы рассматривается ряд теоретических моделей вихревых взаимодействий, описывающих динамику одного или нескольких вихрей внутри баротропных и стратифицированных квази-геострофических потоков при наличии сдвиговых внешних потоков и топографических особенностей.

Цели и задачи диссертационной работы:

Список **целей**:

1. Исследование регулярной и нерегулярной динамики в окрестности топографически-захваченных вихревых структур, индуцируемых взаимодействием потоков с нерегулярностями дна и искривленными границами.

2. Анализ динамики свободных вихревых структур в постоянном и переменном сдвигово-

вращательном потоке.

3. Исследование влияния стратификации потока на поведение свободных и захваченных вихревых структур.

Для достижения поставленных целей были решены следующие **задачи**:

1. Исследование регулярного и нерегулярного переноса пассивной примеси в окрестности топографического вихря в баротропной и многослойной постановках. Определение размера области заведомо регулярного переноса примеси в окрестности интенсивных топографически захваченных вихрей при наличии нестационарных внешних потоков.

2. Определение условий, приводящих к появлению топографических торообразных вихрей в баротропной вращающейся жидкости, анализ стационарной и возмущенной конфигураций.

3. Определение условий, приводящих к локализованному и нелокализованному движению монопольного и дипольного точечных вихрей, движущихся в окрестности подводной преграды в баротропной и бароклинной постановках. Определение характера взаимодействия самодвижущихся вихревых структур с изолированной подводной возвышенностью в случае, когда вихревая структура располагается в одном слое и в случае двухслойной вихревой структуры (хетона).

4. Анализ динамики точечного вихря и сопутствующего переноса пассивной примеси вдоль прямолинейной границы с выемкой в виде сектора окружности. Исследование переноса пассивной примеси в простейшей модели излучения вихрей за цилиндрической преградой (модель Фёппля).

5. Исследование динамики двух точечных вихрей произвольных интенсивностей, испытывающих влияние внешнего деформационного потока, состоящего из линейных сдвиговых и вращательных компонент. Поиск локализованных и нелокализованных режимов движения вихревой системы, а также анализ перемешивания жидких частиц в обоих случаях.

6. Оценка совместного влияния хаотической адвекции и мелкомасштабной турбулентной диффузии на поток жидких частиц из ядра вихря с помощью модели эволюции распределенного эллипсоидального вихря, помещенного в линейный сдвиговый поток.

Научная новизна. Все представленные результаты являлись новыми на момент публикации в рецензируемых журналах.

Показано, что тороидальный топографический вихрь может появляться в неограниченной баротропной жидкости в окрестности симметричной изолированной топографической преграды произвольного кусочно-постоянного профиля.

Баротропная самодвижущаяся вихревая структура при взаимодействии с топорафической преградой может захватываться в окрестностях топографической преграды. Бароклинный самодвижущийся диполь может совершать непредсказуемое количество оборотов вокруг топографической преграды, в то время как захват баротроного диполя является регулярным.

При наличии внешнего вдольберегового течения, изолированный вихрь может быть захвачен округлой выемкой, при этом совершая в ней периодические колебания. Также, в простейшей модели динамики двух вихрей за округлой преградой, показано, что при смещении с их положений равновесия, вихри начинают периодически колебаться. Такое периодическое движение вихрей играет роль периодического возмущения для жидких частиц в их окрестности, в результате жидкие частицы хаотически перемешиваются и переносятся в потоке.

Проанализирована эффективность перехода к хаотическому движению жидких частиц в окрестности двух точечных вихрей произвольных интенсивностей, помещенных в линейный сдвиговый поток в баротропной жидкости на f–плоскости. В случае, если компоненты линейного сдвигового потока и внешнего вращения гармонически меняются с разными амплитудами, показана возможность параметрической неустойчивости, приводящей к смене типа движения двух-вихревой конфигурации.

В задаче эволюции эллипсоидального вихря в бароклинной жидкости с линейным профилем частоты плавучести, помещенного в линейный деформационный поток, проанализировано совместное влияние детерминированной нерегулярной динамики и турбулентной диффузии. Показано, что нерегулярная детерминированная динамика усиливает поток жидких частиц из ядра вихря во внешнюю область, что способствует более быстрой потере завихренности вихревой структурой.Показано, что при наличии вертикальной компоненты диффузии (которая на порядки слабее по сравнению с горизонтальными компонентами), ее влияние сравнимо с влиянием горизонтальных компонент.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, показывают сложность взаимодействия вихревых структур при наличии неоднородных потоков и топографических преград. Результаты имеют, в первую очередь, теоретический характер, демонстрируя типичные динамические картины взаимодействия малого числа изолированных вихрей. Помимо этого, методы, применяемые в работе для описания переноса примеси, могут быть использованы для исследования лагранжевого транспорта в полях скорости, полученных с помощью спутниковой альтиметрии и океанических моделей высокого разрешения.

Методология и методы исследования. В диссертации используется комбинация аналитических и численных методов решения динамический уравнений эволюции вихревых структур. Динамические уравнения описываемых процессов получены в рамках общепринятых подходов: квази-геострофическое приближение для слоистых геофизических потоков, точечные и распределенные вихри в качестве модели изолированных вихревых структур. Используется теория дельта-коррелированных случайных процессов для учета влияния мелкомасштабной диффузии на транспорт пассивной примеси.

Положения, выносимые на защиту:

1. Показано, что тороидальный топографический вихрь может появляться в неограниченной баротропной жидкости в окрестности симметричной изолированной топографической преграды произвольного кусочно-постоянного профиля. В таком вихре, жидкие частицы двигаются по поверхности правильных торов, периодически опускаясь и всплывая в вертикальном направлении.

2. Баротропная самодвижущаяся вихревая структура (вихревой диполь) при взаимодействии с топорафической преградой в неограниченной жидкости без фоновых потоков может совершать два типа движения: (а) нелокализованная динамика – диполь продолжает свое направленное движение после взаимодействия с топографической преградой; (б) локализованная динамика – диполь квази-периодически колеблется вокруг топографической преграды. Бароклинный самодвижущийся диполь (хетон) имеет аналогичные типы движения: локализованное и нелокализованное. Однако показано, что захваченный хетон может совершать непредсказуемое количество оборотов вокруг топографической преграды, в то время как захват баротроного диполя является регулярным.

3. При наличии искривленных границ, изолированные вихри могут быть захвачены в окрестности особенностей границ. При периодическом возмущении внешнего течения, динамика вихрей в окрестности особенностей может быть нерегулярной. В случае, когда вихри захватываются в окрестности особенностей, их колебания могут служить возмущением для движения жидких частиц в их окрестностях, тчо приводит к эффективному перемешиванию.

4. Проанализирована эффективность перехода к хаотическому движению жидких частиц

в окрестности двух точечных вихрей произвольных интенсивностей, помещенных в линейный сдвиговый поток в бароклинной слоистой жидкости на f–плоскости. Показана возможность параметрической неустойчивости, приводящей к смене типа движения двух-вихревой конфигурации, при наличии гармонисечких колебаний сдвигового потока.

5. В задаче эволюции эллипсоидального вихря в бароклинной жидкости с линейным профилем частоты плавучести, помещенного в линейный деформационный поток, проанализировано совместное влияние детерминированной нерегулярной динамики и турбулентной диффузии. Показано, что нерегулярная детерминированная динамика усиливает поток жидких частиц из ядра вихря во внешнюю область, что способствует более быстрой потере завихренности вихревой структурой.Показано, что при наличии вертикальной компоненты диффузии, ее влияние сравнимо с влиянием горизонтальных компонент, что приводит к существенно более интенсивному потоку частиц из ядра вихря.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: "Конференция молодых ученых Тихоокеанского океанологического института"(Владивосток, 2009, 2010, 2011, 2013, 2016), "Потоки и структуры в жидкостях. Физика геосфер"(Москва, 2009; Владивосток, 2011), "2nd Intern. Conf. on the High-Reynolds Number Vortex Interactions"(Брест, Франция, 2009), "European Geosciences Union. General Assembly"(Вена, Австрия, 2010), "23rd International congress of theoretical and applied mechanics"(Пекин, Китай, 2012), "Nonlinear Processes in Oceanic and Atmospheric Flows"(Мадрид, Испания, 2012, 2016), "IUTAM Symposium on Vortex Dynamics: Formation, Structure and Function"(Фукуока, Япония, 2013), "Регулярная и хаотическая гидродинамика"(Ижевск, 2014), "American Physical Society. Division of Fluid Dynamics. 68th Annual Meeting"(Бостон, США, 2015), "IAPSO. 26th General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG)"(Прага, Чехия, 2015), "Dynamics of concentrated vortices"(Новосибирск, 2016), "Dynamical systems and fluids"(Бремен, Германия, 2017), "Vortices and coherent structures: from ocean to microfluids"(Владивосток, 2017), "Комплексные исследования мирового океана"(Москва, 2017), "Vortex Equilibrium and Dynamics in Geophysics"(Рим, Италия, 2018). Неоднократно на семинаре по "Нелинейной динамике"в ТОИ ДВО РАН, семинаре по "Гидродинамике"в Институте водных проблем РАН, отчетной сессии программы Президиума РАН по "Нелинейной динамике"в Институте океанологии РАН.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 34 печатных работах, из них

34 статей в рецензируемых журналах [1–34].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 6 глав, из них первая глава – обзорная, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 222 страниц, из них 184 страницы текста, включая 90 рисунков. Список литературы включает 597 наименований на 38 страницах.

Глава 1

Мезомасштабные вихри в океане. Подходы к исследованию лагранжевой динамики

Основная тема настоящей работы – изучение взаимодействия изолированных вихрей между собой, с фоновыми потоками и с неоднородностями рельефа в рамках квази-геострофических моделей. Предполагается, что вихри, описываемые такими моделями, являются устойчивыми когерентными структурами. В данной главе будут представлены основные подходы теоретического исследования таких структур, начиная от анализа большого объема данных спутниковых наблюдений и заканчивая моделями одиночных изолированных вихрей. Общей чертой всех рассматриваемых задач является то, что они, в своей основе, опираются на отслеживание траекторий определенных характеристик потока, то есть являются лагранжевыми. Данный подход получил широкое распространение в последнее время благодаря резко увеличившимся вычислительным возможностями численного моделирования, а также большому количеству данных спутникового мониторинга. В результате появилась возможность вычислять в моделях конкретные траектории индивидуальных объемов жидкости. При этом дальнейший анализ полученных нестационарных траекторий проводится с помощью методов теории динамических систем. Подробные обзоры современного состояния исследований динамики океана с помощью подобных методов можно найти в обзорах [35–41]. Сравнение различных методов для определения гиперболических областей в потоках, заданных на конечных временах, приводится в работах [42, 43].

Лагранжев подход также является привлекательным для исследования динамики когерентных океанических структур в связи с тем, что широкое распространения получили различные дрифтеры, чье положение в пространстве отслеживается практически в реальном времени. Важным выводом, получаемым в результате анализа таких дрифтеров, является то, что океанические потоки могут быть, как достаточно регулярными, так и нерегулярными. При этом, методы теории динамических систем дают возможность определить индикаторы, правдоподобно описывающие динамику одиночного дрифтера.

В одной из ранних работ [44] анализируются траектории всего трех буев, находящихся в Тихом океане и отслеживаемых через спутник в течении одного года. Оценивается колмогоровская энтропия и корреляционная размерность. Используя стандартные методы теории динамических систем, авторы показывают, что траектории данных буев имеют фрактальную структуру в физической плоскости. При этом, авторы указывают, что такие траектории могут с большой вероятностью появляться в турбулентных системах, т.е. системах с большим числом степеней свободы. Однако, в том числе возможен случай, когда подобные траектории наблюдаются в детерминированных системах с малым числом степеней свободы. А наличие подобных траекторий обуславливается существованием странных аттракторов.

В современных работах рассматривается значительно большее число дрифтеров. В 2012 году был проведен специальный эксперимент (GLAD – Grand Lagrangian Deployment) именно с целью обнаружения структур, характерных для детерминированной нерегулярной динамики [45, 46]. В рамках эксперимента 295 дрифтеров были размещены в северо-восточной части Мексиканского залива в июле 2012 года.

Анализируя результаты эксперимента с помощью геометрических методов выделения лагранжевых когерентных структур, авторы работы [45] показали, что материальные гиперболические линии, выделяемые в поле скорости, полученном по данным альтиметрии, накладывают существенные ограничения на движение дрифтеров. Авторы указывают на то, что выделенные когерентные структуры концентрируют в себе дрифтеры. В частности, за неделю до размещения дрифтеров, в области разлива нефти с платформы "Deepwater Horizon"образовался материальный филамент специфической формы. С течением времени форма разлива нефти стала соответствовать структуре данного филамента. Более подробный анализ геометрии разлива нефти, ее связь с формой лагранжевых когерентных структур приведен в работе [47].

Метод, основанный на теории когерентных множеств, применяется в работе [48] для анализа траектории движения ринга, оторвавшегося от течения Агульяс. Когерентные множества в данном случае являются областями в жидкости, через которые протекает наименьшее количество жидкости, т.е. они являются естественными барьерами для адвекции жидких частиц. С помощью представленного метода, авторы отслеживают эволюцию ринга и его постепенное разрушение в течении двух лет.

Комплексный анализ, включающий в себя численное моделирование и экспериментальные наблюдения, мезомасштабных и суб-мезомасштабных физических процессов на западном континентальном шельфе в Лионской бухте в северо-западной части Средиземного моря проводился в рамках проекта LATEX (Lagrangian Transport Experiment) [49–53]. В рамках проекта изучались мезомасштабные вихри, вырабатывались стратегии их идентификации в сложным полях скорости, а также оценивались параметры горизонтального перемешивания, вызванного вихревой динамикой.

Вообще, в связи с увеличивающимся количеством различных дрифтеров, лагранжевы методы выделения когерентных структур и анализа их динамики в океане становятся все более востребованными. Примерами могут служить работы [54–56], в которых рассматривается распространение радиоактивной жидкости после аварии на атомной электростанции Фукусима в Японии в 2011 году. Авторы [57] сопоставляют траектории дрифтеров с положением лагранжевых когерентных структур, восстановленных в поле скорости, полученном по данным радаров, в бухте Монтерей в Калифорнии. Авторы подтверждают, что дальнейшее поведение дрифтеров лучше предсказывается с помощью лагранжевых когерентных структур, чем непосредственным анализом поля скорости и данных о течениях. В работе [58] сравниваются траектории 80 поверхностных дрифтеров, выпущенных в одном из заливов Массачусетса в США, с данными трех высокочастотных радаров, установленных на побережье. В результате авторы сравнивают, полученное по данным с радаров, эйлерово поле скорости с лагранжевыми траекториями дрифтеров. В аналогичной работе [59] оценивается лагранжев перенос в Лигурийском течении в северо-западной части Средиземного моря с помощью данных радаров, дрифтеров, а так же с привлечением численной модели циркуляции. Обзор современного состояния дан в работе [60].

За пределами обзора остаются работы, посвященные натурным измерениям характеристик вихревых структур. Далее рассмотрим различные подходы задания полей скорости, в которых присутствуют вихревые структуры.

1.1. Поля скорости, полученные из данных спутниковой альтиметрии

Благодаря резкому увеличению объема и качества данных спутникового мониторинга поверхности океана, появилось множество работ по анализу количества и характеристик вихревых структур как во всем океане, так и в его регионах. Эти работы подтверждают, что количество подобных когерентных структур, которые надежно определяются из данных спутниковых наблюдений, огромно. При этом, даются общие оценки динамики ансамблей таких вихрей без объяснения детальной эволюции каждого из них. То есть, информации, полученной по данным спутникового мониторинга, зачастую недостаточно для предсказания эволюции конкретной вихревой структуры. В этом случае, необходимо использовать модели изолированных вихрей. В то же время, анализ глобальной вихревой динамики с помощью данных спутниковых наблюдений, позволяет оценить ее вклад в общую циркуляцию океанов.

Авторы одной из самых цитируемых работ последнего времени [61] проанализировали десятилетние данные высоты поверхности океана на предмет вклада мезомасштабной изменчивости в общую энергетику океанических потоков. По их методике вклад вихревых структур с с амплитудами 5–25 см и диаметром 100–200 км составил более 50 процентов. Наблюдаемые вихри распространяются практически строго на запад примерно на скорости бездисперсных волн Россби, причем циклонические вихри имеют тенденцию к отклонению к полюсам, в то время как антициклоны – к экватору. Так же указывается, что подавляющее большинство этих вихрей являются нелинейными, что отличает их от линейных волн Россби. Алгоритм восстановления замкнутого контура вихря и его траектории основан на вычислении параметра Окубо–Вайсса [62]. Количество отслеживаемых вихрей в результате оказалось около 112000. 45 процентов из них отслеживались менее 3 недель. Авторами также отмечается, что нет заметной разницы между количеством циклонических и антициклонических вихревых структур с временем жизни более 4 недель, которые достоверно выделяются с помощью их методики (31120 и 30898, соответственно). В тоже время на региональном уровне диспропорция между циклоническими и антициклоническими вихревыми структурами может быть существенной. Авторы указывают, что, в соответствии с выбранным критерием, средний размер вихревых структур равен ~ 200 км в изобилующих вихрями низких и средних широтах и ~ 100 км в высоких широтах. 83 процента отслеживаемых вихрей оказались нелинейными с параметром нелинейности от 1 до 4. В заключении авторы указывают, что определение доли изменчивости высоты поверхности океана, принадлежащей когерентным вихрям, достаточно субъективно, так как граница когерентного вихря в таком случае определяется не точно, а, иногда, вовсе неверно. В тоже время, данная работа явно указывает на чрезвычайно большой вклад мезомасштабных когерентных структур в общую изменчивость океанических потоков.

В статье [63], развивающей идеи работы [61], используются 16–летние данные отклонения уровня поверхности океана. Ограничиваясь анализом вихревых структур с временем жизни не менее 16 недель, авторы определяют 35891 вихрей с диаметром больше 100 км. Делается интересное наблюдение, что циклонических вихрей наблюдается немного больше, но в то же время среди долгоживущих вихрей, распространяющихся на большие дистанции, небольшой перевес в сторону антициклонических вихрей. Как и в предыдущем исследовании, большинство вихрей оказываются сильно нелинейными, что говорит о том, что такие вихри крайне эффективно переносят жидкость и примесь в ней на значительные расстояния. Та же группа авторов продолжает анализировать 10–летние данные спутниковых наблюдений уровня поверхности океана, сравнивая его с данными по изменчивости хлорофилла, в работе [64]. Обнаружено, что влияние мезомасштабных вихрей на концентрацию хлорофилла крайне велико, а на масштабах в 2–3 недели является определяющим.

В работе [65] используется смешанный подход, состоящий из анализа поля скорости, полученного с помощью данных альтиметрии, и траекторий буев Арго, для определения сигнатур, которые оставляют глубоководные средиземноморские линзы на поверхности. Перемещаясь внутри водного столба, такие вихри меняют формы изопикн, в результате в верхнем слое жидкости образуется поле отрицательной потенциальной завихренности. Анализ показал, что при образовании или ускорении вихря, может образовываться положительная завихренность, однако, в большинстве случаев, за таким вихрем следует отрицательная завихренность на поверхности. Используя теорию геострофического баланса, авторы получают аналитические оценки интенсивности поверхностного сигнала, который генерируется глубоководными вихрями. Отмечено, что сигнал существенно зависит от стратификации поверхностного слоя океана.

В работе [66] оценивается вклад мезомасштабных вихрей в общий горизонтальный перенос различных характеристик, таких как тепло, соленость, пресная вода, растворенный углекислый газ. Оценивается именно перенос таких характеристик индивидуальными вихревыми образованиями. Используя данные спутниковой альтиметрии и данные с буев Арго, авторы показывают, что индуцированный вихрями зональный транспорт массы, проинтегрированный по меридиональному направлению, может достигать значение 30–40 $\cdot 10^6$ м^{3}с$^{-1}$. Такой поток сравним по порядку величины с потоком, создаваемым крупно-масштабной циркуляцией, которая, с вою очередь, появляется за счет ветрового воздействия. Аналогичный подход используется в работе [67]

Классификация мезомасштабных вихревых структур в Южном океане проводится в работе [68]. Для этого авторы используют спутниковые данные уровня и температуры поверхности океана, а также данные дрифтеров. За период с 1997 по 2010 годы, авторы выделяют более миллиона мезомасшатбных вихревых структур, причем авторам удалось отследить поведение около 100 тысяч из них на протяжении одного месяца и более. Авторы указывают, что выделенные вихревые образования могут достигать глубин до 2 км, и, что вид профилей температуры и солености усредненного вихревого образования, наводит на мысль, что такое усредненное вихревое образование захватывает окружающую жидкость в своем ядре, а также индуцирует перемешивание в своей окрестности.

Работ, аналогичных рассмотренным, но касающихся определенной области океана, в последнее время появляется все больше. Укажем некоторые из них [69–73].

В тоже время, во всех указанных работах отмечается, что процесс определения размера и положения вихря является достаточно субъективным и может давать существенно различные результаты в зависимости от вида критерия автоматического выделения вихревой структуры. Поэтому исследователи пытаются, помимо исключительного использования большого количества данных, включить в свои алгоритмы физические подходы и методы, применяемые в теории динамических систем. В результате получаются гибридные методы, основанные на хорошо изученных простых моделях изолированных вихрей. Примером такой работы служит [74]. Авторы берут за основу понятия из теории стационарных динамических систем, чтобы определить неподвижные точки в поле скоростей, полученных по данным альтиметрии. Далее, предполагая медленные изменения характеристик потока, авторы отслеживают положения данных стационарных точек для последовательных промежутков времени. Радиус вихря при этом определяется как расстояние между таким образом определенным центром вихря и ближайшей гиперболической стационарной точкой. Несмотря на то, что метод, очевидно, может применяться только для почти стационарных потоков, авторы показывают, что для некоторых областей океана, результаты по определению и отслеживанию вихрей являются приемлемыми.

Аналогичный подход представлен в работах [75–77] для анализа транспортных свойств вихревых структур, распространяющихся в Японском и Охотском морях. Центры вихрей определяются как стационарные эллиптические точки в мгновенном поле скорости в конкретный момент времени. В тоже время, данное исследование дополнено анализом различных лагранжевых характеристикам, который показывает качественное согласование с положениями найденных эллиптических точек.

В последнее время появляются работы, где, используя данные спутниковых наблюдений возвышения поверхности океана, предпринимаются попытки восстановить, хотя бы в квазигеострофическом приближении, поле скорости в подповерхностном слое. Данное направление также крайне важно, так как общеизвестно, что существуют глубоководные долгоживущие вихри, чье влияние на поверхностную динамику может быть существенным.

Авторы работы [78] разрабатывают метод для экстраполяции данных спутниковых наблюдений поверхностной плотности и уровня в глубину. Для этого устанавливается связь с приповерхностными полями с помощью соотношений, применяемых в рамках квази-геострофического приближения. Приповерхностные поля дополняются за счет баротропной и первых бароклинных мод. Данный метод тестируется на примере трех областей в Северной Атлантике с использованием данных моделирования с высоким разрешением. В частности, указывается, что метод крайне эффективен в высокоэнергетичных районах продолжения Гольфстрима и в высоких широтах с глубоким перемешанным слоем. В тоже время, в менее энергичных районах восточных субтропиков, метод так же дает допустимые оценки. Данная работа представляет хороший вариант симбиоза между анализом большого массива данных, полученных с помощью спутниковых измерений или моделирования, и идей, развитых для упрощенным моделей эволюции вихревых структур.

1.2. Поля скорости, полученные с помощью вихреразрешающих моделей циркуляции

Помимо данных спутниковых наблюдений, поля скоростей, изобилующие мезомасштабными вихревыми структурами, можно получать с помощью современных моделей общей циркуляции отдельных водоемов и океана в целом. Преимуществом такого подхода является то, что поле скорости задается во всех узлах сетки изначально без необходимости проводить процедуру интерполяции. Так же важным фактором является то, что, помимо горизонтальных скоростей, в моделях также определяются и вертикальные скорости, т.е. появляется возможность изучать пространственную изменчивость когерентных вихревых структур.

В работе [79] с помощью методов теории динамических систем анализируется циркуляция вод в Южном океана. Поле скорости для данного анализа получено из модели глобальной океанической циркуляции. Авторы приводят пересечения индивидуальных траекторий, опоясывающих Антарктику, с вертикальной плоскостью пролива Дрейка. Таким образом, получая сечения Пуанкаре, т.е. положение траекторий через определенный период во времени или пространстве. Анализируя данные сечения, авторы указывают на разительные отличия регулярных траекторий, принадлежащих центральной области Антарктического циркумполярного течения, и хаотических траекторий из соседних областей.

Комбинированный подход используется авторами работы [80] для изучения свойств вихревых структур в Калифорнийском течении. Авторы используют данные спутниковых наблюдений а также поле скорости, вычисленное с помощью региональной модели океанической циркуляции (Regional Ocean Modelling Systems (ROMS)) [81]. Авторам удалось добиться хорошего соответствия между результатами обоих подходов. Большинство выделенных вихрей имели размеры от 25 до 100 км. Благодаря влиянию β-эффекта многие вихри двигались в западном направлении со скоростями около 2 км/ч. Указывается, что наиболее долгоживущими оказались циклонические вихри. Большинство выделенных вихрей имеют жизненный цикл не более одного сезона. Ядра вихрей достигают глубин в 800–1000 м. и имеют сложную вертикальную структуру. Многие вихри определены как сильно нелинейные и поэтому могут переносить значительные объемы жидкости, обеспечивая интенсивный водообмен.

Аналогичный комплексный подход применяется в работе [82] для выявления механизмов генерации мезомасштабных вихревых структур в Лионском заливе в Средиземном море.

Используются данные высокочастотных радаров и численная модель региональной циркуляции [83]. Особое внимание уделено анализу влияния ветрового форсинга на зарождение вихревых структур. Показано, что ветровой форсинг является важнейшим фактором для двух различных механизмов генерации: сильный северный ветер индуцирует завихренность, которая становится заметна после ослабления ветра; южный ветер генерирует антициклонический вихрь, который отрывается от побережья.

В работах [84, 85] с помощью модели динамики океана Института вычислительной математики РАН рассчитывались сценарии распространения примесей в областях с сильным вихревым влиянием: в области загрязнения с АЭС Фукусима и прилегающего района продолжения Куросио, а также в области Большого Сочи в Черном море, соответственно. Авторы показали, что вихревая динамика играет определяющую роль в эволюции примеси в данных областях. Помимо этого указывается, что важную роль играет трехмерная структура вихрей. То есть, учет вертикальной стратификации существенен для такого типа задач.

С помощью вихреразрешающей модели океана проводится оценка количества Средиземноморских вихрей (Meddies), попадающих в Атлантический океан [86]. В работе показано, что вихри, которые существуют в виде когерентных структур более 90 дней, появляются с частотой 12 штук в год, причем 12 процентов от этого числа являются циклоническими. Если рассматривать вихри, существующие, более 15 дней, то частота появления увеличивается до 40 штук в год с 30 процентами циклонов. По мере движения вихрей от места зарождения, их радиус обычно увеличивается с 15 до 30 км. Средние аномалии температуры и солености меньше для циклонов, которые также медленней вращаются, менее глубоки и более узки по сравнению с антициклонами. Тем не менее, циклоны проще выделяются и отслеживаются на глубине в 600 м. Наиболее продолжительные траектории движения также зарегистрированы для циклонов.

Различные лагранжевы характеристики вычисляются в работе [87] для анализа движения вод в заливе Петра Великого Японского моря. Поле скорости, для которого вычисляются данные характеристики получено с помощью прогностической численной модели циркуляции синоптического масштаба. В полученном поле скорости наблюдаются вихревые когерентные структуры, которые оказывают существенное влияние на движение водных масс в данной области.

Несмотря на растущие вычислительные мощности, разрешить все масштабы, которые влияют на поведение отдельного лагранжевого трассера не представляется возможным, поэтому нужны различные методы интерполирования и аппроксимации. Авторы работы [88] анализируют влияние сглаживания эйлеровых полей скорости на предсказуемость движения лагранжевых трассеров. Поле скорости в данном случае генерируется с помощью квази-геострофической модели, разрешающей множество турбулентных масштабов. Результаты анализа показывают, что сглаживание существенно влияет на траектории трассеров. Далее результаты сравниваются со стохастической моделью адвекции частиц [89, 90], в которой отсутствуют выделенные когерентные структуры. Показано, что наличие когерентных структур в квази-геострофической модели является важнейшим фактором, влияющим на эволюцию лагранжевых трассеров.

Метод, предложенный в работе [78] в рамках квази-геострофического приближения для получения подповерхностных полей скорости с помощью данных поверхностной плавучести и высоты уровня, развивается с помощью введения вспомогательных аналитических решений для параметризации вертикальной скорости. Одно из решений включает в себя экспоненциальную стратификацию, второе – слабо стратифицированный поверхностный слой для параметризации перемешанного слоя. Данные модификации исходного метода сравниваются с полями скорости, полученными посредством численного моделирования Северной Атлантики. Авторы показывают, что простое экспоненциальное решение дает реалистичные подповерхностные поля скорости и плотности вплоть до глубины в 1000 м. Добавление аналитической параметризации для приповерхностного перемешанного слоя улучшает оценку в высоких широтах, где перемешанный слой глубже. Авторы указывают на то, что именно в перемешанном слое наиболее применим подход, использующий поверхностное квази-геострофическое приближение. Ниже этого слоя доминирует первая бароклинная мода, которая хорошо аппроксимируется аналитическим решением с экспоненциальной стратификацией.

Численная модель MITgcm [91] адаптирована для анализа трехмерной структуры перемешанного слоя в работе [92]. Анализ проводится с помощью выделения трехмерных когерентных структур и анализа их временной и пространственной изменчивости.

Важным аспектом моделирования циркуляции реальных водоемов – является параметризация влияния на нее вихрей. В работе [93] вводится параметризация, основанная на учете поглощения крупномасштабной потенциальной энергии за счет симулирования генерации вихрей неустойчивостью океанических течений. Такой путь поглощения энергии отсутствует в адиабатических моделях, не допускающих формирование мезомасштабных вихревых образований.

1.3. Динамические модели изолированных вихрей

Несмотря на огромный объем информации, доступный через спутниковые наблюдения, общие закономерности динамики изолированных вихрей изучаются с помощью упрощенных динамических моделей. Такие модели позволяют ограничить набор факторов, влияющих на динамику вихрей, и далее уже проанализировать возможный вклад каждого из них. Преимуществом анализа небольшого набора факторов является то, что влияние каждого из них, как правило, заметно выделяется в модели. Данная работа посвящена изучению именно таких моделей вихревых структур.

Эффективность многих концептуальных характеристик, применяемых для анализа сложных нелинейных геофизических потоков, сначала проверяется на простых моделях. Одной из самых известных является модель двойного круговорота (Double-Gyre Ocean Model). В данной модели генерируется два стационарных круговорота внутри прямоугольного бассейна. На границе соприкосновения этих двух круговоротов образуются неустойчивости, приводящие к появлению сложной структуры материальных линий. Так в работе [94] введена характеристика лагранжевого переноса – конечно-временные инвариантные многообразия. Данная характеристика основана на геометрической интерпретации формы материальных линий в потоке. Данные множества опоясывают когерентные структуры, таким образом выделяя их из общего потока. В работе [95] данная характеристика применяется для баротропной вихреразрешающей модели двух круговоротов и прослеживается эволюция вихревых образований. Применение метода для турбулентного потока рассматривается в работе [96]. Хаотический перенос примеси из одного круговорота в другой анализируется в работе [97].

Возможные аналитические решения для уравнений динамики изолированных квази-геострофических вихрей на β – плоскости обсуждаются в обзорах [98–105]. Известным свойством такого движения является то, что такой вихрь двигается с постоянной скоростью вдоль линии постоянной широты [106]. Аналитические оценки для сингулярных точечных вихрей на β – плоскости даны в работах [107–112]. Движение распределенного вихря в баротропной постановке на β – плоскости при наличии внешнего поля рассматривается аналитически в работе [113]. Аналитические решения для изолированного гауссового вихря в баротропной постановке получены в работах [114, 115]. Движение изолированного вихря в поле волны Россби проанализировано в работе [116].

Траектория движения сингулярного вихря, помещенного в нелинейное сдвиговое поле с малым значением завихренности, анализируется в работе [117].

Модели многослойных квази-геострофических потоков, в которых распространяются вихревые структуры, подробно рассмотрены в книге [118] (и ее английский дополненный перевод [119]). Обзор работ, посвященных эволюции сингулярных квази-геострофических вихрей в многослойных моделях приведен в работе [104]. Общие методы построения моделей эволюции бароклинных сингулярных вихрей в квази-геострофическом приближении были заложены в работах [109, 120, 121]. Динамика интенсивных распределенных вихрей в многослойной постановке рассматривается в работах [122, 123]. Анализируется само-индуцируемое движение вихрей на β – плоскости. Показано, что наряду с баротропными эффектами, важную роль в эволюцию бароклинного вихря начинает играть его вертикальный наклон. Хаотическая динамика вихрей в N-слойной постановке анализируется в работе [124].

В работе [125] с помощью сингулярных вихрей моделируется взаимодействие двух поверхностных антициклонических вихрей на β - плоскости. Определены положения равновесия, при котором оба вихря двигаются в одном и том же южном или западном направлении, при этом оставаясь на одном и том же расстоянии друг от друга в зональном направлении. Указывается, что, по сравнению с меридиональным дрифтом изолированного антициклона, два взаимодействующих антициклонических вихря могут двигаться в меридиональном направлении с существенно отличающейся скоростью.

Также интерес представляет динамика компенсированного вихря, чьи полюсы вращения располагаются на разных горизонтах по глубине (так называемый, *хетон* [126]) при различных внешних условиях и при взаимодействии с другими структурами. Такая структура отличается тем, что она транслирует себя на произвольные расстояния, как и баротропная вихревая пара. Однако отличие заключается в том, что для наблюдателя на поверхности виден только один вихрь с определенным направлением вращения. Различные режимы движения такой структуры рассматриваются в работах [127–151]. Применимость модели эволюции хетона для задачи конвекции рассматривается в работах [152–155].

В работах [156, 157] рассматриваются двухслойный и трехслойный компенсированные вихри (т.е. вихри, состоящие из разнонаправленных одинаково-интенсивных вихрей, находящихся в разных слоях). Указывается, что несмотря на то, что такие структуры являются сильно неустойчивыми и даже при малом возмущении формы распадаются на несколько частей, дополнительные условия, такие как наличие промежуточного слоя или сильно различающиеся параметры слоев двухслойной жидкости, могут приводить к усилению устойчивости, что и наблюдается в реальном океане. В работах [158–160] приведены аналитические и численные оценки для эволюции модонов [161] в двухслойной жидкости на β – плоскости при наличии континентального склона. Аналитическая теория взаимодействия изолированных вихрей с зональной волной Россби в квази-геострофическом приближении представлена в работе [162].

В работе [163] в рамках теории сингулярных бароклинных вихрей анализируется горизонтальный перенос пассивной примеси, индуцируемый одиночным сингулярным точечным вихрем, находящимся в поле баротропного сдвигового потока. Взаимодействие двух сингулярных вихрей в бароклинной постановке при наличии сдвиговых внешних потоков изучается в работе [164]. В этой же работе проводится качественное сравнение расчетных траекторий вихрей с данными наблюдений движения двух тропических циклонов. Аналогичная постановка рассмотрена в работе [165]. В работах [166–173] исследуется перенос примеси, индуцируемый взаимодействием фиксированного сингулярного вихря, играющего роль изолированной топографической преграды, с переменным плоским проточным течением. Перенос пассивной примеси в задаче о взаимодействии слабовозмущенной четырехвихревой системы рассматривается в работах [174–176]. Анализируются нестационарные картины эволюции ансамблей пассивных примесей. С помощью модели геострофических сингулярных вихрей строится конфигурация вихревой дорожки фон Кармана на β – плоскости.

Приложение теории сингулярных геострофических вихрей к задачам эволюции вихревых образований вблизи границ рассматривается в работах [177, 178]. Модель отрыва завихренности от границы и ее последовательную концентрацию в виде локализованных вихревых образований анализируют в работе [178]. Получено качественное согласование результатов моделирования с данными наблюдений вихрей, оторвавшихся от вдольбереговых течений Агульяс, Калифорнийского подводного течения и Канарского вихревого коридора.

Развитие теории эволюции точечных вихрей в ограниченных областях неканонических форм на случай вращающейся жидкости приводится в работе [179].

Динамика взаимодействия изолированного вихря и сдвигового внешнего потока исследуется в работе [180] с помощью модели точечного вихря и эквивалентной модели контурной динамики в баротропной постановке. Рассматривается случай простого сдвига скорости с ярко-выраженной границей между циклонической и антициклонической частью. В работе указывается, что вихрь может значительно искажать границу раздела сдвигового потока. Возможны случаи "наматывания"границы раздела в соответствии с вращением вихря. Обобщение задачи на случай движения изолированного вихря в окрестности границы раздела жидкости с неоднородной завихренностью на сферической невращательной поверхности приводится в работе [181]. Случай движения цепочки вихрей анализируется в работе [182]. Динамика точечного вихря под воздействием сдвигового потока, индуцированного наличием жесткой границы, изучается в работах [183, 184].

Аналитические модели прямолинейного и осциллирующего движения локализованного вихревого образования, с границей в виде окружности, не меняющейся в процессе движения, предлагаются в работах [185, 186]. В данных моделях учитывается наличие континентального склона, который индуцирует движения вихря на глубину. В то же время, данное движение на глубину по склону балансируется наличием вращения. В результате модель демонстрирует возможность движения глубоководного вихря по прямолинейной или осциллирующей траектории вдоль континентального склона. Усложненная модель, учитывающая поток частиц из вихря во внешнюю среду и обратно, предлагается в работе [187].

Другим важным направлением исследований является анализ устойчивости различных моделей распределенных вихрей. В данном случае подразумевается устойчивость формы вихря к симметричным и асимметричным возмущениям, приложенным к явно выраженной границе вихря. В этом ключе рассматриваются различные приближения гауссового вихря, который не имеет четкой границы. Примером таких приближений являются вихрь Ранкина, диполь Чаплыгина-Ламба, сферический вихрь Хилла, вся завихренность которых ограниченна в некой компактной двухмерной или трехмерной областях. Примерами несимметричных компактных вихрей являются эллиптические вихри Кирхгофа и Кида, обобщение на линейно стратифицированную среду – эллипсоидальный вихрь. Примерами работ, рассматривающих устойчивость границ таких структур к различным возмущениями, служат: [188–197], где рассматривается устойчивость вихря Ранкина; [198] – исследование устойчивости вихря Хилла; [189, 199–202] – исследование устойчивости границы эллиптического вихря. Влияние различных внешних возмущений на динамику эллиптического вихря рассматривается в работах [203–213]. Динамика жидких частиц, возмущенная нестационарным движением эллиптических вихрей, анализируется в работах [214–216].

Помимо устойчивости формы изолированных распределенных вихрей интерес представляет изучение устойчивости много-вихревых систем, т.е. определение возможных конфигураций вихрей, при которых все вихри остаются в локализованной области (для случая точечных вихрей) или находятся в относительном равновесии (для случая распределенных вихрей, которые могут разрушаться). Примерами служат работы [138, 217–228, 228–235].

Другим важным направлением, в котором активно используется модель точечных вихрей, является исследование статистики ансамбля точечных вихрей, как простейшей дискретной модели турбулентного потока. Идея представления сложного много-масштабного гидродинамического потока ансамблем дискретных точечных вихрей разных интенсивностей принадлежит Л. Онзагеру [236]. Отметим, некоторые работы по данному направлению. Сравнение прямых методов моделирования уравнения Эйлера с моделью динамики ансамбля точечных вихрей проведено в работе [237]. В работе [238] показано, что системы точечных вихрей, состоящих из 100 вихрей демонстрируют двойственную динамику. С одной стороны – это низкоразмерная динамика вихревых диполей, с другой стороны – высокоразмерная динамика, характерная для традиционных стохастических систем. В работе [239] рассматриваются стохастические возмущения ансамбля точечных вихрей. Авторы показывают, что при наличии стохастических возмущений, вихри могут кластеризовываться. Причем положения и размер кластеров будет коррелировать с начальным распределением вихрей. В работе [240] используется модифицированная модель точечных вихрей, которая учитывает возможность слияния вихрей. Статистический анализ ансамбля случайно расположенных точечных вихрей проводится в работах [241–248]. Статистические особенности поведения ансамбля точечных вихрей на сфере анализируются в работах [226, 249–252].

Большинство результатов настоящей работы получено с помощью модели точечных (сингулярных) вихрей. Данная модель показала свою эффективность при анализе сложных вихревых конфигураций. В рамках геофизической гидродинамики ее применение оправдано на мезо- и синоптических масштабах явлений [104, 105, 120, 134, 139, 140, 253–255], когда возможно пренебречь мелкомасштабными процессами. Так же необходимо, чтобы исследуемые структуры сохраняли свою когерентность на рассматриваемых временах. Таким образом, если удается выделить взаимодействующие вихри как когерентные структуры на протяжении всего взаимодействия, то модель точечных вихрей является простейшим подходом, дающим достоверные оценки динамики соответствующих реальных объектов. В тоже время, при слиянии и разрушении когерентных вихревых структур, модель изолированных точечных вихрей перестает быть применимой.

1.4. Модели переноса и перемешивания жидких частиц, индуцируемые струйными течениями и волнами

Многие эффекты вихревой динамики, связанные с переносом жидкости, так же наблюдаются в моделях струйных течений и волн Россби. Приведем ряд известных работ.

В работах [256, 257] приводится аналогия между волнами Россби и когерентными вихревыми образованиями. Указывается, что при больших амплитудах вол Россби в окрестности критических точек могут образовываться семейства областей замкнутой рециркуляции, которые можно рассматривать, как взаимодействующие вихри. Анализ появления нерегулярной динамики в сдвиговых зональных течениях на β - плоскости приведен в работе [258]. Обзор теоретических и экспериментальных работ по динамике в квази-двумерных вязких сдвиговых потоках приведен в статье [259].

Работы [260–265] рассматривают переход от регулярной динамики к нерегулярной в задачах переноса пассивных маркеров в волнах Россби на фоне сдвиговых потоков. Анализируются стационарные фазовые портреты, в которых возможны пересоединения сепаратрис [266]. Используя методы из теории нелинейного резонанса [267], приводятся аналитические оценки для разрушения транспортных барьеров внутри волн Россби и, следовательно, появление хаотического переноса примеси через данные барьеры. В работе [268] используется теория интеграла Мельникова [269, 270] для оценки размеров области, подверженной сепаратрисному хаосу. Продемонстрировано, что характеристики переноса жидких частиц сильно зависят от частоты колебаний меандрирующего потока. В качестве приложения модели, а втором указывается, что интенсивные струйные течения, такие как Гольфстрим, могут играть роль как барьеров для адвекции водных масс, так и источников перемешивания для них. В частности, модель указывает на то, что интенсивное перемешивание возможно по бокам струйного течения, где оно взаимодействует с периферийными бегущими волнами, в то же время центральная часть струи выступает в роли барьера для адвекции. Сравнение лагранжевых и эйлеровых идентификаторов хаотического поведения возмущенных сдвиговых потоков проводится в работах [271, 272].

Эволюция крупномасштабных вихревых структур при наличии сдвига скорости, обусловленного, например, наличием двигающихся границ (случай течения Куэтта), исследуется теоретически с помощью гамильтоного формализма в работе [273].

Исследование процесса взаимодействия изолированного гауссового вихря со струйным течением на примере простой кинематической модели приводится в работе [274]. Обнаружен, что такое взимодействие может приводить к появлению поперечного транспорта жидких частиц в струе. Так же показано, что траектории жидких частиц, вовлеченных в поперечный транспорт могут быть как хаотическими так и регулярными. Чем ближе жидкая частицы располагается к центру вихря, тем более регулярной будет выглядеть ее траектория.

Перенос и перемешивание жидких частиц в модели модулируемых бегущих волн в бинарной нагреваемой среде изучается в работах [275, 276]. Показано наличие трех характерных областей в физическом пространстве. Первая область, область волны, в которой частицы захватываются и переносятся вместе с ней. Вторая область – проточная, там где частицы не захватываются волной и, следовательно, не переносятся ей. А также третья область – сепаратрисная область, в которой частицы хаотическим образом захватываются или, наоборот, высвобождаются из волны.

В работах [277–283] разрабатываются методики определения барьеров для горизонтального переноса жидких частиц в возмущенном меандрирующем зональном потоке. Исследуются различные режимы, отличающиеся видом фазового портрета, а также механизмы разрушения стационарных барьеров при наличии возмущений. Приложение теории слабовозмущенных гамильтоновых систем для анализа переноса частиц через стратосферный полярный атмосферный круговорот рассмотрено в работе [284]. Динамическая модель бароклинного меандрирующего потока анализируется в работах [285, 286].

Исследование неустойчивости в простых кинематических моделях симметричных вихрей Тейлора между двумя бесконечными вращающимися концентрическими цилиндрами приводится в работах [287–289]. Анализируется влияние аномальной диффузии, вызванной разрушением сепаратрис стационарного потока, на транспортные свойства модели. Более сложная динамическая модель бесконечной цепочки вихрей Тейлора анализируется в работах [290, 291].

Глава 2

Горизонтальный и вертикальный перенос жидких частиц в моделях топографических вихрей

2.1. Модель тороидальных областей рециркуляции над изолированными топографическими преградами

Топографические вихри, появляющиеся над изолированными топографическими преградами в океане и атмосфере благодаря вращению Земли, представляют значительный интерес для исследования [292–297]. Считается, что в океане такие вихревые структуры могут достигать десятков и сотен километров в диаметре. Из-за того, что горизонтальный масштаб явления существенно превосходят вертикальный масштаб, обычно такие вихревые структуры рассматриваются как квази-двумерные. С помощью квази-геострофического приближения удается подробно исследовать устойчивость таких структур к различным возмущениям [137, 298–300].

С другой стороны в данном приближении не учитывается вертикальный перенос жидких частиц внутри подобных структур. В тоже время часто наблюдаются интенсивные вертикальные движения в окрестности топографических особенностей в океане [301–310]. Таким образом, для исследования вертикального перемешивания необходимо учитывать наличие малых вертикальных скоростей. В данной главе обобщается математическая модель, предложенная в работах [296, 297], для оценки вертикальных скоростей, появляющихся в окрестности изолированного цилиндрического препятствия. В оригинальной постановке, модель использовала теорию Тэйлора-Куэтта для вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися соосными цилиндрическими полостями. Аналогия заключалась в том, что рассматривалась топографическая преграда в виде двух соосных цилиндров, разных радиусов, помещенных один поверх другого. Таким образом, рассматривалась возвышенность с радиальным уступом. Предполагается, что на границе данного уступа возникает турбулентный слой Стюартсона, который предполагается непроницаемым. В результате получается полная аналогия течения Тэйлора-Куэтта. В результате над уступом формируется область локализованной рециркуляции жидкости в виде тора.

В данной работе предполагается отказаться от жесткого наличия двух непроницаемых границ для формирования тора, так как непроницаемость пограничных слоев невозможна в реальности [311, 312].Для этого, ставится новое прозрачное невозрастающее граничное условие. Благодаря данному условию необходимость в сложной конфигурации топографической преграды с уступом исчезает и результирующий тороидальный вихрь появляется в окрестности простой цилиндрической изолированной возвышенности.

2.1.1. Постановка задачи

В статьях [296, 297] была предложена удовлетворительная модель для исследования структуры вторичных вихрей, которые могут формироваться, например, в результате потери устойчивости топографического вихря, в однородном океаническом потоке над подводной горой специальной формы, чтобы провести аналогию с течением Тэйлора-Куэтта. Как известно, для течения Тэйлора-Куэтта необходимы две непроницаемые границы, роль которых в этой модели топографического вихря исполняют два слоя Стюартсона на продолжении границ цилиндров. Таким образом, весь получаемый вихрь располагается между двух этих слоев, то есть в кольцевой области, "вырезанной"наложением малого цилиндра на большой. Необходимость постановки таких жестких условий накладывает очень существенные ограничения на интерпретацию предложенной модели. Таким образом, возникает вопрос о возможности генерации вторичных тороидальных вихрей для других профилей возвышенности. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим осесимметричную подводную гору с профилем $h(r)$. Тогда азимутальную скорость в нулевом приближении $V_\phi(r)$ на склоне возвышенности имеет вид:

$$V_\varphi(r) = -\frac{\sigma}{r}\int\limits_0^r h(\rho)\rho d\rho, \tag{2.1}$$

где $\sigma = h_0/(H \cdot Ro)$ – топографический параметр, $Ro = U_0/(f \cdot L)$ – число Россби, f – параметр Кориолиса, U_0 – средняя скорость потока, L – горизонтальный масштаб (далее все расстояние обезразмерены на эту величину и рассматриваются в безразмерном виде), H – глубина потока и $h_0 = \max\limits_r(|h(r)|)$.

Функция $V_\phi(r)$ должна удовлетворять примитивным уравнения для вращающейся жидкости с условием того, что радиальная и вертикальные скорости пренебрежимы в нулевом приближении, а зависимости от угла нет в силу симметрии. Тогда распределение давления $P_0(r)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0(r)}{\partial r} = \frac{V_\phi^2(r)}{r} - fV_\phi(r). \tag{2.2}$$

Азимутальную скорость $V_\phi(r)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r^2} = 0. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.1) в (2.3), получаем:

$$\frac{dh}{dr} = 0. \tag{2.4}$$

Таким образом, распределение скорости (2.1) в топографическом вихре будет точным решением полных уравнений вращающейся вязкой однородной жидкости только в областях с горизонтальным рельефом дна, т.е. подводная гора с горизонтальными уступами. Как уже отмечалось выше, случай подводной горы с одним уступом был рассмотрен в [296, 297]. Однако из приведенного анализа следует, что подводная гора в виде одного цилиндра также удовлетворяет условию (2.4), и этот случай не был рассмотрен. Более того, случай с горой в виде одного цилиндра не имеет аналогов в классической гидродинамике и является совершенно новым. Далее сформулируем задачу для случая возвышенности в виде одного цилиндра.

Из (2.1) следует, что распределение скорости в окрестности изолированного цилиндра с высотой h_0 и радиусом r_1 имеет вид:

$$V_\phi(r) \equiv v_0(r) = -\frac{\sigma}{2}\begin{cases} h_0 r, r \le r_1, \\ \frac{h_0 r_1^2}{r}, r \ge r_1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Вводя цилиндрические координаты (r, θ, z) и предполагая независимость потока от угла θ и времени t, рассматриваем поле скорости $\mathbf{U} = (u_r, v_0(r) + u_\theta, u_z)$ и давление $P = P_0 + Ep$, где E – число Экмана. Подставим данные распределения в исходные уравнения на f–плоскости (см., например, [313, 314]),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial z}u_z = 0,\\
&u_r\frac{\partial}{\partial r}u_r + u_z\frac{\partial}{\partial z}u_r - \frac{u_\theta^2}{r} - \left(\frac{2v_0}{r} + f\right)u_\theta = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial r}P + E\left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2}\right),\\
&u_r\frac{\partial}{\partial r}u_\phi + u_z\frac{\partial}{\partial z}u_\phi + \frac{u_\theta u_r}{r} + \left(\frac{dv_0}{dr} + \frac{v_0}{r} + f\right)u_r = E\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2}\right),\\
&u_r\frac{\partial}{\partial r}u_z + u_z\frac{\partial}{\partial z}u_z = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}P + E\Delta U_z,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

далее линеаризуя полученные выражения, получаем спектральную задачу (пусть $\rho_0 = 1$),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,\\
&\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} = \lambda\left(\frac{2v_0}{r} + f\right)u_\theta,\\
&\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} = \lambda\left(\frac{dv_0}{dr} + \frac{v_0}{r} + f\right)u_r,\\
&\Delta u_z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + 1/r \cdot \partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа, независимый от угла, и $\lambda = 1/E$ – спектральный параметр.

Представим собственные решения задачи (2.7) в форме:

$$u_r = u(r)\cos\alpha\, z\,, \quad u_\theta = v(r)\cos\alpha\, z,$$
$$u_z = w(r)\sin\alpha\, z\,, \quad p = q(r)\cos\alpha\, z, \tag{2.8}$$

где

$$w(r) = -\frac{1}{\alpha\, r}\frac{d}{dr}[r\, u(r)], \quad q(r) = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \alpha^2\right) w(r). \tag{2.9}$$

Вертикальная скорость u_z равна нулю на дне $z = 0$ и на поверхности $z = 1$. Отсюда $\alpha = k\pi$, $k = 0, 1, 2$. Граничные условия на границе цилиндра записываются на уровне $z = 0$, так как предполагается малость высоты цилиндра по сравнению с глубиной жидкости. Подставляя (2.8) и (2.9) в (2.7), получаем

$$(\bar{L} - \alpha^2)^2 u = \alpha^2 \lambda\, d(r)\, v,$$
$$(\bar{L} - \alpha^2) v = \lambda\, g(r)\, u, \tag{2.10}$$

где

$$d(r) = \frac{2v_0}{r} + f, \quad g(r) = \frac{dv_0}{dr} + \frac{v_0}{r} + f, \quad \bar{L} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \tag{2.11}$$

Полагая $g(r) = const$ и комбинируя (2.9) и (2.10), получаем уравнение шестого порядка [296, 297],

$$(\bar{L} - \alpha^2)^3 v = \lambda^2 \alpha^2 d(r)\, g(r)\, v \tag{2.12}$$

Принимая во внимание, что возмущения скорости исчезают на границах $r \to 0$ и $r \to \infty$, запишем граничные условия:

$$[u(r) = v(r) = w(r)]|_{r\to 0, r\to\infty} \to 0, \tag{2.13}$$

или

$$v \to 0, \quad L\, v \to 0, \quad \frac{d}{dr}[(\bar{L} - \alpha^2)]v \to 0, \quad r \to 0,\ \infty. \tag{2.14}$$

Далее будет рассматриваться получение численных решений сформулированной спектральной задачи.

Сделаем замену $V(r) = \sqrt{r}\, v(r)$, тогда вместо (2.12) и (2.14) получим

$$(\hat{L} - \alpha^2)^3 V = \lambda^2 Q(r)\, V, \quad \hat{L} = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{3}{4r^2}, \quad Q(r) = \alpha^2 d\,(r)\, g\,(r)\,, \tag{2.15}$$

с граничными условиями

$$\left(V(r_1) = (\hat{L} - \alpha^2)V(r_1) = \frac{d}{dr}(\hat{L} - \alpha^2)V(r_1)\right)|_{r_1 \to 0} = 0,$$
$$\left(V(r_2) = (\hat{L} - \alpha^2)V(r_2) = \frac{d}{dr}(\hat{L} - \alpha^2)V(r_2)\right)|_{r_2 \to \infty} = 0. \tag{2.16}$$

Спектральная задача (2.15), (2.16) представима в следующем виде (пусть $V_1(r) = V(r)$):

$$\begin{aligned}
&(\hat{L} - \alpha^2)V_1(r) = V_2(r), \quad (\hat{L} - \alpha^2)V_2(r) = V_3(r), \quad (\hat{L} - \alpha^2)V_3(r) = \lambda^2 Q(r) V_1(r),\\
&V_1(r_1)\,|_{r_1 \to 0} = 0, \quad V_2(r_1)\,|_{r_1 \to 0} = 0, \quad \frac{d}{dr}V_2(r_1)\,|_{r_1 \to 0} = 0,\\
&V_1(r_2)\,|_{r_2 \to \infty} = 0, \quad V_2(r_2)\,|_{r_2 \to \infty} = 0, \quad \frac{d}{dr}V_2(r_2)\,|_{r_2 \to \infty} = 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Таким образом, мы сформулировали спектральную задачу (2.17), посредством которой определяется квазитрехмерное поле скорости (2.8)для топографического вихря, образующегося над цилиндрической подводной возвышенностью. Далее перейдем поиску решений и анализу данной спектральной задачи.

2.1.2. Анализ разрешимости задачи Штурма-Лиувилля

Итак, рассмотрим задачу на собственные значения для системы уравнений Гельмгольца (2.17), которую перепишем в матричном виде

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dr^2}\boldsymbol{V}(r;L) - \mathbf{K}^2(r;\lambda)\boldsymbol{V}(r;L) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K}^2(r) = \left(\frac{3}{4r^2} + \alpha^2\right)\mathbf{E} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda^2 Q(r) & 0 & 0 \end{pmatrix},\\
&\boldsymbol{U}(r;L) = \frac{d}{dr}\boldsymbol{V}(r;L).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Здесь мы ввели параметрическую зависимость от положения правой границы L и обозначение $\mathbf{E}$ для единичной матрицы.

Дополним систему уравнений (2.18) условиями не возрастания при стремлении r к нулю и бесконечности. Так как ищутся только невозрастающие решения, то граничное условие при $r \to 0$ имеет вид

$$(\boldsymbol{U}(r;L) + \mathbf{A}_-(L_0)\boldsymbol{V}(r;L))\,|_{r \to L_0 \to 0} = \mathbf{0}, \tag{2.19}$$

и при стремлении к бесконечности

$$(\boldsymbol{U}(r;L) + \mathbf{A}_+(L)\boldsymbol{V}(r;L))\,|_{r \to L \to \infty} = \mathbf{0}. \tag{2.20}$$

Матрицы коэффициентов $\mathbf{A}_-$ и $\mathbf{A}_+$ определяются далее, исходя из асимптотик решений.

Можно показать [315], что в полубесконечном пространстве $r \in (0, \infty)$ существует интервал, на котором у матрицы $\mathbf{K}(r;\lambda)$ есть, по крайней мере, одна пара чисто мнимых собственных значений $\mu(r,\lambda)$, тогда задача Штурма-Лиувилля (2.18) – (2.20) имеет дискретный спектр. Поэтому для выяснения разрешимости нашей задачи нужно исследовать собственные значения матрицы коэффициентов системы. Из характеристического уравнения

$$\det\left(\mathbf{K}^2(r) - \mu^2\mathbf{E}\right) = \left(\frac{3}{4r^2} + \alpha^2 - \mu^2\right)^3 + \lambda^2 Q(r) = 0 \tag{2.21}$$

следует, что

$$\mu^2 = \frac{3}{4r^2} + \alpha^2 + \left(\lambda^2 Q(r)\right)^{1/3}. \tag{2.22}$$

Из (2.22) делаем вывод, что чисто мнимые значения существуют только если

$$Q(r) < 0. \tag{2.23}$$

При выполнении этого условия и при условии $\lambda^2 \neq 0$, всегда найдется интервал $({r_1}^*, {r_2}^*)$, на котором одна пара собственных значений $\mu_1(r,\lambda)$, $\bar{\mu}_1(r,\lambda)$ будет чисто мнимой, а остальные собственные значения будут иметь ненулевую действительную часть. Здесь черта означает комплексно сопряженное значение, а ${r_1}^*, {r_2}^*$ соответствующие минимальным границам интервала существования дискретного спектра, будем называть точками поворота. Вне указанного интервала все собственные значения $\mu_n(r,\lambda)$ при n в пределах от 1 до 6 будут иметь ненулевые действительные части.

Из выражений (2.15), (2.11) и (2.5) получаем

$$Q(r) = \alpha^2\left(\frac{2v_0}{r} + f\right)\left(\frac{dv_0}{dr} + \frac{v_0}{r} + f\right) = \alpha^2\left\{\begin{array}{c} (-\sigma h_1 + f)^2, 0 < r < r_1; \\ \left(-\sigma h_1 \frac{{r_1}^2}{r^2} + f\right) f, r_1 < r < \infty. \end{array}\right. \tag{2.24}$$

Из выражений (2.23) и (2.24) следует, что дискретный спектр существует, когда

$$|h_1| > |f/\sigma|. \tag{2.25}$$

Таким образом, для разрешимости задачи Штурма-Лиувилля, размер подводной возвышенности должен удовлетворять неравенству(2.25).

Более того мы имеем, что над цилиндром собственные значения всегда имеют ненулевую действительную часть и ${r_1}^* = r_1$, т.е. первая точка поворота совпадает с границей цилиндра. Положение второй точки поворота зависит от λ и вычисляется из выражения

$$\frac{3}{4({r_2}^*)^2} + \alpha^2 + \left(\alpha^2\lambda^2\left(-\sigma h_1\frac{{r_1}^2}{({r_2}^*)^2} + f\right) f\right)^{1/3} = 0. \tag{2.26}$$

Данное выражение имеет единственное решение при ${r_2}^* > r_1$.

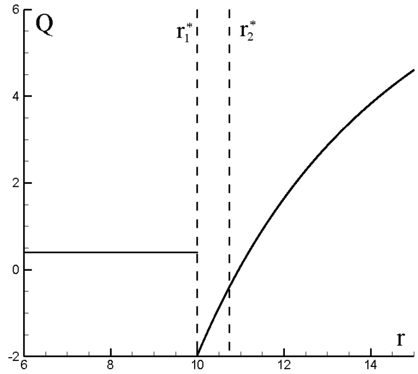

Рис. 2.1. Пример зависимости $Q(r)$ для случая существования дискретного спектра. Вертикальные штриховые линии показывают положения точек поворота ${r_1}^* = r_1$ и ${r_2}^* \approx 12.2474$

На рис. 2.1 приведен пример зависимости $Q\,(r)$, при которой условие существования дискретного спектра выполнено (при следующих значениях параметров $f = 1$, $\sigma = 5$, $r_1 = 10, h_1 = 0,3$, $\alpha = \pi$, $\lambda = 25$, $r_1^* = r_1$, $r_2^* \approx 12,2474$).

Далее рассматривается получение численных решений задачи(2.18)–(2.20) методом погружения [316].

2.1.3. Метод инвариантного погружения для нахождения численного решения

Очертим метод поиска численного нахождения решения спектральной задачи (2.18) – (2.20). Сначал применяется метод инвариантного погружения [317] для преобразования уравнения Гельмгольца (2.18) к матричному уравнению Риккати с переменными коэффициентами. Затем интервал интегрирования дробится на большое количество малых интервалов, на каждом из которых предполагается постоянство коэффициентов. Далее, строя сходящиеся реккурентные последовательности, получаем численное решение.Оставляя детали вычислений в стороне, укажем некоторые важные особенности. Обратим внимание, что решения поставленной задачи содержат экспоненциально растущие и экспоненциально убывающие функции. Последние, при численном решении не разрешаются на фоне растущих (аналогичная ситуация имеет место при использовании ВКБ приближения), что приводит к экспоненциальному росту всего решения.

Чтобы обойти данную проблему, выберем в рассматриваемых областях такое направление решения уравнения (2.18), которое бы не давало экспоненциального возрастания собственных функций при удалении в направлении нуля или бесконечности от точек поворота. То есть, если мы поставим начальное условие к уравнению Риккати в нуле и будем его решать слева направо до точки поворота r_1^*, в связи с экспоненциальным ростом убывающие слева направо показатели не будут разрешаться, но растущие показатели, наоборот, будут вычисляться правильно при таком направлении вычислений. С другой стороны, растущие слева направо экспоненты эквивалентны убывающим справа налево, т.е. от точки поворота r_1^* к нулю. Отсюда получаем решение экспоненциально невозрастающее при направлении вычисления от левой точки поворота направо.

Для получения решения справа от второй точки поворота r_2^*, необходимо производить вычисления в обратном направлении. Поставим условие к уравнению Риккати в бесконечности и будем решать его справа налево, тогда экспоненциально растущие в этом направлении экспоненты будут хорошо разрешаться и будут эквиваленты экспоненциально невозрастающим справа налево от точки поворота до бесконечности. Таким образом, справа от точки поворота r_2^* мы опять получим решение удовлетворяющее условию невозрастания на бесконечности. Однако, решения, полученные для разных направлений вычислений, должны быть согласованны. Данное согласование достигается за счет сшивки полученных решений в области (r_1^*, r_2^*), где экспоненциально растущие решения не очень большие.

2.1.4. Результаты вычислений

Итак, перейдем к анализу результатов вычислений. Будем рассматривать следующие параметры системы: $f = 1$, $\sigma = 5$, $r_0 = 10, h_0 = 0,3$, $\alpha = \pi$. Используя метод инвариантного погружения для нахождения решений спектральной задачи (2.18) – (2.20), получаем три первых значения спектрального параметра: $\lambda_1 \approx 23,16$, $\lambda_2 \approx 42,85$, $\lambda_3 \approx 80,637$.

На рис. 2.2a представлены кривые собственных функций $u\left(r\right), v\left(r\right), w\left(r\right)$ для случая подводной возвышенности в виде изолированного цилиндра (собственное значении спектральной задачи λ_1). На рис. 2.2b представлены аналогичные кривые только для случая подводной возвышенности в виде двух цилиндров, располагающихся один поверх второго (случай, рассмотренный в работах [296, 297] с добавлением условий невозрастания в нуле и на бесконечности). Значения параметров в этом случае $f = 1$, $\sigma = 5$, $\alpha = \pi$, высота нижнего цилиндра $h_1 = 0,15$, радиус $r_1 = 10$, высота верхнего цилиндра $h_2 = 0,15$, радиус $r_2 = 7$. Видно, что качественно вид собственных функций совпадает. Таким образом, для формирования пространственной структуры топографического вихря достаточно самой простой конфигурации подводной возвышенности. Однако, несмотря на то, что такой тороидальный вихрь, согласно формуле (2.4), строится только для кусочно-постоянного вида профиля подводной возвышенности, можно сформировать произвольный кусочно-постоянный профиль с единственным требованием осесимметричности. Собственные функции для такого произ-

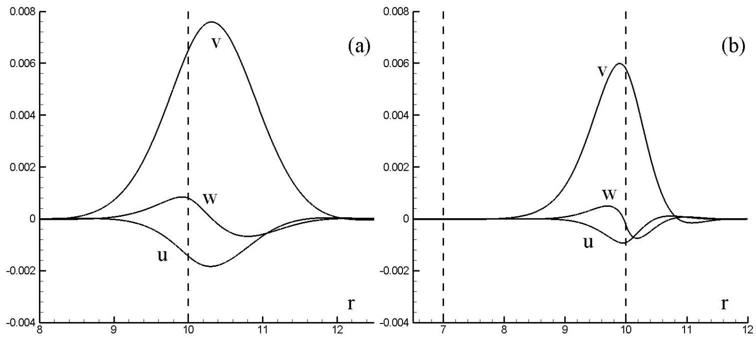

Рис. 2.2. Собственные функции $u\,(r)\,, v\,(r)\,, w\,(r)$ для случаев: (a) одиночный цилиндр, (b) Составная топограическая преграда в виде двух цилиндров, помещенных один над другим. Вертикальные штриховые линии указывает на границы цилиндров.

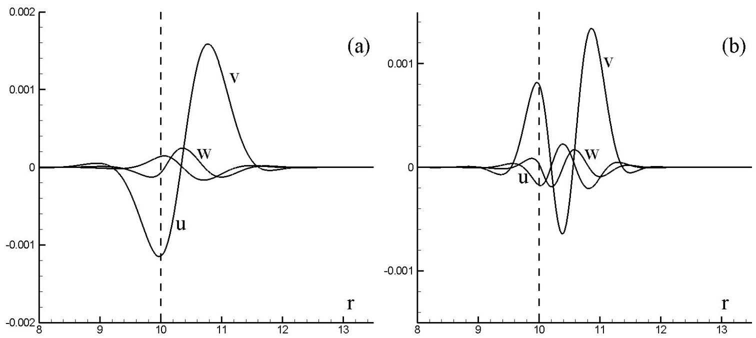

Рис. 2.3. Собственные функции $u\,(r)\,, v\,(r)\,, w\,(r)$ для случаев: (a) второе собственное значение $\lambda = 42,85$ и (b) третье собственное значение $\lambda = 80,637$ для спектральной задачи (2.18) – (2.20)

вольного кусочно-постоянного профиля качественно не будут отличаться от собственных функций, приведенных на рис. 2.2a для подводной возвышенности цилиндрической формы. На рис. 2.3 представлены собственные функции $u\,(r)\,, v\,(r)\,, w\,(r)$ соответствующие второму значению спектрального параметра $\lambda = 42,85$ и треттьему значению спектрального параметра $\lambda = 80,637$.

На рис. 2.4a приведен пример проекций траектории жидкой частицы на вертикальную плоскость $(r,\, z)$ в квазитрехмерном вихре с полем скорости, определяемом через собственные функции, изображенные на рис. 2.2a. Квазитрехмерность вихря подразумевает, что спектральная задача (2.18) – (2.20) сформулирована при условии радиальной симметрии. В результате жидкая частица описывает правильную поверхность второго порядка в виде тора. Также на рис. 2.4b,c представлены аналогичные проекции траектории жидкой частицы для полей скорости, получаемых из собственных функций, изображенных на рис. 2.3a,b.

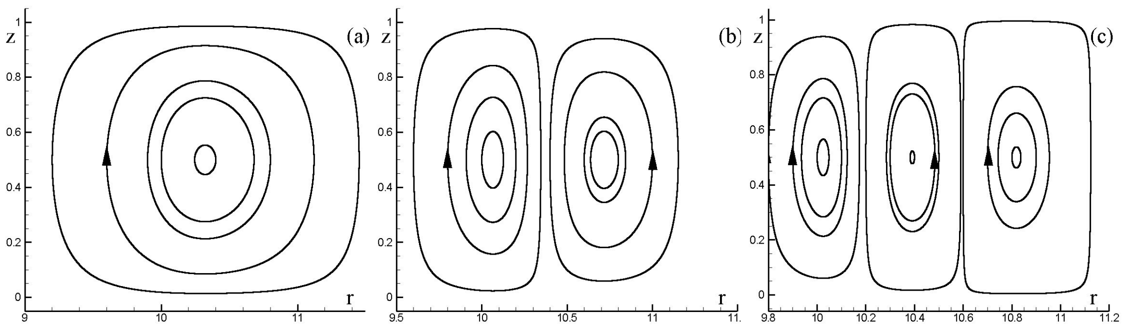

Рис. 2.4. Проекции траектории жидкой частицы на вертикальную плоскость (r, z). Соответствующие скорости определяются через собственные функции, изображенные на рисунках: (a) 2.3a; (b) 2.4a; (c) 2.4b.

Глава 3

Взаимодействие монопольных и дипольных вихрей с изолированной подводной возвышенностью

В работах [1–4, 166, 167, 169, 171, 173, 318–321] рассматривалась динамика пассивной примеси, индуцируемая взаимодействием потока и изолированной подводной возвышенностью. В зависимости от параметров потока и конфигурации возвышенности в ее окрестности могут появляться замкнутые области рециркуляции жидкости - топографические вихри. В стационарной задаче область рециркуляции будет постоянной, и жидкость внутри нее не будет переносится во внешний поток. При наличии возмущений внешнего потока начнется обмен жидкостью между топографическим вихрем и внешним потоком. Роль возмущения может играть, например, переменное проточное течение. Если же в окрестности топографического вихря появляются свободные вихри, то динамика обмена жидкостью может существенно усложниться. В данной главе будет рассмотрено взаимодействие монопольного и дипольного вихря с топографической преградой и индуцируемый этим взаимодействием перенос жидкости.

3.1. Перенос примеси, индуцируемый взаимодействием сингулярного вихря с изолированной топографической преградой в трехслойном потоке при наличии плоского внешнего потока

Известно, что топографические вихри существенно влияют на поведение свободных когерентных вихревых структур в их окрестностях (см., например, [308, 322–330]). Как известно, топографические вихри существенно изменяются по размеру во времени [295, 300, 302, 303, 305, 309, 322, 331–336].

В данной главе рассматривается лагранжев регулярный и нерегулярный горизонтальный перенос, индуцируемый взаимодействием свободного монополя и топографического вихря, порожденного прямолинейным фоновым потоком и изолированным донным возмущением. Рассматривается трехслойный квази-геострофический поток на f – плоскости [118, 314, 337, 338] с возмущением в виде дельта-функции [169, 173, 339, 340]. Далее в систему добавляется сингулярный монопольный точечный вихрь [120, 121, 134, 253, 341, 342]. Рассматриваются случаи свободного вихря в верхнем и среднем слоях. Сингулярные вихри двигаются как пассивные маркеры по линиям постоянного значения квази-геострофической функции тока [139, 140, 342]. В тоже время вращение этих вихрей порождает сложные картины переноса и перемешивания пассивных жидких частиц. В данном случае трехслойная модель применяется в связи с тем, что интерес представляет как движение поверхностных вихрей, так и динамика вихрей на глубине, таких, например, как внутри-термоклинные линзы [343–346]. В тоже время перенос и перемешивание пассивных жидких частиц анализируется только на поверхности для обоих случаев положения свободного вихря. Различие в картинах переноса частиц обусловлено тем, что вихрь среднего слоя индуцирует регулярное поле скорости в верхнем слое в отличии от сингулярного поля скорости, индуцируемого вихрем верхнего слоя.

В данной главе рассматривается два типа взаимодействия свободного монополя и топографического вихря. Во-первых, рассматривается стационарная задача, т.е. случай постоянного фонового потока, при котором свободный вихрь двигается по линиям тока. Во-вторых, переменный фоновый поток, при котором траектория движения свободного вихря становится крайне сложной и при которой становится возможным захват свободного вихря топографией, что порождает квази-периодические колебания вихря в окрестности топографии. Для обоих режимов анализируется перенос примеси, индуцируемый соответствующим взаимодействием вихрей.

3.1.1. Уравнения движения

Рассматривается трехслойный невязкий несжимаемый квази-геострофический поток в приближении твердой крышки и f – плоскости. Потенциальные завихренности в слоях q_i, $i = 1,\, 2,\, 3$, начиная с верхнего, имеют вид [314]:

$$\begin{aligned} q_1 &= \Delta\psi_1 + \frac{f}{H_1}\zeta_1 + f, \quad q_2 = \Delta\psi_2 + \frac{f}{H_2}\left(\zeta_2 - \zeta_1\right) + f, \\ q_3 &= \Delta\psi_3 + \frac{f}{H_3}\left(h\left(x,y\right) - \zeta_2\right) + f, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где ψ_i – функции тока в слоях, u_i, v_i – скорости в слоях, ζ_1, ζ_2 – возвышение границ раздела между слоями, $h(x,y) = \tau\delta(\mathbf{r}))$ – высота подводной возвышенности в виде дельта-функции с эффективным объемом τ, H_i – глубина i - го слоя, f – постоянная Кориолиса. Возвышение границ раздела записываются в виде [314]:,

$$\zeta_1 = \frac{f\left(\psi_2 - \psi_1\right)\rho_2}{\left(g\left(\rho_2 - \rho_1\right)\right)}, \quad \zeta_2 = \frac{f\left(\psi_3 - \psi_2\right)\rho_3}{\left(g\left(\rho_3 - \rho_2\right)\right)}, \tag{3.2}$$

где ρ_i – плотность в i-ом слое, g – сила тяжести, $\Delta\rho_1 = \rho_2 - \rho_1$ и $\Delta\rho_2 = \rho_3 - \rho_2$ – скачки плотности.

В среднем и верхнем слое введем сингулярные возмущения, перемещающиеся в пространстве,

$$q_m = q_m^* + \frac{f}{H_m}\mu_m\delta\left(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_m^*|\right), \quad q_{3-m} = q_{3-m}^*, \quad q_3 = q_3^*, \tag{3.3}$$

где $m = 1$ соответсвует случаю вихря в верхнем слое, а $m = 2$ – вихрь в среднем слое, μ_m – интенсивность свободного вихря, $\mathbf{r_m^*}$ – положение сингулярности в m-ом слое, q_i^* – постоянное значение фоновой завихренности. $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_m^*| = \sqrt{\left(x_i - x_m^*\right)^2 + \left(y_i - y_m^*\right)^2}$, где $x_i,\ y_i$ – декартовы координаты частицы, находящейся в i-ом слое.

Потенциальные завихренности (3.1) удовлетворяют закону сохранения в каждом слое,

$$\partial_t q_i + J\left(\psi_i, q_i\right) = 0. \tag{3.4}$$

Выражения (3.1) расщепляются на баротропную Φ_1 и две бароклинные компоненты Φ_2, Φ_3 для случая вихря в верхнем ($m = 1$) и среднем ($m = 2$) слоях,

$$\begin{aligned}
\Phi_{1m} &= \frac{f}{\gamma}\left(\frac{(-1)^{3-m}\left(\alpha_{3-m} - \beta_{3-m}\right)\mu_1}{H_1}\log\left(r_{i1}^*\right) + \right. \\
&\left. + \frac{\left(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\right)\tau}{H_3}\log\left(r_i\right)\right), \\
\Phi_{2m} &= -\frac{f}{\gamma}\left(\frac{(-1)^{3-m}\left(\beta_{3-m} - 1\right)\mu_1}{H_1}K_0\left(\sqrt{k_3\left(\alpha_2 - 1\right)}r_{i1}^*\right) + \right. \\
&\left. + \frac{\left(\beta_1 - \beta_2\right)\tau}{H_3}K_0\left(\sqrt{k_3\left(\alpha_2 - 1\right)}r_i\right)\right), \\
\Phi_{3m} &= -\frac{f}{\gamma}\left(\frac{(-1)^{3-m}\left(1 - \alpha_{3-m}\right)\mu_1}{H_1}K_0\left(\sqrt{k_3\left(\beta_2 - 1\right)}r_{i1}^*\right) + \right. \\
&\left. + \frac{\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\tau}{H_3}K_0\left(\sqrt{k_3\left(\beta_2 - 1\right)}r_i\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где $r_i = \sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2}$, $r_{im}^* = \sqrt{\left(x_i - x_m^*\right)^2 + \left(y_i - y_m^*\right)^2}$,

$$\alpha_1 = -k_{22}/k_{21} - \alpha_2/k_{21}\left(-k_{21} - k_{22} + k_3\left(\alpha_2 - 1\right)\right),$$
$$\alpha_2 = \left(k_1 + k_3 + k_{21} + k_{22} + \lambda_0\right)/\left(2k_3\right),$$
$$\beta_1 = -k_{22}/k_{21} - \beta_2/k_{21}\left(-k_{21} - k_{22} + k_3\left(\beta_2 - 1\right)\right),$$
$$\beta_2 = \left(k_1 + k_3 + k_{21} + k_{22} - \lambda_0\right)/\left(2k_3\right),$$
$$\lambda_0 = \sqrt{\left(k_1 - k_3 + k_{21} + k_{22}\right)^2 - 4\left(-k_1k_3 - k_3k_{21} + k_1k_{22}\right)},$$
$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1 - \beta_2 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1,$$
$$k_1 = \frac{f^2\rho_2}{H_1g\Delta\rho_1},\ k_3 = \frac{f^2\rho_3}{H_3g\Delta\rho_2},$$
$$k_{21} = \frac{f^2\rho_2}{H_2g\Delta\rho_1},\ k_{22} = \frac{f^2\rho_3}{H_2g\Delta\rho_2}.$$

Введем безвихревой прямолинейный поток с функцией тока $-Uy$, где U – скорость. В конечной форме функции тока для m-го слоя имеют вид

$$\psi_{im} = -Uy + \Phi_{1m} + \alpha_i\Phi_{2m} + \beta_i\Phi_{3m}, \tag{3.6}$$

где $\alpha_3 = \beta_3 = 1$.

Примем масштаб длины, равным $L = \left(k_3\left(\alpha_2 - 1\right)\right)^{-1/2}$, масштаб скорости U, число Россби $\varepsilon = \frac{U}{fL}$, а также эффективный объем топографической преграды $\tau = \pi h_0 L^2$, где h_0, L – высота и радиус эквивалентного цилиндра [318]. В результате получаем безразмерные параметры

$$\chi = \frac{f\tau}{H_3UL} = \frac{h_0\pi}{\varepsilon H_3},\ \ \kappa_m = \frac{f\mu_m}{H_mUL}, \tag{3.7}$$

которые характеризуют интенсивность топографического и свободного вихрей, соответственно. Далее, для выполнения условия квази-геострофичности $\frac{h_0}{H_3} \sim O\left(\varepsilon\right)$ положим $\chi = \pi$. Тогда, выбирая следующие значения параметров $H_1 = 200\ m$, $H_2 = 400\ m$, $H_3 = 3000\,m$, $\rho_1 = 1026,56\ kg/m^3$, $\rho_2 = 1027,84\ kg/m^3$, $\rho_3 = 1028,32\ kg/m^3$, имеем характерный размер топографического вихря $L \sim 1.3 \cdot 10^4\ m$.

Уравнения движения сингулярного вихря и пассивной частицы имеют гамильтонов вид. Уравнения для вихря:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_m^* &= -\left.\frac{\partial\psi_{mm}}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_m^*\\ y=y_m^*}} = W + \chi\frac{y_m^*}{r_m^*}V_m\left(r_m^*\right), \\ \frac{d}{dt}y_m^* &= \left.\frac{\partial\psi_{mm}}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_m^*\\ y=y_m^*}} = -\chi\frac{x_m^*}{r_m^*}V_m\left(r_m^*\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $W = W(t)$ – безразмерная скорость плоского потока и

$$V_m(\xi) = \frac{1}{\gamma}\left((\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\frac{1}{\xi} + \alpha_m(\beta_1 - \beta_2)K_1(\xi) + \right.$$
$$\left. +\beta_m(\alpha_2 - \alpha_1)\sqrt{\frac{(\beta_2 - 1)}{(\alpha_2 - 1)}}K_1\left(\sqrt{\frac{(\beta_2 - 1)}{(\alpha_2 - 1)}}\xi\right)\right),$$

где $r_m^* = \sqrt{(x_m^*)^2 + (y_m^*)^2}$ – координата вихря в m-ом слое. Система (3.8) совпадает с системой, описывающей динамику пассивной частицы, индуцируемой взаимодействием внешнего потока и изолированной преграды, которая рассматривалась, например, в работах [103, 169–171, 318–321, 339, 347–349]. Однако в нашем случае система (3.8) описывает движение не пассивной частицы, а сингулярного вихря, который не индуцирует собственное движение. В свою очередь, все остальные частицы в потоке движутся в поле скорости, генерируемым, как взаимодействием потока с изолированной топографией, так и вращением свободного вихря.

Уравнения движения произвольной пассивной частицы в верхнем слое имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\frac{\partial\psi_{im}}{\partial y_i} = \\ &= W + \kappa_m\frac{(y_i - y_m^*)}{r_{im}^*}P_{im}(r_{im}^*) + \chi\frac{y_i}{r_i}V_i(r_i), \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial\psi_{im}}{\partial x_i} = \\ &= -\left(\kappa_m\frac{(x_i - x_m^*)}{r_{im}^*}P_{im}(r_{im}^*) + \chi\frac{x_i}{r_i}V_i(r_i)\right), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $r_{im}^* = \sqrt{(x_i - x_m^*)^2 + (y_i - y_m^*)^2}$ – положение пассивной частицы относительно центра свободного вихря,

$$P_{im}(\xi) = \frac{(-1)^{3-m}}{\gamma}\left((\alpha_{3-m} - \beta_{3-m})\frac{1}{\xi} + \alpha_i(\beta_{3-m} - 1)K_1(\xi) + \right.$$
$$\left. +\beta_i(1 - \alpha_{3-m})\sqrt{\frac{(\beta_2 - 1)}{(\alpha_2 - 1)}}K_1\left(\sqrt{\frac{(\beta_2 - 1)}{(\alpha_2 - 1)}}\xi\right)\right),$$

и $m = 1, 2$ – соответствует случаям свободного вихря в верхнем и среднем слое.

3.1.2. Движение свободного вихря

Начнем с кратного анализа движения самого свободного вихря. Для этого рассмотрим систему уравнений (3.8). В случае если внешний поток стационарен ($W = W_0$), система (3.8) интегрируема в том смысле, что все траектории движения свободного вихря совпадают с линиями тока. Так как рассматривается простейшая сингулярная модель топографической

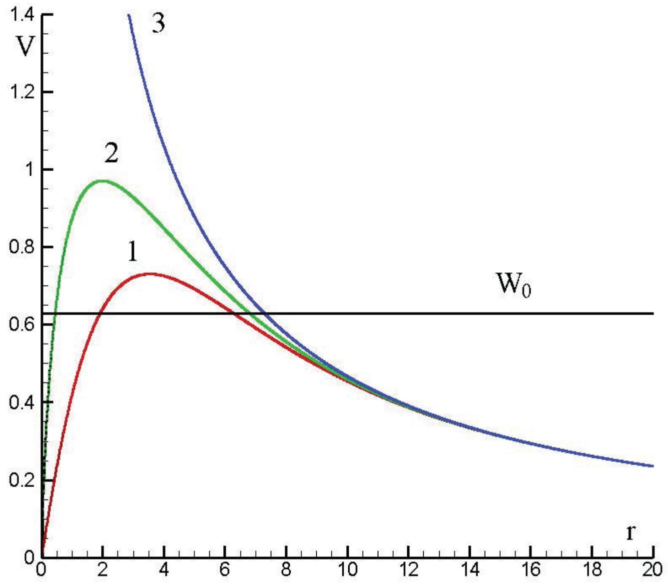

Рис. 3.1. Азимутальные скорости в топографическом вихре в слоях. Линии 1,2,3 соответствуют верхнему, среднему и нижнему слоям, соответственно. Горизонтальная прямая отсекает значение проточного течения $W_0 = 0,2\pi$.

преграды, то любая ненулевая скорость внешнего потока будет порождать замкнутые области рециркуляции в нижнем слое модели. В тоже время в среднем и верхнем слоях области рециркуляции появляются при скоростях внешнего потока меньших некоторого критического значения. Это критическое значение равно максимальной азимутальной скорости в соответствующем слое. На рис. 3.1 изображены азимутальные скорости V_i в зависимости от расстояния до эллиптической точки замкнутой области рециркуляции r. Далее выберем значения $W_0 = 0,2\pi$, $\chi = \pi$, при котором замкнутая область рециркуляции наблюдается во всех слоях. На рис. 3.2 приведены линии тока в верхнем слое. Жирная линия - сепаратриса, отделяющая проточную область от замкнутой. Так же приведена сепаратриса для среднего слоя.

3.1.3. Перенос жидких частиц

Регулярная динамика свободного вихря

Проанализируем лагранжев перенос жидких частиц, индуцируемый взаимодействием свободного вихря и топографического вихря. Динамика пассивной жидкой частицы описывается уравнениями (3.9), где в правой части уравнений стоит нестационарная компонента – вклад от движения свободного вихря, получаемый из системы (3.8). Сначала рассмотрим периодическое движение свободного вихря. Период этого движения равен времени, которое

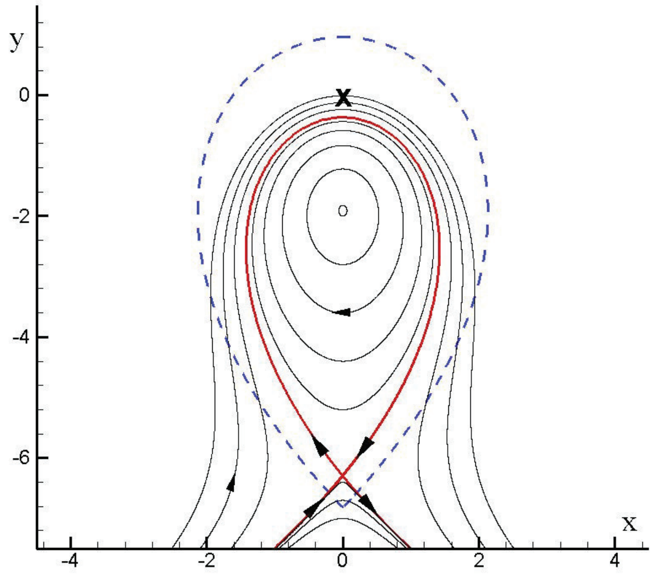

Рис. 3.2. Линии тока топографического вихря в верхнем слое. Жирная линия – сепаратриса. Штриховая жирная линия – сепаратриса среднего слоя. Крестом обозначено положение сингулярной топографической преграды, (0, 0).

необходимо вихрю, чтобы пройти полный оборот по замкнутым линиям с рис. 3.2. В результате получаем, что система (3.9) является динамической системой с полутора степенями свободы, где нестационарное возмущение является следствием движения свободного вихря. Как известно, такие системы демонстрируют нерегулярную динамику, которую в гидродинамических приложениях принято называть хаотическим переносом [36, 38, 39, 87, 103, 349–352]. Хаотический перенос выражается в виде экспоненциальной расходимости изначально близких траекторий [353, 354]. Если возмущение системы периодическое, то наиболее простой способ продемонстрировать хаотические свойства – это построить сечения Пуанкаре. На рис. 3.3a приведено сечение Пуанкаре системы (3.9) для $\kappa_1 = 0,01$, $y_1^*(0) = -4$, что соответствует частоте возмущения (частоте оборота свободного вихря вокруг топографической преграды) $\omega = 0,1611$.

Помимо интенсивности свободного вихря существенное влияние на эффективность переноса жидких частиц оказывает начальное положение вихря. Различные начальные положения соответствуют различным частотам оборота свободного вихря вокруг топографической преграды, т.е. различным частотам возмущений для системы адвектируемых жидких частиц. Если же начальные положения вихря находятся на одной орбите, то структура регулярных и хаотических областей в возмущенном фазовом пространстве будет одинаковой. Для примера приведен рис. 3.3a,b, на котором изображены эквивалентные структуры сечений Пуанкаре

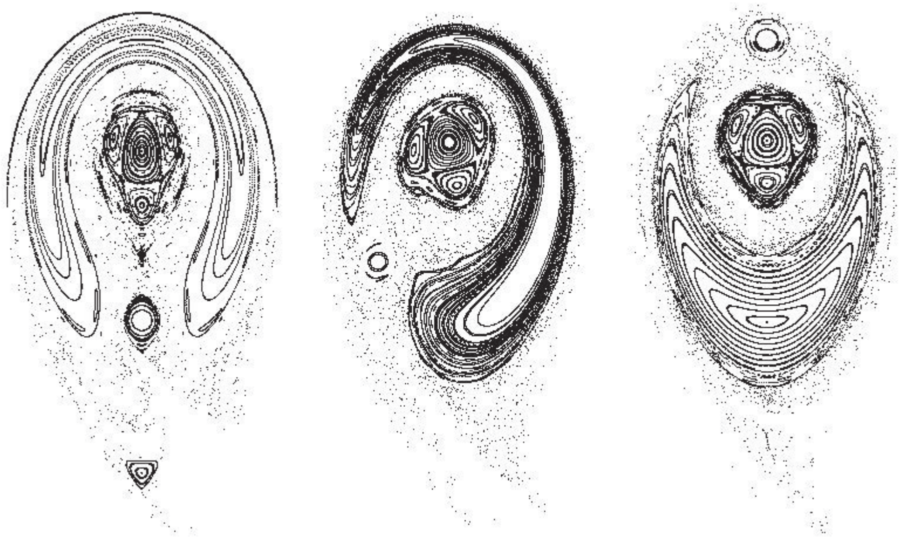

Рис. 3.3. Эквивалентные сечения Пуанкаре системы (3.9) для одних и тех же значений $\kappa = 0,01$ и ω и отличающихся начальных положений свободного вихря на одной и той же орбите с рис. 3.3b $(x_1^*,\ y_1^*)$. (a) $(0,\ -4)$; (b) $(-0,8,\ -3,3107)$; (c) $(0,\ -0,6936)$.

для различных начальных положений свободного вихря, но находящихся на одной и той же траектории.

На рис. 3.4, 3.5 приведены два примера адвекции жидких частиц в случае, когда свободный и топографический вихри вращаются в одну и в разные стороны. Пунктирная линия обозначает границу начального распределения маркеров ($\sim 10^4$), совпадающую с размером невозмущенного топографического вихря. Сплошная линия –траектория свободного вихря, треугольником обозначено текущее положение свободного вихря. На рис. 3.4c можно наблюдать формирование ярко-выраженной дипольной структуры. Сравнивая рис. 3.4, 3.5, видно, что случай вращения вихрей в разные стороны порождает более эффективный хаотический перенос жидких частиц.

В качестве меры адвективного переноса вычислялось время выноса жидких частиц из области влияния топографического вихря во внешний неограниченный поток [339, 347, 348]. Такая характеристика является аналогом накопленных показателей Ляпунова в том смысле, что она указывает на области интенсивного перемешивания. Для ее вычисления были равномерно распределены 10^4 маркеров внутри невозмущенного топографического вихря, и далее отслеживалось время, за которое маркер пересекал контрольную линию $x = 5$, после которой считалось, что маркер не может вернуться обратно. Распределения времен выноса приведены на рис. 3.6, на которых единица времени соответствует одному полному обороту свободного

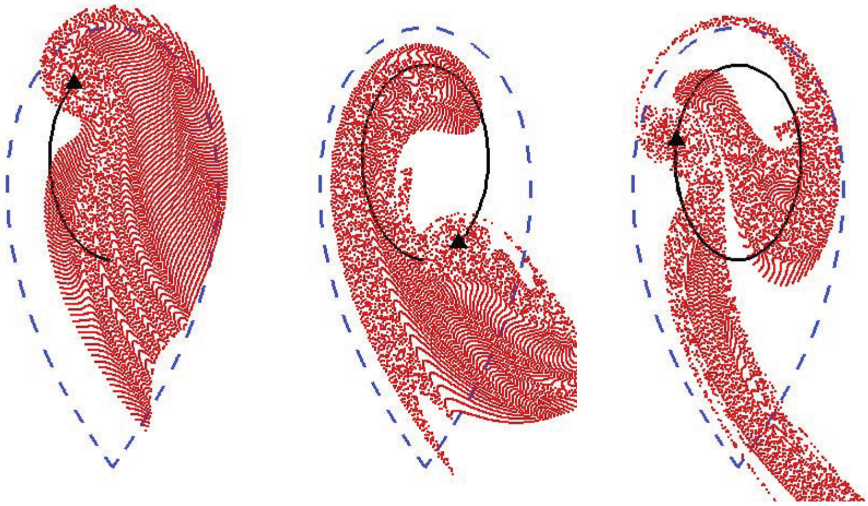

Рис. 3.4. Пример рассеивания жидких частиц в случае поверхностного свободного вихря для противонаправленного вращения вихрей при $\kappa = -0,1$, $y_0 = -3,5$. Изначально маркеры равномерно распределены внутри сепаратрисы стационарного потока (штриховая линия). Сплошная линия – траектория движения свободного вихря, треугольником обозначено текущее положение вихря. (a) $t = 15$; (b) $t = 30$; (c) $t = 45$.

вихря вокруг топографической преграды. На всех фрагментах заметна общая черта – почти круглое пятно частиц в окрестности поверхностного свободного вихря. Данные частицы слабо перемешиваются по причине того, что в центре свободного вихря сингулярность с очень высокими скоростями. В результате в непосредственной окрестности сингулярности всегда устойчивое движение [5].

Теперь рассмотрим случай свободного вихря в среднем слое. Главное отличие от случая поверхностного вихря состоит в том, что так как сингулярность сосредоточена в среднем слое, то в верхнем слое нет сингулярных точек. В результате в верхнем слое будет отсутствовать регулярная область, связанная с сингулярностью. То есть, эффективность переноса маркеров в верхнем слое будет расти. На рис. 3.7 приведены времена выноса маркеров из области топографического вихря для ряда параметров.

В данном параграфе рассматривалось периодическое движение свободного вихря. Интерес также представляет случай, когда динамика самого свободного вихря перестает быть регулярной. Далее рассматривается именно такой случай.

Нерегулярная динамика свободного вихря

Так как система уравнений, описывающая движение свободного вихря допускает появление хаотических траекторий при наличии возмущений, то представляет интерес про-

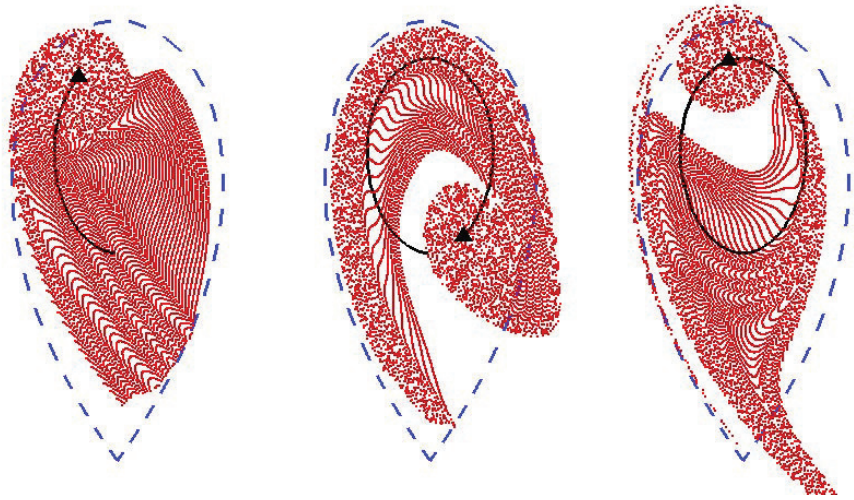

Рис. 3.5. Тоже, что и на рис. 3.4 только для сонаправленного вращения вихрей при $\kappa = 0,1$, $y_0 = -3,5$. (a) $t = 15$; (b) $t = 30$; (c) $t = 46$.

анализировать влияние такого типа движения на адвекцию жидких частиц. Именно такой тип движения представляет больший интерес для геофизических приложений, так как большинство реальных потоков апериодичны. Методы теории динамических систем находят свое применение и в случае апериодических потоков [36, 37, 40, 45, 47, 94, 355–358]. Итак, зададим проточное течение в виде

$$W = W_0 \left(1 + \mu_W \cos \nu_W t\right), \tag{3.10}$$

где μ_W, and ν_W – амплитуда и частота колебаний внешнего потока. Система (3.8) тогда становится возмущенной и допускает появление хаотических траекторий. В результате появляются такие траектории движения свободного вихря, что он может быть временно захвачен в окрестности топографической преграды, совершить далее там некоторое количество оборотов и, далее, опять выйти в проточную область. Чтобы максимально уменьшить влияние колебательного потока на адвекцию частиц была выбрана малая амплитуда возмущения ($\mu_W = 0,01$).

На рис. 3.8 приведен пример коротковременного воздействия свободного монополя на перенос жидких частиц. Под коротковременным воздействием понимается то, что свободный вихрь совершает всего несколько полных оборотов вокруг топографической преграды. На рис. 3.8a приведены начальные положения светлых маркеров (принадлежат свободному вихрю) и темных маркеров (принадлежат топографическому вихрю). Как и раньше, область невозмущенного топографического вихря равномерно заполнена 10^4 маркерами. Круг с $1,5 \cdot 10^3$ маркерами соответствует начальному положению свободного вихря. Свободный вихрь с интенсивностью $\kappa = 0,1$ начинает двигаться вдали от топографического вихря (рис.

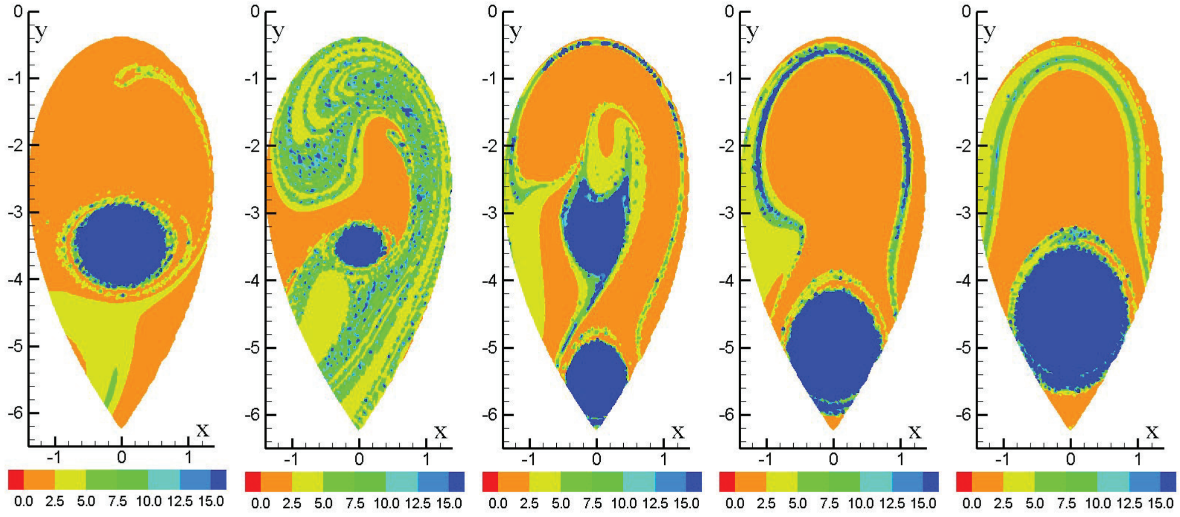

Рис. 3.6. Время выноса маркеров из области топографического вихря. (a) $\kappa = -0,5$, $y = -3,5$; (b) $\kappa = -0,1$, $y = -3,5$; (c) $\kappa = 0,1$, $y = -5,5$; (d) $\kappa = 0,3$, $y = -5$; (e) $\kappa = 0,5$, $y = -4,5$.

3.8a) в точке $x = -2$, $y = -8,4$. Далее вихрь захватывается в окретсности изолированной топографии (рис. 3.8b). На рис. 3.8c приведено распределение маркеров после того, как вихрь преодолел половину оборота вокруг топографии(черная линия соответствует траектории движения его центра). На рис. 3.8d изображено распределение маркеров после того, как вихрь совершил три полных оборота вокруг топографии. Видно, что почти все маркеры, соответствующие топографическому вихрю, вынесены в проточную область. Наконец, на рис. 3.8e приведено распределение оставшихся маркеров после четырех оборотов вихря.

На рис. 3.9 приведены аналогичные распределения маркеров для случая свободного вихря в среднем слое. Свободный вихрь начинает свое движение с точки $x = -1,18$, $y = -8$. Так как в врехнем слое теперь нет сингулярности, то замкнутая область рециркуляции, соответствующая свободному вихрю может исчезать и появляться. В результате темные маркеры покидают область свободного вихря (рис. 3.9c). Однако, как только область замкнутой рециркуляции снова появляется, она захватывает большую порцию маркеров, принадлежащих топографическому вихрю (рис. 3.9d). После того, как свободный вихрь покидает область топографии, он уносит с собой часть маркеров из области топографического вихря(рис. 3.9e).

Рисунки 3.8 и 3.9 также показывают, что эффективность адвекции жидких частиц крайне чувствительна к количеству оборотов, которые совершает свободный вихрь вокруг топографии. Общая закономерность состоит в том, что, чем больше оборотов успевает сделать свободный вихрь, тем большее количество маркеров переносится в проточную область или захватывается свободным вихрем. Для оценки такой динамики, вычислялось количество маркеров, покинувших область топографического вихря, в зависимости от количества оборотов

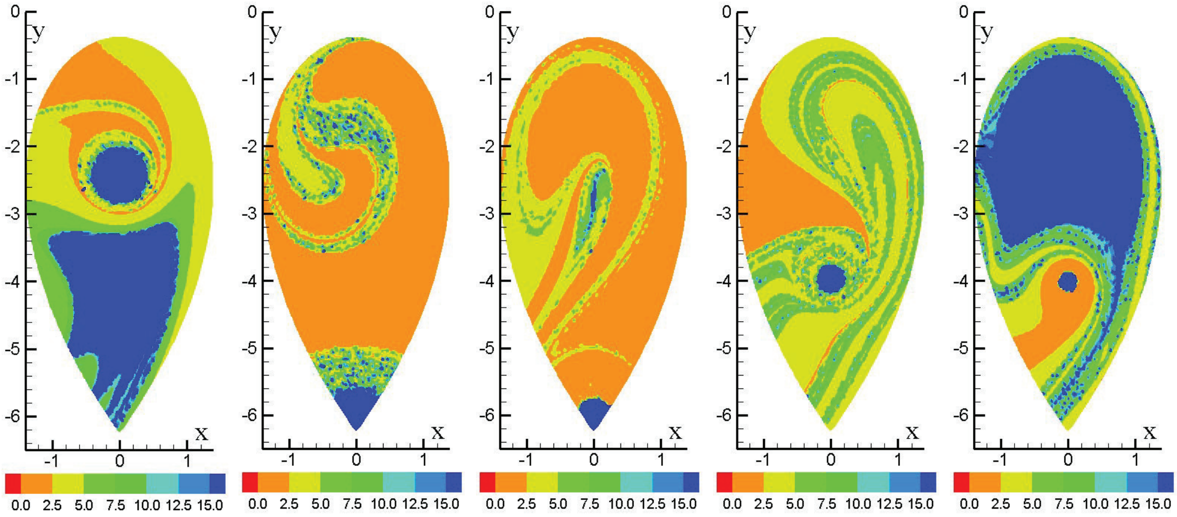

Рис. 3.7. Время выноса маркеров из области топографического вихря для случая свободного вихря в среднем слое. (a) $\kappa = -0,7$, $y = -2,5$; (b) $\kappa = -0,5$, $y = -6$; (c) $\kappa = 0,5$, $y = -6$; (d) $\kappa = -0,2$, $y = -4$; (e) $\kappa = 0,2$, $y = -4$.

свободного вихря. Так как динамика самого свободного вихря хаотическая, то невозможно заранее предсказать, какое количество оборотов он сделает вокруг изолированной топографии. Поэтому рассчитывались траектории, начинающиеся на отрезке ($x = -2$, $y \in [-8,42;\ -8,38]$) для вихря в верхнем слое и ($x = -1,18$, $y \in [-8,02;\ -7,98]$) для вихря в среднем слое.

Далее отслеживалась эволюция всех свободных вихрей, стартовавших с этими начальными положениями. Запоминалось количество оборотов N каждого свободного вихря вокруг топографии. Далее рассчитывалась эффективность адвекции с помощью выражения

$$E = n_a/n_i \tag{3.11}$$

где n_a – количество маркеров, вынесенных в проточную область, т.е. те маркеры, которые пересекли критическую отсечку $x = 5$, и $n_i = 10^4$ – начальное количество маркеров внутри области топографического вихря. Из рис.3.10 видно, что свободные вихри, совершающие одинаковое количество оборотов вокруг топографии, индуцируют примерно равную эффективность адвекции. В тоже время такие вихри могут стартовать с совершенно разных начальных положений.

На рис. 3.10 приведена эффективность адвекции E для случая свободного вихря в верхнем слое (рис. 3.10a,b) и в среднем слое (рис. 3.10c,d). Сравнивая эти рисунки, видно, что, во-первых, $N = 0,5$ соответствует случаю прохода свободного вихря рядом с топографией без захвата. Несмотря на то, что свободный вихрь слабый ($\kappa = 0,01$), он все же порождает очень эффективную адвекцию. Нескольких оборотов свободного вихря хватает, чтобы

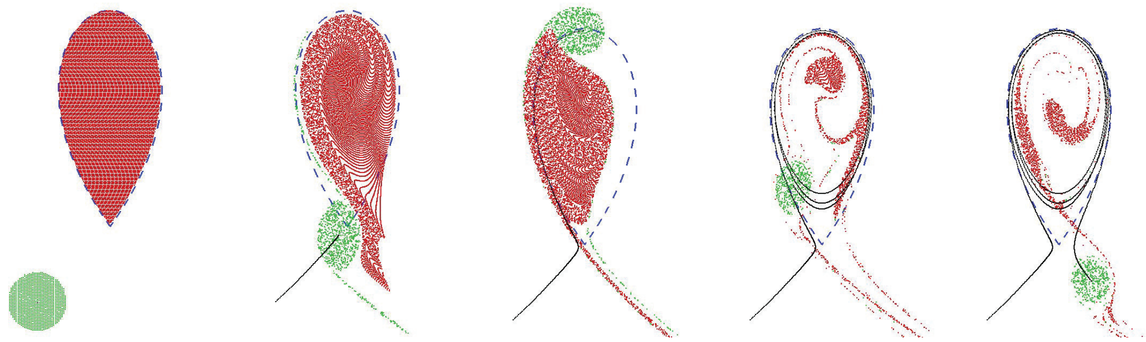

Рис. 3.8. Поверхностный монополь. Распределения маркеров в случае коротковременного воздействия интенсивного свободного вихря. Темные маркеры соответствуют топографическому вихрю, светлые – свободному. Штриховая линия – граница невозмущенного топографического вихря, черная сплошная линия – траектория движения свободного вихря. (a) $t = 0$; (b) $t = 30$; (c) $t = 90$; (d) $t = 240$; (e) $t = 315$.

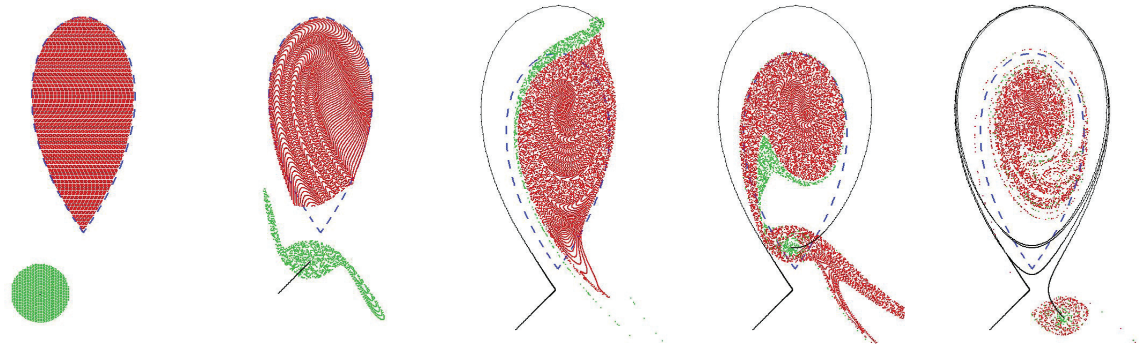

Рис. 3.9. Тоже, что и на рис. 3.8, но для свободного вихря в среднем слое. (a) $t = 0$; (b) $t = 18$; (c) $t = 96$; (d) $t = 120$; (e) $t = 315$

полностью вымыть все маркеры, изначально ассоциированные с топографическим вихрем. Во-вторых, направление вращения свободного вихря не оказывает существенного влияния на эффективность адвекции, вместо этого критическое значение оказывает интенсивность $|\kappa|$).

Как известно свободные вихревые образования могут иметь мультипольную структуру, причем наиболее известная мультипольная конфигурация – диполь, состоящий из противонаправленных вихрей. Интересной особенностью такой структуры является то, что она может распространятся на значительные расстояния в жидкости даже при отсутствии каких-либо внешних потоков. В следующих параграфах текущей главы рассматривается взаимодействие такой самодвижущейся структуры с изолированной топографической преградой: динамика самих вихрей, а также адвекция примеси, порожденная этим взаимодействием.

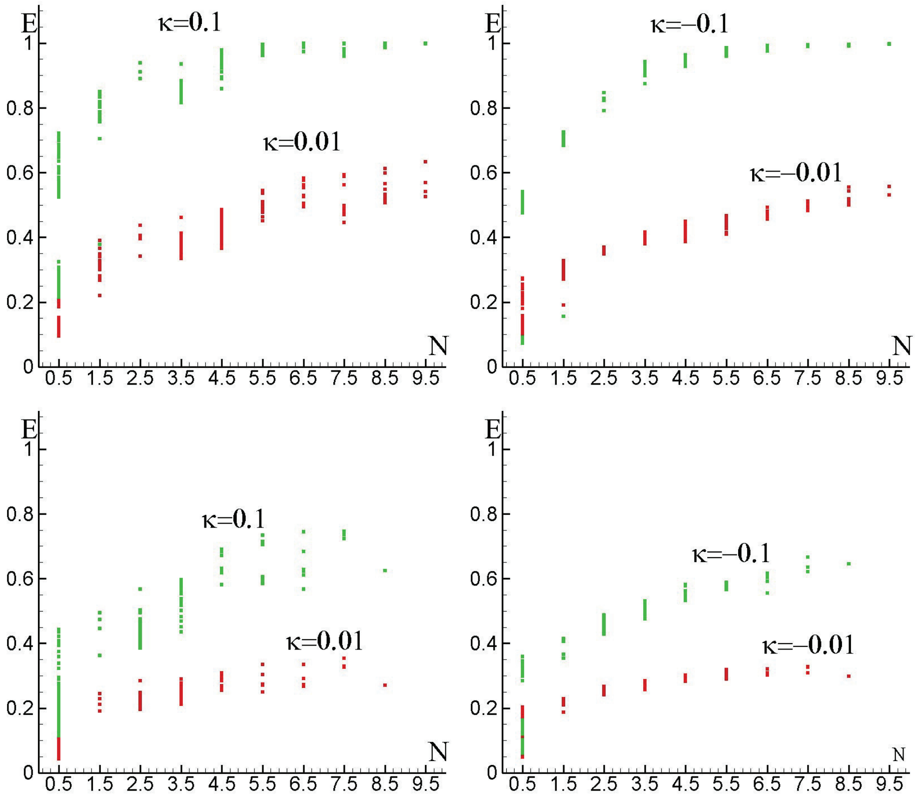

Рис. 3.10. Эффективность лагранжевого переноса E в зависимости от числа оборотов свободного вихря N. (a) свободный вихрь в верхнем слое с положительным κ; (b) свободный вихрь в верхнем слое с отрицательным κ; (c) свободный вихрь в среднем слое с положительным κ; (d) свободный вихрь в среднем слое с отрицательным κ

3.2. Динамика сингулярной вихревой пары при ее прохождении в окрестности изолированной топографической преграды

Исследование динамики много-вихревых систем, а также адвекции жидких частиц в них представляет интерес для большого количества научных дисциплин. Например, достаточно большое, но конечное, количество вихрей может быть использовано для построения низко-размерных моделей турбулентности [238, 242, 247, 359–363], в то время как уже достаточно малое количество вихрей демонстрируют сложную динамику. Простые решения, выражающиеся в квадратурах, могут быть получены только для случая одного и двух вихрей, в то время как трех-вихревая конфигурация уже не имеет решение в элементарных квадратурах, хотя и является интегрируемой [364–368] в смысле отсутствия нерегулярных решений (в отличии от задачи трех тел). Увеличение количества вихрей приводит к появлению неинтегрируемости [367, 369, 370] и общей неустойчивости системы.

Наложение различных ограничений на вихревую систему приводит к существенному изменению ее динамики. Например, наличие переменного сдвига и вращения в системе двух вихрей приводит к общей неинтегрируемости [11, 12, 371]. В тоже время, если зафиксировать расстояние между вихрями диполя, то такая структура будет взаимодействовать с другими структурами отлично от изолированного одиночного вихря или диполя без фиксированного плеча [372–377]. В отличии от изолированного монополя, диполь может двигаться самостоятельно. Данное свойство находит свое применение для моделирования, например, микроорганизмов [374, 378–380]. Наличие сплошных тел [381, 382] или границ [383–385], в том числе неоднородностей дна [61, 63, 324, 386], также изменяет характер движения вихрей.

В данном параграфе мы будем рассматривать задачу, имеющую отношение к океаническим вихрям (аналогичная задача с использованием метода контурной динамики рассматривается в работе [387]). Рассмотрим поведение самодвижующегося диполя при его взаимодействии с изолированной топографической преградой. В данном случае, все вихревые возмущения будут считаться точечными. При этом изолированная топографическая преграда будет зафиксирована в пространстве [340], а вихри диполя ничем не ограничены.

В тоже время, такая конфигурация является одним из вариантов задачи трех вихрей [364–366, 368]. С одной стороны фиксация одного из вихрей уменьшает число степеней свободы, однако с другой стороны – это приводит к исчезновению одного из инвариантов движения. Помимо этого в системе появляется неограниченно растущее решение, которое выражается в том, что вихревой диполь неограниченно удаляется от фиксированного вихря, играющего роль топографической преграды.

Также подобная конфигурация имеет отношение к квантовым жидкостям и квантовым вихрям. Например, в работе [388] анализируется рассеяние двухмерного темного солитона на изолированном квантовом вихре в конденсате Бозе-Эйнштейна.

Итак рассматривается движение двух точечных вихрей с интенсивностями μ и $-\mu$, располагающихся на расстоянии r_1 и r_2 от вихря с интенсивностью σ, зафиксированного в начале координат. Фиксированный вихрь остается все время неподвижным, играя роль изолированной топографической преграды [103, 173, 340, 389, 390].

Трех-вихревое взаимодействие описывается следующим гамильтонианом [364–366, 391–393],

$$H = -\mu^2 \log r_{12} + \sigma\mu \left(\log\left(r_1\right) - \log\left(r_2\right)\right) \equiv const, \tag{3.12}$$

где

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \tag{3.13}$$

является расстоянием между вихрями в диполе, θ_1 и θ_2 – полярные углы относительно фиксированного вихря. Такой гамильтониан совпадает по виду с геострофической функцией тока для некоторых геофизических потоков. В данном случае, все величины нормализованны на полную глубину потока H, постоянный параметр Кориолиса f и радиус деформации Россби $L_R = \frac{(gH)^{1/2}}{f}$, где g – ускорение свободного падения и U – масштаб скорости, следующим образом $(\sigma, \mu) = \frac{f}{H}(\sigma^*, \mu^*)$, $(r_1, r_2, r_{12}) = L_R^{-1}(r_1^*, r_2^*, r_{12}^*)$, $H = (UL_R)^{-1}\psi$.

Уравнения движения вихрей диполя имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1 &= -\frac{1}{r_1\mu}\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = \frac{\mu r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{r_{12}^2}, \\
\dot{r}_2 &= -\frac{1}{r_2(-\mu)}\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = \frac{\mu r_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{r_{12}^2}, \\
\dot{\theta}_1 &= \frac{1}{r_1\mu}\frac{\partial H}{\partial r_1} = -\mu\frac{r_1 - r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}{r_{12}^2 r_1} + \frac{\sigma}{r_1^2}, \\
\dot{\theta}_2 &= \frac{1}{r_2(-\mu)}\frac{\partial H}{\partial r_2} = \mu\frac{r_2 - r_1\cos(\theta_1 - \theta_2)}{r_{12}^2 r_2} + \frac{\sigma}{r_2^2}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Из первых двух уравнений следует, что

$$r_1\dot{r}_1 = r_2\dot{r}_2, r_1^2 - r_2^2 = M \equiv const, \tag{3.15}$$

что соответствует сохранению углового момента M. В классической задаче трех вихрей так же инвариантен импульс системы $L_x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$, $L_y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3$. То есть центр завихренности у такой системы всегда находится в одной точке $x_c = \frac{L_x}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}$, $y_c = \frac{L_y}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}$, где (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) – декартовы координаты трех вихрей с интенсивностями μ_1, μ_2, μ_3. Однако в рассматриваемой задаче импульс не является инвариантом, и, следовательно, положение центра завихренности изменяется. Продифференцируем выражения для импульса

$$\begin{aligned}
L_x &= \mu(r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2), \\
L_y &= \mu(r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

тогда

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\dot{L}_x &= \sigma\left(\frac{\sin\theta_2}{r_2} - \frac{\sin\theta_1}{r_1}\right), \\
\frac{1}{\mu}\dot{L}_y &= \sigma\left(\frac{\cos\theta_1}{r_1} - \frac{\cos\theta_2}{r_2}\right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

С учетом (3.12) и (3.15) получаем

$$r_{12} = H_0\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{\sigma}{\mu}} = H_0\left[\frac{M}{r_2^2} + 1\right]^{\frac{\sigma}{2\mu}}, \tag{3.18}$$

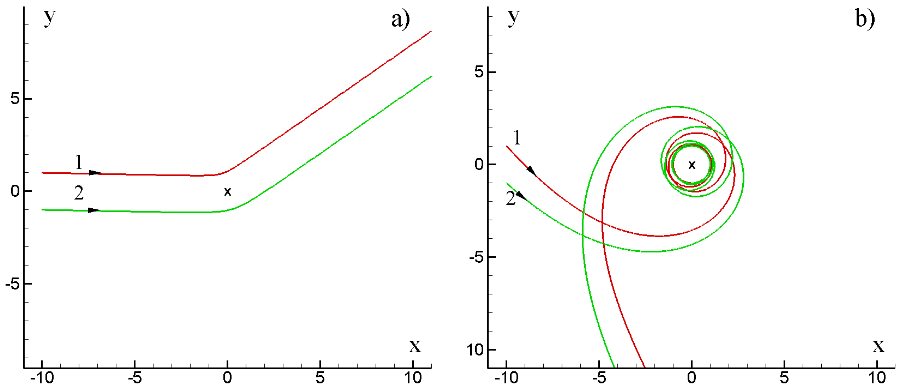

Рис. 3.11. Рассеивание сингулярного диполя фиксированным вихрем. (a) слабое рассеивание $\sigma = 0,1$, $\mu = 1$, $x_1 = x_2 = -10$, $y_1 = -y_2 = 1$, (b) существенное рассеивание $\sigma = 5$, $\mu = 1$, $x_1 = x_2 = -10$, $y_1 = -y_2 = 1$.

где $H_0 = e^{-\frac{H}{\mu^2}}$.

Учитывая выражения (3.15) и (3.18), можно свести систему (3.14) к системе с одной степенью свободы

$$\dot{r}_1 = \frac{\mu}{H_0^2}\sqrt{r_1^2 - M}\sin(\theta_1 - \theta_2)\left[1 - \frac{M}{r_1^2}\right]^{\frac{\sigma}{\mu}},$$
$$\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = -\frac{\sigma M}{r_1^2(r_1^2 - M)} - \frac{\mu}{H_0^2}\left[1 - \frac{M}{r_1^2}\right]^{\frac{\sigma}{\mu}} \times$$
$$\left(2 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\frac{2r_1^2 - M}{r_1\sqrt{r_1^2 - M}}\right). \tag{3.19}$$

Из (3.13) и (3.18) следует, что

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\sqrt{4r_1^2(r_1^2 - M) - \left(M - 2r_1^2 + H_0^2\left(1 - \frac{M}{r_1^2}\right)^{-\frac{\sigma}{\mu}}\right)^2}}{2r_1\sqrt{r_1^2 - M}}, \tag{3.20}$$

тогда первое выражение из (3.19) преобразуется к виду

$$\dot{r}_1 = \frac{\mu}{2r_1 H_0^2}\left[1 - \frac{M}{r_1^2}\right]^{\frac{\sigma}{\mu}} \times \tag{3.21}$$
$$\sqrt{4r_1^2(r_1^2 - M) - \left(M - 2r_1^2 + H_0^2\left(1 - \frac{M}{r_1^2}\right)^{-\frac{\sigma}{\mu}}\right)^2}.$$

В соответствии с (3.19), можно получить дополнительный инвариант в случае если принять угловой момент равным нулю, $M = 0$. Такое условие соответствует симметричному случаю, который рассматривается далее.

Симметричная конфигурация

Пусть существует радиальная симметрия, т.е. $M = 0$, тогда $r_1 = r_2$. Из (3.18) следует, что

$$L_x^2 + L_y^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = r_{12}^2 \equiv const. \tag{3.22}$$

Таким образом, расстояние между вихрями диполя остается постоянным r_{12}. Тогда, из (3.14) следует явное выражение для траектории движения вихрей диполя:

$$\frac{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2}{1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)} = -\frac{2\mu}{r_{12}^2}, \tag{3.23}$$

$$\cot\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = \frac{2\mu}{r_{12}^2}t - \sqrt{4\left(\frac{r_1(0)}{r_{12}}\right)^2 - 1}, \tag{3.24}$$

и

$$\frac{\dot{r}_1}{r_1} = \frac{\mu}{r_{12}^2} 2 \frac{\frac{2\mu}{r_{12}^2}t - \sqrt{4\left(\frac{r_1(0)}{r_{12}}\right)^2 - 1}}{1 + \left(\frac{2\mu}{r_{12}^2}t - \sqrt{4\left(\frac{r_1(0)}{r_{12}}\right)^2 - 1}\right)^2}, \tag{3.25}$$

$$\ln r_1 = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\frac{2\mu}{r_{12}^2}t - \sqrt{4\left(\frac{r_1(0)}{r_{12}}\right)^2 - 1}\right)^2\right) + \ln\frac{r_{12}}{2}, \tag{3.26}$$

наконец,

$$r_1 = \frac{r_{12}}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{2\mu}{r_{12}^2}t - \sqrt{4\left(\frac{r_1(0)}{r_{12}}\right)^2 - 1}\right)^2},$$
$$\theta_1 = \frac{2\sigma - \mu}{\mu}\left(\arctan\left(\frac{2\mu}{r_{12}^2}t - \sqrt{4\left(\frac{r_1(0)}{r_{12}}\right)^2 - 1}\right) - \arctan\left(\sqrt{4\left(\frac{r_1(0)}{r_{12}}\right)^2 - 1}\right)\right). \tag{3.27}$$

На рис. 3.11 и 3.12 приведены примеры траекторий вихрей и соответствующие компоненты импульса (3.15) при (a) $\sigma = 0,1$, $\mu = 1$, $x_1 = x_2 = -10$, $y_1 = -y_2 = 1$ и (b) $\sigma = 5$, $\mu = 1$, $x_1 = x_2 = -10$, $y_1 = -y_2 = 1$. Слабое отклонение траектории движения диполя приведено на рис. 3.11a. В работе [386] для квази-геострофических вихрей показана возможность аналогичного отклонения для случая цилиндрической топографической преграды.

На рис. 3.11b приведен пример существенного отклонения траектории движения диполя от своего прямолинейного распространения. Видно, что диполь совершает несколько

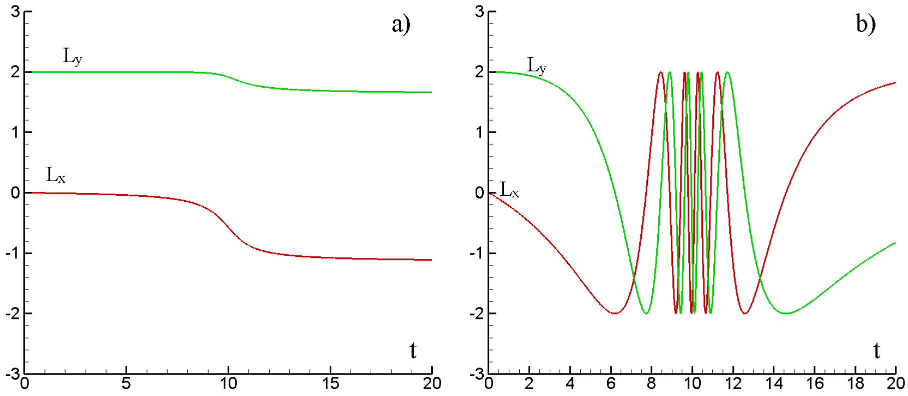

Рис. 3.12. Компоненты импульса L_x, L_y в зависимости от времени t для случаев с рис. 3.11.

полных оборотов вокруг фиксированного вихря, при этом компоненты импульса колеблются в ограниченных пределах (рис. 3.12b).

Из явного решения (3.25) можно получить угол, под которым диполь уходит на бесконечность

$$\theta_\infty = \frac{2\sigma - \mu}{\mu}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{4\left(\frac{r_1(0)}{r_{12}}\right)^2 - 1}\right)\right). \tag{3.28}$$

Из (3.27) следует, что диполь проходит через свою начальную координату при отношении интенсивностей $\sigma = \frac{\mu}{2}$.

Теперь рассмотрим общий случай несимметричной конфигурации при $M \neq 0$. Данное условие приводит к тому, что расстояние между вихрями диполя перестает быть постоянным, что значительно усложняет динамику системы.

Несимметричная конфигурация

При несимметричном расположении вихрей диполя в начальный момент угловой момент не сохраняется. Это приводит к тому, что, помимо того, что начинает меняться расстояние между вихрями диполя, так же появляется режим захвата диполя в окрестности фиксированного вихря. При этом, диполь начинает двигаться периодически в ограниченной области в окрестности фиксированного вихря. На рис. 3.13a приведен пример траектории диполя, двигающегося неограниченно после взаимодействия с фиксированным. На рис. 3.13b, наоборот, приведен случай, когда диполь двигается периодически в окрестности фиксированного вихря. На рис. 3.13c показан пограничный случай, когда вихри в точности двигаются по одной и той же орбите без сдвига.

Получим условие на захват диполя в окрестности фиксированного вихря. Без потери общности рассмотрим случай расположения всех трех вихрей на одной прямой в начальный

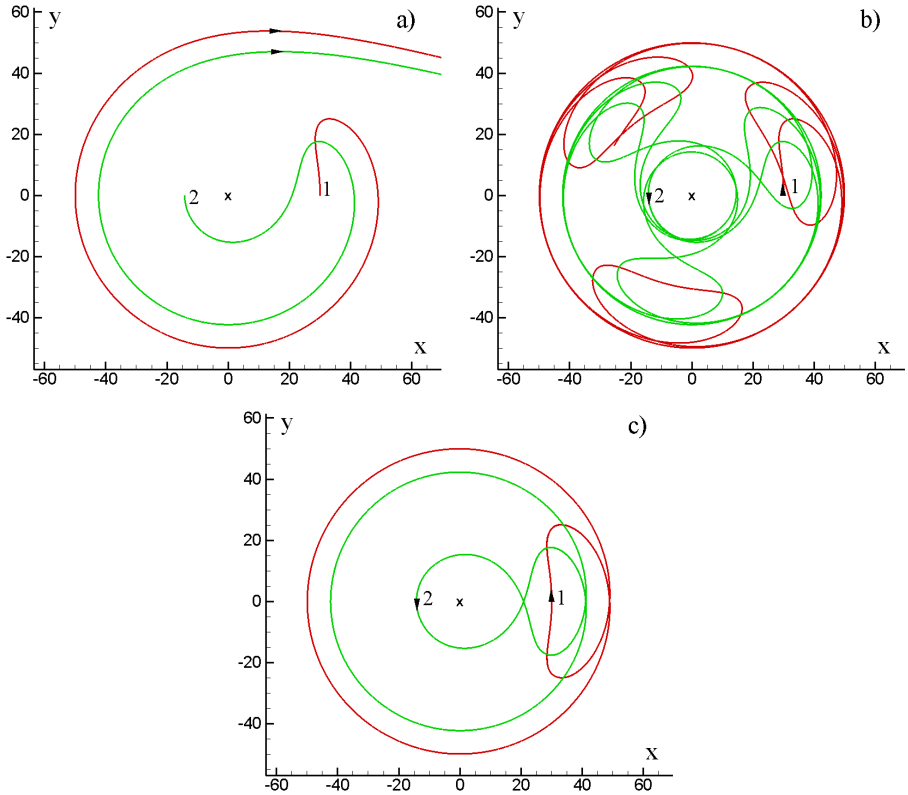

Рис. 3.13. Траектории вихрей диполя при $\sigma = 30$, $\mu = 10$, $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $x_1(0) = 30.1$. (a) рассеяние диполя фиксированным вихрем без захвата ($x_2(0) = -14.1917863$); (b) захват диполя в окрестности фиксированного вихря ($x_2(0) = -14.1917862$); (c) пограничный случай захвата диполя в окрестности фиксированного вихря, при котором вихри диполя двигаются в точности по одним и тем же орбитам ($x_2(0) = -14.191786264359$).

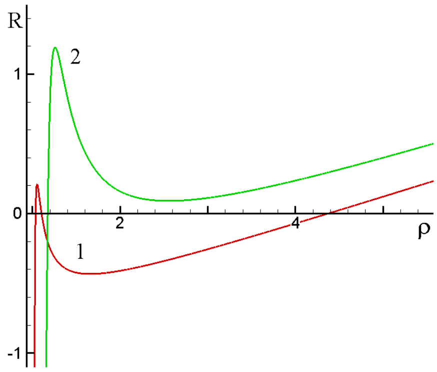

Рис. 3.14. Графики величины R в зависимости от ρ. Кривая 1 ($\tilde{H} \equiv 0,05$ и $\frac{\sigma}{\mu} = 1$) –захват диполя в окрестности фиксированного вихря, кривая 2 ($\tilde{H} \equiv 0,05$ и $\frac{\sigma}{\mu} = 2$) – неограниченное движение диполя.

момент времени, т.е. $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$. Такое расположение соответствует тому, что диполь начинает двигаться с экстремума (из (3.21) следует, что $\frac{dr}{dt} = 0$). В соответствии с рис. 3.13, в данном случае радиус r имеет единственный экстремум в только тогда, когда диполь двигается неограниченно, и, как минимум, два экстремума, когда диполь захватывается. Тогда из (3.21) следует, что диполь движется неограниченно тогда, когда

$$R \equiv 4\rho\left(\rho - 1\right) - \left(1 - 2\rho + \frac{H_0^2}{M}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^{-\frac{\sigma}{\mu}}\right)^2 > 0, \tag{3.29}$$

для любого $\rho \in \left(\frac{r_1^2(0)}{M}, \infty\right)$ и равен нулю только при $\rho = \frac{r_1^2(0)}{M}$, где $r_1\left(0\right)$ – начальное положение вихря с положительной интенсивностью. Если же у выражения (3.29) на этом интервале меняется знак, то это означает, что диполь захватывается в окрестности фиксированного вихря. Пример поведения функции R приведен на рис. 3.14. Кривая 1 соответствует случаю захвата диполя ($\tilde{H} \equiv \frac{H_0^2}{M} = 0,05$ и $\frac{\sigma}{\mu} = 1$), кривая 2 – неограниченное распространение диполя ($\tilde{H} = 0,05$ и $\frac{\sigma}{\mu} = 2$).

3.3. Перенос примеси при взаимодействии пары вихрей с изолированной топографической преградой

В предыдущем параграфе рассматривалась динамика самодвижущегося диполя при его взаимодействии с фиксированным вихрем. Показано, что возможны две динамические картины: (1) после взаимодействия с фиксированным вихрем, диполь продолжает свое само-индуцированное движение на бесконечность, (2) диполь захватывается в окрестности вихря и совершает колебательные движения в ограниченной области. Оба данных типа взаимодействия порождают перенос пассивных жидких частиц, как регулярный, так и хаотический. В данном параграфе анализируются различные режимы переноса жидких частиц, вызванного вихревым взаимодействием.

Как известно, трех-вихревая система является полностью интегрируемой. То есть траектории всех трех вихрей являются регулярными и устойчивыми к малым возмущениям. В тоже время именно трех-вихревая система порождает хаотическую динамику жидких частиц в своей окрестности [391, 392]. В симметричной конфигурации, система из четырех вихрей является интегрируемой, но адвекция жидких частиц в этой задаче также является хаотической [394]. Как и ранее, хаотическая адвекция в данном случае выражается в экспоненциальной расходимости изначально близких траекторий [353, 393]. В тоже время, вихревая система является полностью детерминированной.

При наличии внешних ограничений, такие системы могут демонстрировать хаотическое поведение при меньшем числе точечных вихрей. Например, система из трех вихрей становится хаотической при помещении ее в деформационный поток, состоящий из сдвиговой и вращательной компонент [227]. Динамика жидких частиц становится хаотической в таком потоке уже в системе из двух вихрей [371, 395, 396].

Рассмотрим вихревую конфигурацию, введенную в предыдущем параграфе. Самодвижущийся диполь с точечными вихрями, вращающимися в разные стороны, одинаковой интенсивности $|\mu|$ движутся в направлении фиксированного точечного вихря интенсивности σ, играющего роль изолированной топографической преграды. Функция тока потока имеет гамильтонову форму:

$$\psi = \sigma \ln (r_0) + \mu \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right), \tag{3.30}$$

где $r_0 = \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right)^{1/2}$ – расстояние от произвольной точки потока (x, y) до фиксированного вихря (x_0, y_0), $r_1 = \left((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \right)^{1/2}$, $r_2 = \left((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \right)^{1/2}$ – соответствующие расстояния до вихрей в диполе. Далее получаем уравнения движения для произвольной жидкой частицы в потоке:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\left(\sigma \frac{(y - y_0)}{{r_0}^2} + \mu \left(\frac{(y - y_1)}{{r_1}^2} - \frac{(y - y_2)}{{r_2}^2} \right) \right), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = \sigma \frac{(x - x_0)}{{r_0}^2} + \mu \left(\frac{(x - x_1)}{{r_1}^2} - \frac{(x - x_2)}{{r_2}^2} \right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Траектории самих вихрей в диполе определяются из соотношений 3.14. Проанализируем адвекцию жидких частиц, индуцируемую локализованным и нелокализованным движением диполя в окрестности фиксированного вихря.

Для оценки эффективности переноса в случае неограниченного распространения диполя будем использовать следующую характеристику. Распределим равномерно некоторое количество маркеров внутри области рециркуляции, индуцируемой изолированным диполем. Далее посчитаем число оставшихся маркеров внутри этой области после взаимодействия диполя с фиксированным вихрем. Изменение в количестве маркеров и будет свидетельствовать о эффективности переноса жидких частиц при взаимодействии.

В качестве начального распределения маркеров выберем область рециркуляции, индуцируемую изолированным самораспространяющимся диполем (см., например [397]). Пусть диполь двигается вдоль оси x, благодаря само-индукции, диполь двигается равномерно и прямолинейно со скоростью $U = -\frac{\mu}{2y_0}$, где $(0, y_0)$, $(0, -y_0)$ – начальные положения вихрей с интенсивностями μ и $-\mu$. Тогда траектории вихрей легко вычисляются $x_1 = x_2 = Ut,\ y_1 = -y_2 = y_0$. Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью распространения диполя U. В этой системе диполь стационарен, $x = x' - Ut,\ y = y'$. Уравнения движения жидких частиц в данной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= U - \mu\left(\frac{y - y_0}{x^2 + (y - y_0)^2} - \frac{y + y_0}{x^2 + (y + y_0)^2}\right), \\ \dot{y} &= \mu x\left(\frac{1}{x^2 + (y - y_0)^2} - \frac{1}{x^2 + (y + y_0)^2}\right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Так эта система автономна, то в ней существуют особые точки. В данном случае – это две гиперболические точки с координатами $\left(\sqrt{3}y_0, 0\right)$, $\left(-\sqrt{3}y_0, 0\right)$. Через эти точки проходит сепаратриса, отделяющая область рециркуляции и внешний поток. Жидкость, находящаяся внутри области рециркуляции не может пересечь данную сепаратрису, и, поэтому, такой диполь переносит фиксированный объем жидкости на любые расстояния. Линия тока $\psi = 0$, соответствующая сепаратрисе, находится из выражения:

$$\psi = -Uy + \frac{\mu}{2}\log\frac{x^2 + (y + y_0)^2}{x^2 + (y - y_0)^2}. \tag{3.33}$$

Тогда уравнение сепаратрисы имеет вид:

$$x^2 = \frac{(y + y_0)^2 e^{-\frac{y}{y_0}} - (y - y_0)^2}{1 - e^{-\frac{y}{y_0}}}. \tag{3.34}$$

Отсюда видно, что площадь области, ограниченной сепаратрисой зависит только от начального расстояния между вихрями диполя и интенсивности их вращения. Далее поместим такой объект в нашу систему и направим его по направлению к фиксированному вихрю.

Используя уравнение (3.34), распределим внутри ограниченной сепаратрисой области $\sim 10^4$ маркеров и проследим за их эволюцией в процессе взаимодействия диполя с фиксированным вихрем. На рис. 3.15 приведены последовательные распределения маркеров при

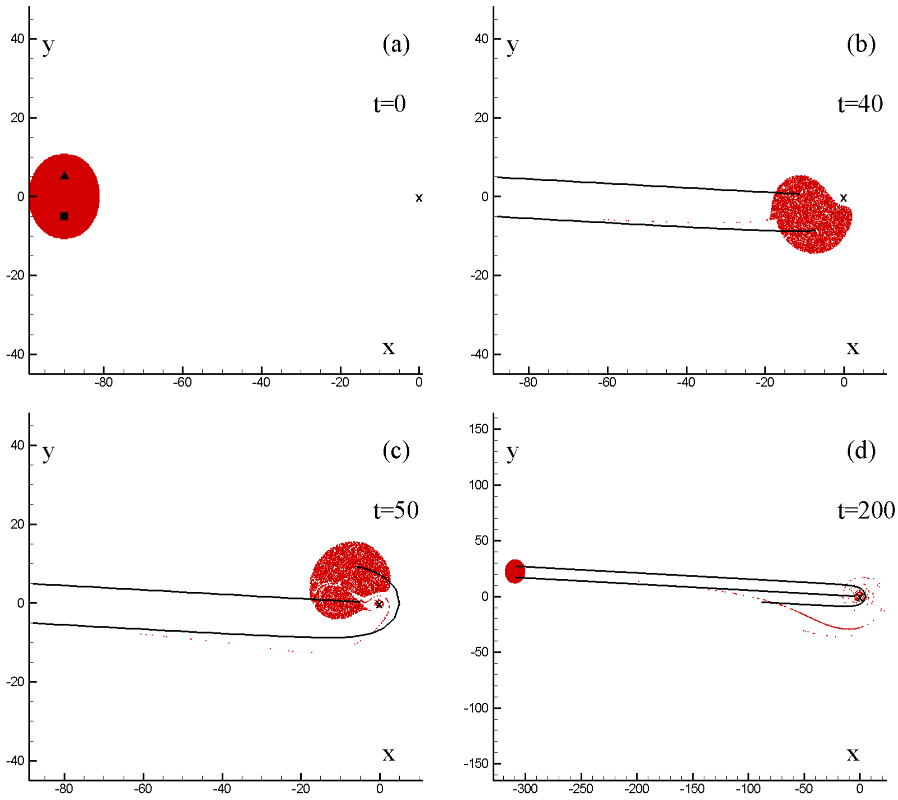

Рис. 3.15. Распределения маркеров в указанные моменты времени. $x_1(0) = x_2(0) = -90$, $y_1(0) = 5$, $y_2(0) = -5$ при $\sigma = 5$ и $\mu = 10$.

значениях параметров $x_1(0) = x_2(0) = -90$, $y_1(0) = 5$, $y_2(0) = -5$, $\sigma = 5$ и $\mu = 10$. Максимальный радиус пятна маркеров, в соответствии с (3.34), равен $\sim 10,43$. Изначально диполь расположен далеко от фиксированного вихря, так что перед началом взаимодействия с фиксированным вихрем он проходит существенное расстояние. Причем диполь начинает терять маркеры только вблизи фиксированного вихря, поэтому, можно считать, что выбор начального распределения маркеров в соответствии с стационарной формой 3.34 оправдан.

На рис. 3.15 приведена типичная эволюция распределения маркеров. Диполь сначала приближается к фиксированному вихрю, далее взаимодействует с ним (см. рис. 3.15c). После взаимодействия диполь покидает окрестность фиксированного вихря и удаляется на бесконечность. Причем часть маркеров остаются в окрестности фиксированного вихря. Как только влияние фиксированного вихря начинает ослабевать, диполь перестает терять маркеры (рис. 3.15d). Как видно из рис. 3.15b, диполь начинает терять маркеры около отметки $x = -60$, следовательно отсюда влияние фиксированного вихря начинает быть существенным. Из рис. 3.15d видно, что диполь перестает терять маркеры в окрестности $x = -200$.

Очевидно доля маркеров, потерянная диполем в процессе движения, существенно зависит от параметров системы и начальной ориентации диполя относительно фиксированного вихря. В дальнейших численных расчетах будем считать, что диполь заведомо перестает терять маркеры на расстоянии 300 единиц от фиксированного диполя. В соответствии с (3.34) объем жидкости, которую переносит, диполь зависит от расстояния между вихрями диполя и от его скорости само-распространения. Эти параметры и будем менять с целью установить различные режимы адвекции жидкости. Помимо этого важной характеристикой является угол, под которым диполь приближается к фиксированному вихрю.

На рис. 3.16 и 3.17 приведены доли η маркеров, потерянных диполем, центр которого изначально располагается в точке $(x_c,\, y_c)$, при взаимодействии с фиксированным вихрем относительно начального распределения, в зависимости от угла α, под которым диполь приближается к фиксированному вихрю. Кривые на рис. 3.16 слева направо и сверху вниз соответствуют начальному расстоянию между вихрями в диполе $r_{12}\,(0)$: 6, 10, 14, 20 при параметрах $\mu = 10$, $\sigma = 5$, $x_c\,(0) = -90$, $y_c\,(0) = 0$. Аналогичные кривые с рис. 3.17 соответствуют интенсивности диполя μ: 5, 10, 15, 20, 25, 30 при параметрах $\sigma = 5$, $x_c\,(0) = -90$, $r_{12}\,(0) = 10$, $y_c\,(0) = 0$. На обоих рисунках видно, что наиболее эффективная потеря маркеров диполем происходит в случае, когда пара приближается к фиксированному вихрю немного несимметрично в сторону вращения фиксированного вихря (область отрицательных углов на рис. 3.16, 3.17). Из рис. 3.17 видно, что, чем больше интенсивность диполя, тем меньше маркеров он теряет. То есть, чем выше скорость само-распространения диполя, тем быстрее он преодолевает влияние фиксированного вихря и тем более цельным остается.

Теперь перейдем к случаю захвата диполя в локализованную область в окрестности фиксированного вихря. Так как диполь находится достаточно близко от фиксированного вихря, то разделить жидкость, связанную с диполем, как в случае нелокализованного движения, невозможно. Однако в случае захвата диполь движется периодически во вращающейся системе координат. Данное периодическое движение выступает в роли периодического возмущения для динамики жидких частиц, аналогично задаче о захвате монопольного вихря в окрестности топографии из параграфа 2.1. Поэтому для анализа переноса жидких частиц можно применить методы из теории периодически-возмущаемых динамических систем. Построение сечений Пуанкаре является удобным способом определить области хаотического и регулярного переноса жидких частиц. Для построения сечений необходимо вычислить период оборота диполя вокруг фиксированного вихря и далее отображать положения жидких частиц через этот период. Если начальное положение жидкой частицы находится в регулярной области, то на сечениях Пуанкаре будет видна замкнутая орбита, проходящая через это начальное положение. Если же начальное положение попадает в область хаотической динамики, то траектория будет выглядеть как набор бессвязных точек [393].

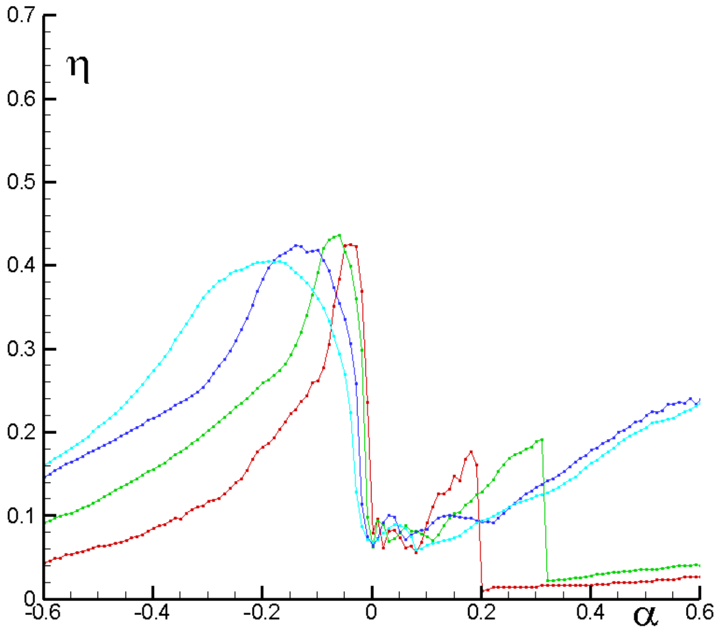

Рис. 3.16. Доля маркеров, потерянная диполем при взаимодействии с фиксированным вихрем в зависмоти от угла, под которым диполь приближается к фиксированному вихрю. Кривые слева направо и сверху вниз соответствуют начальному расстоянию между вихрями диполя $r_{12}(0)$: 6, 10, 14, 20 при параметрах $\mu = 10$, $\sigma = 5$, $x_c(0) = -90$, $y_c(0) = 0$.

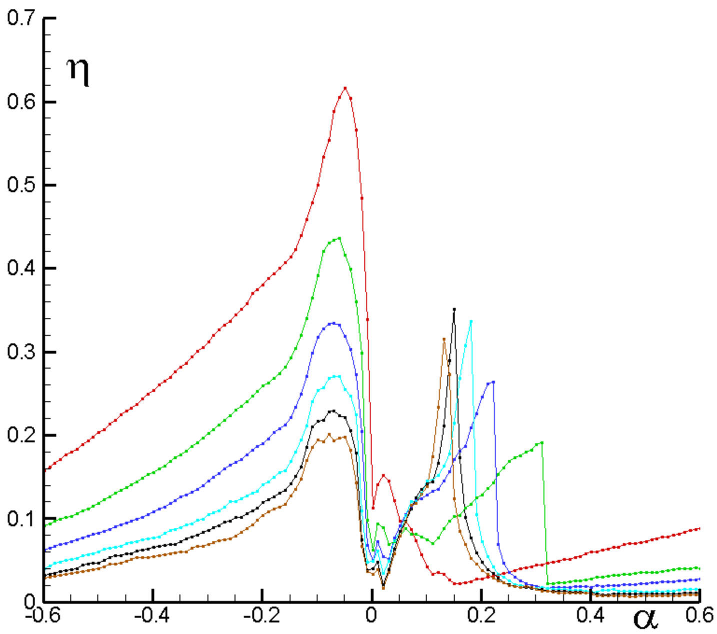

Рис. 3.17. Доля маркеров, потерянная диполем при взаимодействии с фиксированным вихрем в зависмоти от интенсивности диполя. Кривые слева направо и сверху вниз соответствуют интенсивности диполя μ: 5, 10, 15, 20, 25, 30 при параметрах $\sigma = 5$, $x_c(0) = -90$, $r_{12}(0) = 10$, $y_c(0) = 0$.

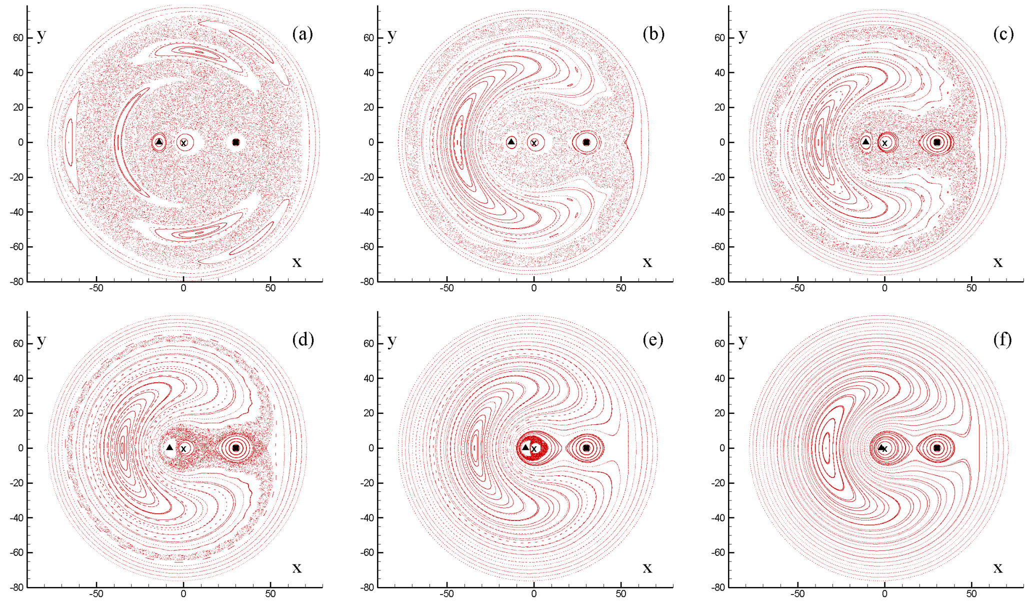

Рис. 3.18. Сечения Пуанкаре во вращающейся системе координат. Начальные положения положительного вихря, отрицательно вихря и фиксированного вихря соответственно обозначены треугольников, квадратом и крестом. Значения параметров $\sigma = 30, \mu = 10, x_1(0) = 30,1, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$ постоянны для всех фрагментов. Положение положительного вихря меняется следующим образом: (a) $x_2(0) = -14,19178$; (b) $x_2(0) = -13$; (c) $x_2(0) = -11$; (d) $x_2(0) = -8$; (e) $x_2(0) = -5$; (f) $x_2(0) = -2$.

На рис. 3.18 приведены сечения Пуанкаре для различных значений начального положения положительного вихря при неизменных остальных параметрах: $\sigma = 30, \mu = 10, x_1(0) = 30,1, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$. На рис. 3.18a для $x_2(0) = -14,19178$ изображен случай наиболее эффективного хаотического переноса жидких частиц [172, 398, 399]. Под эффективностью хаотического переноса, в данном случае, понимается наибольшее мера хаотических начальных положений по сравнению с регулярными.

Из рис. 3.18a видно, что практически все области регулярного переноса разрушены, за исключением нескольких областей устойчивости. На рис. 3.18b,c видно, что значительная часть траекторий жидких частиц становятся хаотическими, формируя хаотическое море [391, 392] вокруг устойчивой зоны рециркуляции. С дальнейшим приближением положительного вихря к отрицательному, площадь хаотического моря уменьшается (3.18d) до тех пор, пока почти все траектории в окрестности регулярной области рециркуляции перестают быть хаотическими (3.18e). В тоже время, остается незначительная область хаотического переноса из-за быстрых колебаний положительного вихря вокруг фиксированного вихря. Если положительный вихрь стартует совсем рядом с фиксированным вихрем, так что они воздействуют на третий вихрь как единое целое, динамика жидких частиц становится почти всюду регулярной (3.18f).

3.4. Взаимодействием двухслойного компенсированного вихря с изолированной преградой в двухслойной жидкости

В данном параграфе рассматривается двухслойная компенсированная вихревая пара, которую называют хетоном [126], взаимодействующая с подводной возвышенностью цилиндрической формы. Динамика таких вихревых образований в различных средах представляет существенный интерес [134, 139, 140, 143, 146, 148, 156, 255, 400, 401]. В работе [324] рассматривается динамика хетона, состоящего из большого набора точечных вихрей, при его взаимодействии с изолированной топографической преградой и несколькими изолированными топографическими преградами [344].

В данном параграфе рассматривается подход, основанный на использовании точечных вихрей. Для устойчивого хетона выделяются типичные режимы движения, включая режимы нерегулярной динамики.

Известно, что в аналогичной баротропной модели (см. параграф 3.2 и работы [13, 17, 386]) существует два типа взаимодействия самодвижущейся вихревой пары и изолированного препятствия на вращающейся плоскости. Во-первых, пара, после взаимодействия с преградой, продолжить свое движение на бесконечность. Во-вторых, пара может захватиться в области топографической преграды и продолжить свое движение в ограниченной области. Будем рассматривать аналогичные режимы движения двухслойной вихревой пары при ее взаимодействии с цилиндрической изолированной топографической преградой.

Рассмотрим двухслойную идеальную жидкость на f- плоскости в квази-геострофическом приближении и в приближении твердой крышки. Каждый слой жидкости имеет постоянную различную плотность [253, 314]. Тогда выполняется закон сохранения потенциальной завихренности

$$\frac{D_i q_t}{Dt} = 0, \tag{3.35}$$

с

$$q_1 = \Delta\psi_1 + \frac{f}{H_1}\zeta, \quad q_2 = \Delta\psi_2 + \frac{f}{H_2}\left(\tilde{h} - \zeta\right), \tag{3.36}$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, ψ_i – функция тока, равная аномалии давления p_i в i-ом слое ($i = 1$ соответствует верхнему слою) глубины H_i и плотности ρ_i, f – параметр Кориолиса, $\tilde{h}$ – изолированное возмущение дна и $\zeta = \frac{f}{g^*}(\psi_2 - \psi_1)$ – возмущение границы раздела между слоями, $g^* = g\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_2}$ – редуцированное ускорение свободного падения.

Функция тока ψ_i может быть представлена посредством двух вспомогательных функций: баротропной Ψ и бароклинной Ψ' следующим образом

$$\psi_1 = \Psi - \frac{H_2}{H}\Psi', \ \psi_2 = \Psi + \frac{H_1}{H}\Psi', \tag{3.37}$$

где

$$H\Delta\Psi = H_1 q_1 + H_2 q_2 - f\tilde{h}, \ \ \Delta\Psi' - k_1^2\Psi' = q_2 - q_1 - f\frac{\tilde{h}}{H_2}, \tag{3.38}$$

$k_1 = \frac{1}{L_D} = f\left(\frac{H}{g^* H_1 H_2}\right)^{1/2}$, $H = H_1 + H_2$ – полная глубина и L_D – внутренний радиус деформации.

Будем рассматривать возмущение дна в виде изолированного цилиндра с радиусом a и высотой h, т.е. $\tilde{h} = \begin{cases} h, \ r \le a, \\ 0, \ r > a, \end{cases}$. Тогда соответствующие баротропная и бароклинная функции тока удовлетворяют выражениям [119]

$$H\Delta\Psi_0 = -fh, \ \ \Delta{\Psi_0}' - k_1^2{\Psi_0}' = -\frac{f\tilde{h}}{H_2}. \tag{3.39}$$

Отсюда получаем решения вида [119]

$$\Psi_0 = -\frac{fha^2}{4H}\begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^2, \ r \le a, \\ 1 + 2\log\frac{r}{a}, \ r > a, \end{cases}$$

$$\Psi_0{}' = -\frac{fh^2}{k_1^2 H_2}\begin{cases} 1 - ak_1 I_0\left(k_1 r\right) K_1\left(ak_1\right), \ r \le a, \\ ak_1 I_1\left(ak_1\right) K_0\left(k_1 r\right), \ r > a. \end{cases} \tag{3.40}$$

Решения (3.37)–(3.40) выбираются в таком виде, чтобы обеспечить появление антициклонической относительной завихренности при положительном возвышении дна ($h > 0$).

Полный поток состоит из компонент, описывающих влияние цилиндра и хетона,

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1, \ \ \Psi' = \Psi_0{}' + \Psi_1{}'. \tag{3.41}$$

Пусть точечный вихрь интенсивности μ_1 располагается в верхнем слое, а точечный вихрь интенсивности μ_2 в нижнем слое. Тогда

$$q_i = f\mu_i L_0^2 \delta\left(x - x_i\right)\delta\left(y - y_i\right), \tag{3.42}$$

где $\delta\left(\cdot\right)$ – дельта-функция Дирака, x, y – декартовы координаты, x_i, y_i – положение i-го вихря, L_0 – характеристический горизонтальный масштаб. Отсюда

$$\Delta\Psi_1 = \sum_{i=1}^{2} H_i f\mu_i L_0^2 \delta\left(x - x_i\right)\delta\left(y - y_i\right),$$

$$\Delta\Psi_1{}' - k_1^2\Psi_1{}' = \sum_{i=1}^{2}\left(-1\right)^i f\mu_i L_0^2 \delta\left(x - x_i\right)\delta\left(y - y_i\right). \tag{3.43}$$

Следовательно

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^{2}\frac{fH_i\mu_i}{k_0^2}\log\left(k_0\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\right|\right),$$

$$\Psi_1{}' = \sum_{i=1}^{2}\left(-1\right)^{i+1}\frac{f\mu_i}{k_0^2}K_0\left(k_1\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\right|\right), \tag{3.44}$$

где $k_0 = \frac{1}{L_0}$ и $\mathbf{r} = \left(x, y\right)$, $\mathbf{r}_i = \left(x_i, y_i\right)$. Используя (3.40), (3.41) и геострофические соотношения, получаем

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = -\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial y} = \frac{f}{H}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{(y - y_i)\mu_i}{R_i k_0^2}V_\alpha\left(R_i\right) - hyW_\alpha\left(r\right)\right),$$

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x} = \frac{f}{H}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{(x - x_i)\mu_i}{R_i k_0^2}V_\alpha\left(R_i\right) - hxW_\alpha\left(r\right)\right), \tag{3.45}$$

где $\alpha = 1, 2$ соответствует верхнему и нижнему слоям, соответственно и $R_i = \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right)^{1/2}$,

$$V_\alpha\left(R_i\right) = \left[\frac{H_i}{R_i} + \left(-1\right)^{i-\alpha+2}k_1 H_{3-\alpha}K_1\left(k_1 R_i\right)\right], \tag{3.46}$$

$$W_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} + (-1)^{3-\alpha} \frac{H_{3-\alpha}}{H_2} \frac{aI_1(k_1 r)K_1(ak_1)}{r}, & r \le a, \\ \frac{a^2}{2r^2} + (-1)^{3-\alpha} \frac{H_{3-\alpha}}{H_2} \frac{aI_1(ak_1)K_1(k_1 r)}{r}, & r > a. \end{cases} \tag{3.47}$$

Перепишем выражение (3.45) в безразмерной форме с помощью замены переменных $(x, y, x_i, y_i, r, R_i, a, h, H, H_i) = k_1^{-1}(x, y, x_i, y_i, r, R_i, a, h, H, H_i)^*$, $t = f^{-1}t^*$. Опуская звездочку, получаем

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = -\frac{1}{H}\left(\gamma^2 \sum_{i=1}^{2} \frac{(y-y_i)\mu_i}{R_i} \Xi_\alpha(R_i) - hy\Phi_\alpha(r)\right),$$
$$\frac{dy_\alpha}{dt} = \frac{1}{H}\left(\gamma^2 \sum_{i=1}^{2} \frac{(x-x_i)\mu_i}{R_i} \Xi_\alpha(R_i) - hx\Phi_\alpha(r)\right), \tag{3.48}$$

где $R_i = \left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right)^{1/2}$, а функция

$$\Xi_\alpha(R_i) = \left[\frac{H_i}{R_i} + (-1)^{i-\alpha+2} k_1 H_{3-\alpha} K_1(R_i)\right], \tag{3.49}$$

$$\Phi_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} + (-1)^{3-\alpha} \frac{H_{3-\alpha}}{H_2} \frac{aI_1(r)K_1(a)}{r}, & r \le a, \\ \frac{a^2}{2r^2} + (-1)^{3-\alpha} \frac{H_{3-\alpha}}{H_2} \frac{aI_1(a)K_1(r)}{r}, & r > a \end{cases} \tag{3.50}$$

описывает влияние цилиндрического препятствия в нижнем слое.

Уравнения движения самих вихрей получаются путем подстановки координат вихрей в систему (3.45) и удалением самоиндукции. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} = {} & -\frac{\gamma^2}{H} \frac{\mu_{3-\alpha} H_{3-\alpha}}{r_{12}} (y_\alpha - y_{3-\alpha}) \left[\frac{1}{r_{12}} - K_1(r_{12})\right] + \\ & \frac{h}{H} y_\alpha \Phi_\alpha(r_\alpha) \\ \frac{dy_\alpha}{dt} = {} & \frac{\gamma^2}{H} \frac{\mu_{3-\alpha} H_{3-\alpha}}{r_{12}} (x_\alpha - x_{3-\alpha}) \left[\frac{1}{r_{12}} - K_1(r_{12})\right] - \\ & \frac{h}{H} x_\alpha \Phi_\alpha(r_\alpha), \end{aligned} \tag{3.51}$$

где $r_\alpha = (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)^{1/2}$, $\alpha = 1, 2$, $r_{12} = \left((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\right)^{1/2}$.

Далее будем анализировать поведение вихрей хетона в зависимости от его начального положения и интенсивности.

3.4.1. Неограниченная динамика хетона при взаимодействии с цилиндрической подводной преградой

Так как рассматривается модель точечных вихрей, то все эффекты, связанные с перераспределением завихренности в системе, не учитываются. В тоже время интенсивные вихри,

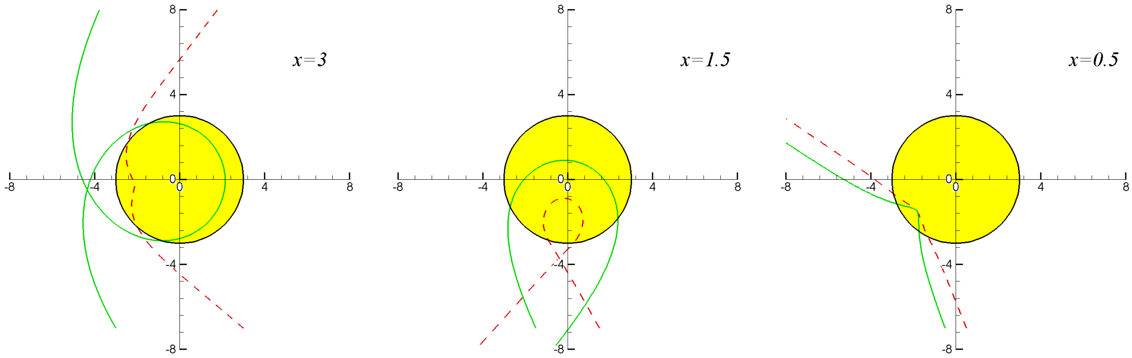

Рис. 3.19. Неограниченное движение наклонного хетона с симметричной начальной конфигурацией. Сплошная (штриховая) линия соответствует траектории верхнего (нижнего) вихря. $\mu = -21$, $y = -7$ для указанных x.

которые долгое время сохраняют свою целостность, успешно моделируются точечными вихрями [177, 178]. На рис. 3.19 представлены траектории наклонного хетона (пара вихрей чьи центры разнесены на некоторое расстояние друг относительно друга), изначально направленного в сторону цилиндрической преграды. Чтобы структура индуцировала свое прямолинейное распространение необходимо, чтобы выполнялось условие $H_1\mu_1 = -H_2\mu_2$. Все дальнейшие вычисления выполнены для физических параметров $H_1 = H_2 = 1/2, h = 0,1, R = 3$. На рис. 3.19 приведены траектории вихрей хетона для различных начальных расстояний между вихрями хетона $\mu_1 = -\mu_2 = \mu = -21$, $y_1 = y_2 = y = -7$, $x_1 = -x_2 = x$.

Из рисунка видно, что при начальном расстоянии между вихрями $x = 3$, траектория вихря верхнего слоя опоясывает цилиндр, при этом вихрь нижнего слоя замедляется. Дальше вихри снова объединяются в самораспространяющуюся пару и движутся в неограниченной области. При $x = 2,5$, траектория нижнего вихря имеет особую точку, а петля на траектории верхнего вихря становится меньше по сравнению с предыдущим случаем. При $x = 0,5$, хетон слабо взаимодействует с цилиндрической преградой. В тоже время, направление движения хетона сильно меняется после взаимодействия. Без преграды, хетон бы двигался прямолинейно вдоль оси y. В целом, можно сделать вывод, что уменьшение расстояния между вихрями приводит к более слабому взаимодействию с препятствием. То есть, чем быстрее скорость самодвижения хетона, тем слабее влияние внешних факторов на его динамику.

3.4.2. Захват хетона в области топографической преграды

Как было показано в параграфе 3.2 в аналогичной баротропной задаче, вихревая пара может захватываться в области изолированной топографической преграды и, как следствие,

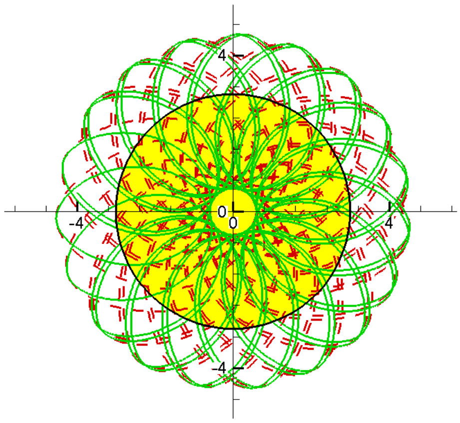

Рис. 3.20. Ограниченная динамика хетона в случае симметричных начальных условий. Сплошная (штриховая) линия соответствует траектории вихря верхнего (нижнего) слоя. Параметры: $\mu = 21$, $y = -2$, $x = -0,5$.

двигаться в ограниченной области. Аналогичная динамика возможна и для случая хетона в двухслойной модели. В тоже время наличие стратификации потока и расположение вихрей в различных слоях приводит к появлению более сложной динамики, по сравнению с баротропной моделью. Основное качественное отличие заключается в том, что в баротропной модели, при изначально симметричном расположении вихрей пары относительно изолированной преграды, будет наблюдаться ее неограниченное движение. В случае хетона, однако, возможны локализованные режимы его движения даже при изначально симметричной конфигурации. Это связано с тем, что, в отличии от баротропного случая, расстояние между вихрями хетона r_{12} может изменяться. Более того, как будет продемонстрировано далее, разница между случаями баротропной вихревой пары и хетона более глубокая. А именно, траектории вихрей в баротропном случае всегда регулярны, как в случае неограниченной, так и в случае ограниченной динамики. В тоже время, траектории вихрей хетона проявляют черты нерегулярной динамики, что выражается в экспоненциальной чувствительности к малым изменениям в начальных условиях [353, 354].

Расположим вихри хетона симметрично относительно цилиндрической преграды, которая находится в начале координат. Как видно из рис. 3.20, существует режим ограниченной динамики хетона.

На первый взгляд, траектории вихрей выглядят регулярными, т.е. устойчивыми к малым возмущениям. Тем не менее, детальный анализ показывает, что движение хетона является хаотическим, что выражается в экспоненциальной расходимости изначально близких траекторий. Для подтверждения этого наблюдения, проведем следующий численный эксперимент. Будем поступательно менять координату y начального положения хетона при постоянных значениях начальной координаты x и $\mu = 21$, $x = 0,01$. Далее вычисляем число пересечений между траекториями вихрей нижнего и верхнего слоев с осью ординат на протяжении 10^6 безразмерных единиц времени. Малое количество пересечений будет указывать на то, что хетон не захватывается в окрестности топографии и продолжает движение на бесконечность после взаимодействия.

На рис. 3.21a представлено число пересечений траекторий вихрей с осью ординат. Одно пересечение соответствует половине оборота вихря вокруг центра координат. Как видно из рисунка, система демонстрирует хаотическую динамику захвата хетона в окрестности топографии [103, 320, 347, 402]. Таким образом, предсказание поведения данной траектории по известному поведение траекторий с близкими начальными положениями невозможно. Действительно, последовательные изменения начального положения на оси ординат приводят к скачкообразным изменениям на графиках, изображающих число пересечений. Из рис. 3.21b,c, на которых приведены аналогичные графики, отмасштабированные на меньшие интервалы, содержащие такое же количество начальных положений, видно, что динамика действительно является хаотической. Из рисунков видно, что любой конечный интервал начальных условий содержит в себе начальные условия, приводящие ко всем возможным траекториям вихрей. Такое поведение свидетельствует о фрактальной структуре множества начальных условий для траекторий вихрей [354]. Аналогичная динамика наблюдается, если изменять другие параметры системы. Будем менять начальное расстояние между вихрями хетона при фиксированном начальном положении на оси ординат. На рис. 3.21d приведены графики числа пересечений траекторий вихрей с осью ординат в зависимости от начального расстояния между вихрями x, при условии $\mu_1 = -\mu_2 = 30, y_1(0) = y_2(0) = -8$. Такое хаотическое поведение является отличительной чертой динамики именно хетона и не наблюдается в аналогичной баротропной модели [13, 17]. Более того, если рассматривать вихревую пару с вихрями, располагающимися в одном слое в аналогичной слоистой модели, то динамика будет регулярной, как и в баротропном случае.

Теперь рассмотрим специфическую симметричную конфигурацию - выровненный хетон, т.е. такой хетон, вихри которого в начальный момент располагается строго один над другим. В неограниченной области, такой хетон будет оставаться неподвижным, так как он не индуцирует самодвижение. В нашем случае, влияние топографической преграды приводит к тому, что вихри перестают быть строго выровненными и, как следствие, появляется

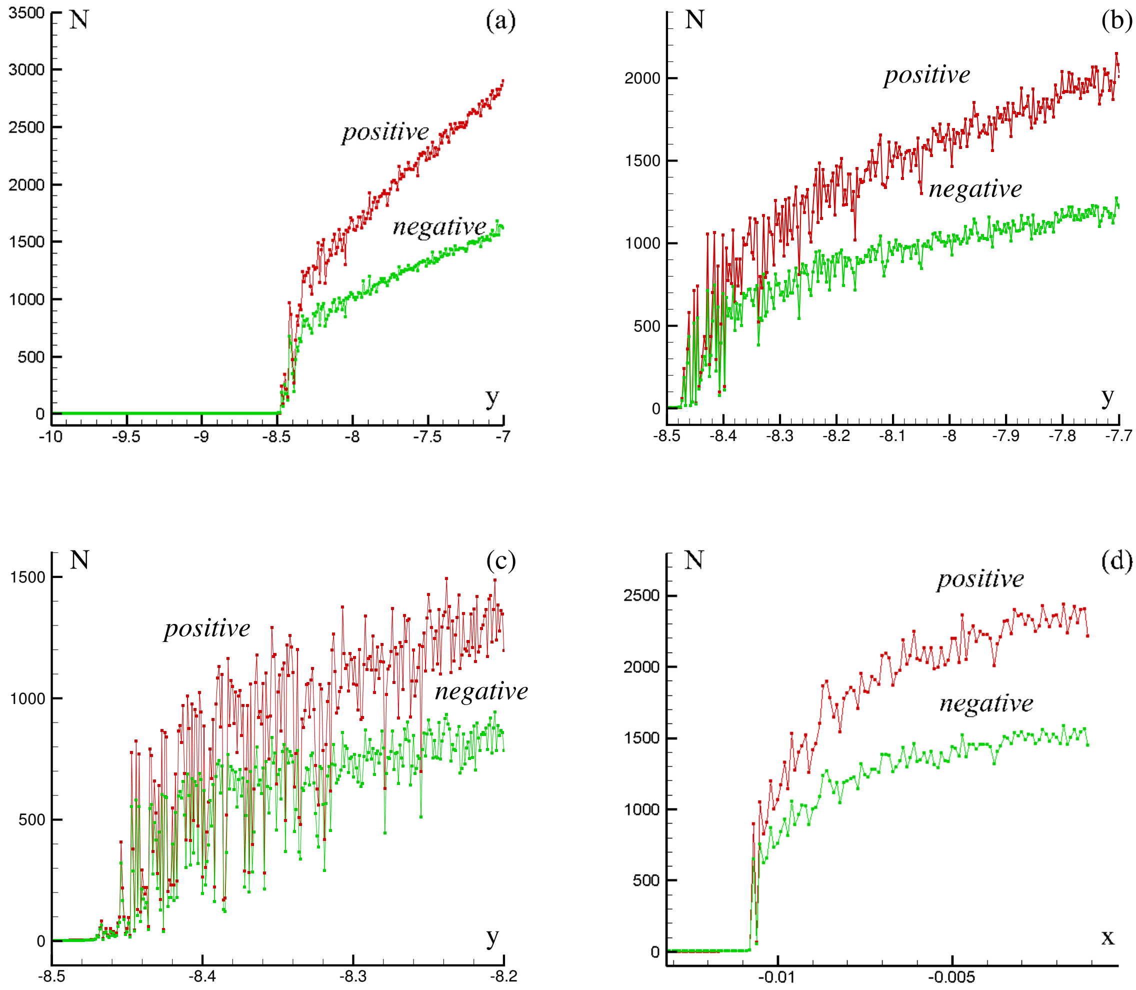

Рис. 3.21. (a)–(c) Число пересечений траекторий вихрей (положительный μ_1 и отрицательный μ_2) в зависимости от координаты y начального положения хетона, при условии $\mu = 21$, $x = 0,01$. Представлено 300 равномерно распределенных начальных положений в различных интервалах на оси ординат: (a) $y \in [-10, -7]$; (b) $y \in [-8,5, -7,6]$; (c) $y \in [-8,5, -8,2]$. (d) число пересечений траекторий вихрей с осью ординат в зависимости от координаты x начального положения хетона, при условии $\mu = 30$, $y = -8$.

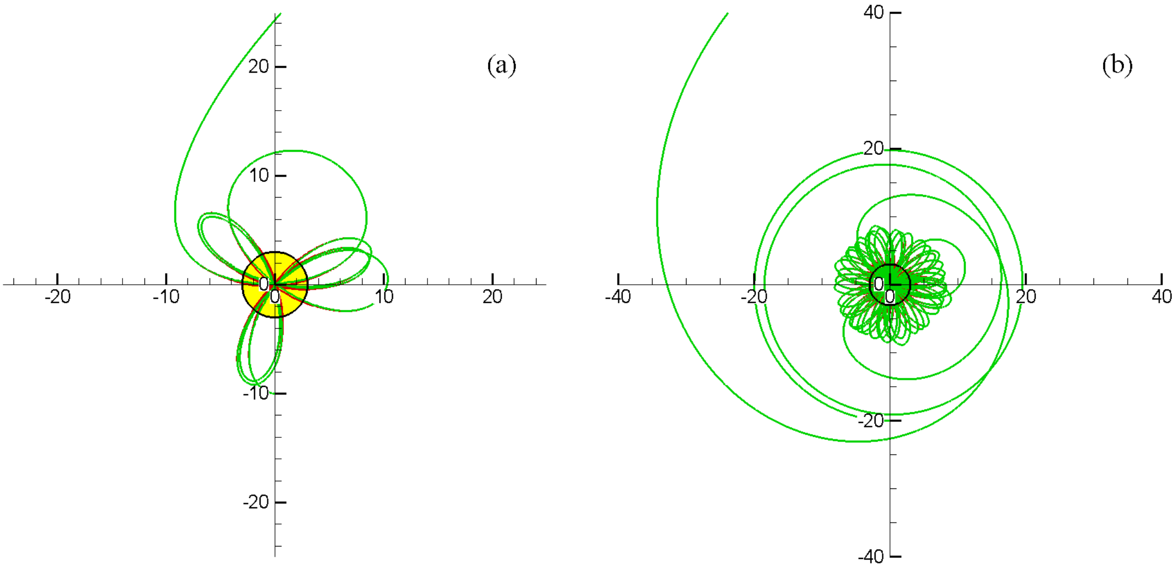

Рис. 3.22. Примеры траекторий выровненного хетона, думонстрирующих хаотическое поведение. Раздичные начальные положения приводят к непредсказуемым замысловатым траекториям вихрей. (a) $\mu = 300$, $y = -10$; (b) $\mu = 300$, $y = -20$.

самодвижение.

Динамика такого хетона при его взаимодействии с изолированной цилиндрической преградой может быть различной. Хетон может захватываться в окрестности топографической преграды на значаительно больших расстояниях, по сравнению с наклонным хетоном. Это связано с тем, что скорость самодвижения у выровненного хетона, в данном случае, значительно ниже и, следовательно, ему сложней преодолеть влияние топографической преграды. Траектории вихрей хетона в случае захвата имеют очень сложную структуру. Размер области, в которой хетон колеблется, значительно меняется даже для близких начальных условий. На рис. 3.22 приведены примеры сложных траекторий вихрей выравненного хетона. Хетон может захватиться в области топографии и двигаться почти периодично какое-то время, но затем внезапно изменить тип движения и покинуть область влияния топографической преграды.

На рис. 3.23a представлены графики количества пересечений вихрей выровненного хетона и оси ординат в зависимости от начального положения хетона на оси y. Из графиков видно, что движение хетона является хаотическим. Также стоит отметить, что изначально выровненный хетон остается таким практически на протяжении всего взаимодействия, поэтому число пересечений траекторий вихрей верхнего и нижнего слоев совпадает.

На рис. 3.23b изображены графики времени, которое необходимо хетону, чтобы поки-

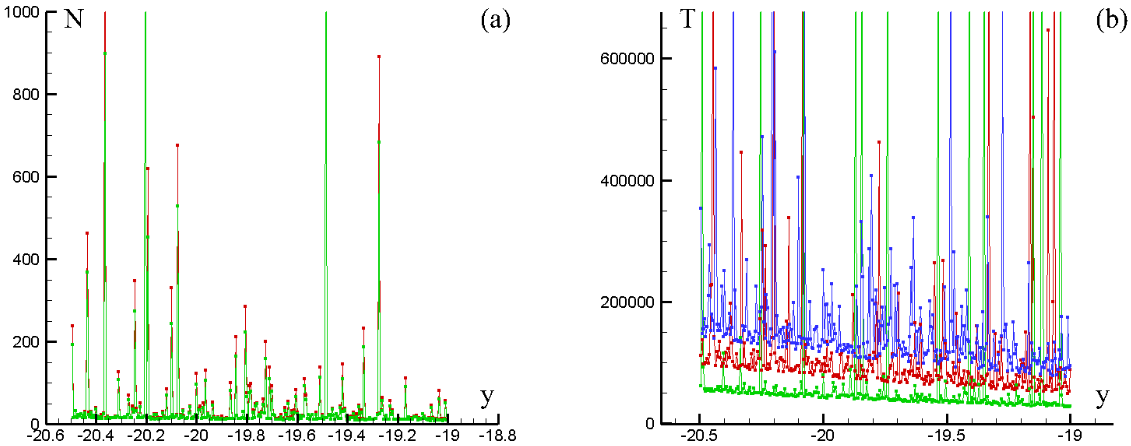

Рис. 3.23. (a) число пересечений изначально выровненного хетона с осью ординат в зависимости от начального положения y, при условии $\mu = 50$, $x = 0$. (b) время, которое требуется хетону, чтобы покинуть область сильного влияния топографической преграды (окружность радиусом 40 от центра цилиндра) в зависимости от начального положения на оси y. Кривые снизу вверх соответствуют $\mu = 200$, $\mu = 100$, $\mu = 50$.

нуть область сильного влияния изолированной топографической преграды в зависимости от начальной координаты y. Выберем окружность радиусом 40 в качестве границы расчетной области. Если хетон пересекает данную границу за 10^6 безразмерных единиц времени, то будем считать, что он не сможет вернуться в окрестность топографической преграды. На рисунке изображены графики времени для различных значений интенсивности хетона: линии снизу вверх соответствуют $\mu = 200$, $\mu = 100$, $\mu = 50$. На графиках видны резкие скачкообразные выбросы, которые соответствуют долгому захвату хетона. Тем не менее, видна тенденция, что чем выше интенсивность хетона, тем быстрее хетон покидает область сильного влияния топографической преграды и уходит на бесконечность.

Результаты данной главы опубликованы в работах [6, 13, 17, 18, 27]

Глава 4

Динамика вихрей в моделях с границами

В данной главе рассматривается динамика точечных вихрей и адвекция жидких частиц в их окрестности в двух моделях, учитывающих наличие неоднородной границы в потоке. Первая модель рассматривает динамику вихрей, появляющихся за цилиндрическим препятствием – модель Фёппля. Вторая модель описывает движение точечного вихря вдоль прямолинейной границы с округлой выемкой, что является простейшим способом проанализировать вихревую динамику изолированного вихря, двигающегося вдоль береговой черты с бухтой.

4.1. Адвекция жидких частиц в модели вихревого следа за цилиндром (модель Фёппля)

Модель Фёппля является моделью неустойчивого симметричного равновесного потока с фиксированными точками [403–405], который формируется за цилиндрическим препятствием в идеальной жидкости. Несмотря на то, что в реальности такие вихри появляются в вязком потоке, вихревая конфигурация Фёппля строится для невязкого потока, при этом принимается, что качественного соответствия геометрических структур достаточно для проведения некоторых аналогий между моделью и реальностью [405, 406]. Таким образом, геометрически система Фёппля представляет собой два точечных вихря обратных интенсивностей, помещенных за цилиндром по направлению внешнего однородного потока.

Поведение вихрей системы Фёппля достаточно хорошо изучено (см., например, работы [403, 407–412]). Известно, что в случае постоянного однородного набегающего потока в системе существуют неподвижные эллиптические точки. Положения этих точек называют положениями равновесия Фёппля. Находясь в этих положениях, точечные вихри генерируют в своей окрестности стационарное поле скорости. В этом поле движение жидких частиц регулярно и ограничено. Иная картина наблюдается при отклонении положения точечных вихрей от эллиптических точек. Сами вихри начинают двигаться вокруг эллиптических точек периодически по замкнутым орбитам. При таком движении, поле скоростей, генерируемое вихрями, становится периодически-зависимым от времени. В результате движение жидких частиц в окрестности вихрей становится значительно сложнее. Часть траекторий близких жидких частиц расходятся экспоненциально за конечное время. Данное расхождение приводит к тому, что часть жидких частиц уносится из вихревой области во внешний поток. Данное явление в гидродинамических задачах принято называть хаотической адвекцией. Таким образом, в настоящей работе основное внимание будет уделено численному анализу нерегулярного поведения жидких частиц, находящихся в окрестности вихревой конфигурации, или иными словами, анализу свойств хаотической адвекции жидких частиц в окрестности вихревой конфигурации Фёппля.

4.1.1. Уравнения движения вихрей

В декартовых координатах функция тока системы двух точечных вихрей в присутствии цилиндра имеет вид

$$\psi = Uy\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_\alpha\left(\ln r_\alpha - 0.5\ln\left(\left(x-\frac{a^2x_\alpha}{\rho_\alpha^2}\right)^2+\left(y-\frac{a^2y_\alpha}{\rho_\alpha^2}\right)^2\right)\right), \tag{4.1}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $r_\alpha = \sqrt{(x-x_\alpha)^2+(y-y_\alpha)^2}$, $\rho_\alpha = \sqrt{{x_\alpha}^2+{y_\alpha}^2}$ и (x_α, y_α) – координаты центров вихрей и $\alpha = 1;\ 2$ – соответствует вихрям с положительной и отрицательной интенсивностью, соответственно.

Будем рассматривать систему Фёппля, т.е. $\mu_1 = -\mu_2$, $x_1 = -x_2$, $y_1 = -y_2$. Без потери общности, положим, что $a = 1$, $\mu_1 = 1$, $U = 1$. В такой конфигурации вихри двигаются относительно оси x симметрично. Наличие симметрии позволяет рассматривать поведение только одного вихря (выберем вихрь с положительной завихренностью). Уравнение движения этого вихря имеют гамильтонов вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} = -U\left(1+\frac{1}{\rho_1^2}\left(\frac{2y_1^2}{\rho_1^2}-1\right)\right)+\mu_1\frac{8y_1^4+(\rho_1^2-1)^3}{y_1(\rho_1^2-1)\left(4y_1^2+(\rho_1^2-1)^2\right)},\\ \dot{y}_1 &= \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} = U\frac{2x_1y_1}{\rho_1^4}-\mu_1\frac{8x_1y_1^2}{(\rho_1^2-1)\left(4y_1^2+(\rho_1^2-1)^2\right)}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Система (4.2) является стационарной системой, ее фазовый портрет изображен на рис. 4.1a. На рис. 4.1b изображена частота оборота вихря вокруг точки равновесия Фёппля. По оси абсцисс отложено значение отклонения вихря от точки положения равновесия по вертикали. С увеличением отклонения частота асимптотически приближается к нулевому значению, при этом частота становится равной нулю на сепаратрисе. Значение частоты оборота будет использоваться далее для анализа нерегулярного движения жидких частиц в окрестности вихревой конфигурации.

Стоит также отметить, что само движение вихрей может быть нерегулярным. Если U периодически зависит от времени, то система (4.2) становится системой с полутора степенями

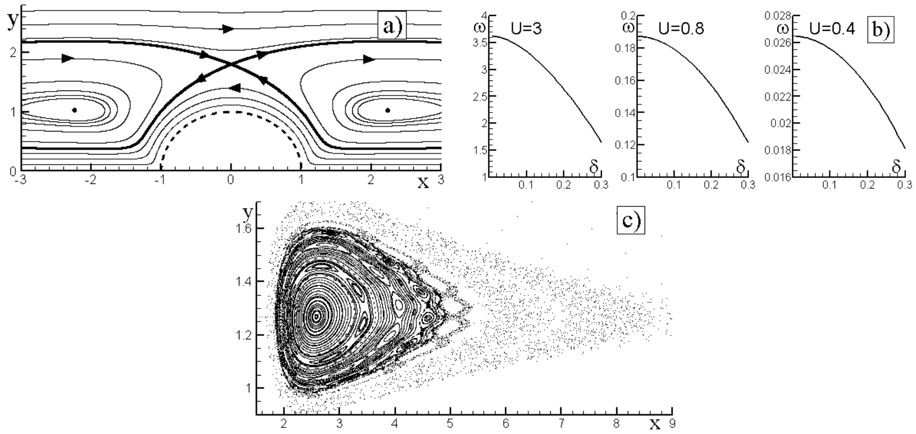

Рис. 4.1. a) фазовый портрет системы (4.2) при $U = 0,8$. Штриховой линией обозначены границы цилиндра, сплошная жирная линия – сепаратриса. b) частота оборота вихря вокруг точки равновесия Фёппля для трех характерных скоростей внешнего потока U в зависимости от вертикального отклонения δ. c) сечение Пуанкаре возмущенной системы (4.2) при $U = 0,8\,(1 + 0,01\sin(0,8t))$.

свободы и, следовательно, допускает появление хаотических траекторий вихрей [393]. На рис. 4.1c представлено сечение Пуанкаре возмущенной системы (4.2) при $U = 0,8\,(1 + 0,01\sin(0,8t))$. Область в окрестности стационарных гиперболических особых точек подвержена наибольшей неустойчивости (см. рис. 4.1a) [411].

Особые точки системы (4.1) определяются из соотношений $\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = 0$. Всего в системе (4.2) существует пять особых точек [412]. Две эллиптические, располагающиеся симметрично относительно вертикальной оси цилиндра, называют равновесием Фёппля. Они определяются из выражений

$$x_e^2 = 2y_e\sqrt{y_e^2+1} + y_e^2 + 1,\ \frac{4\,(r_e y_e + 1)\,y_e^2}{r_e^3} = \frac{\mu_1}{U},\ r_e^2 = x_e^2 + y_e^2, \tag{4.3}$$

где (x_e, y_e) – координаты положений равновесия. Также существует одна гиперболическая точка , (x_h, y_h), расположенная на вертикальной оси симметрии,

$$x_h = 0,\ \frac{\mu_1}{U} = \frac{(y_h^2 - 1)\,(y_h^2 + 1)^2}{y_h\,(y_h^4 + 4y_h^2 - 1)}. \tag{4.4}$$

Дополнительно есть две фиксированные особые точки на бесконечности [412],

$$x_n = \pm\infty,\ y_n = \frac{\mu}{U}. \tag{4.5}$$

Анализ устойчивости данных точек проводится в работах [403, 412].

4.1.2. Регулярный перенос жидких частиц в модели

Для анализа поведения пассивной примеси [172, 173, 280, 281] в окрестности вихревой конфигурации, сначала поместим вихри в положения равновесия Фёппля. Равновесие Фёппля является устойчивым по отношению к малым симметричным возмущениям начальных условий [412], но может быть неустойчивым для несимметричных возмущений [403, 411]. Уравнения движения жидкой частицы имеют гамильтонов вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = -U\left(1+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{2y^2}{\rho^2}-1\right)\right)+\mu_1\left(\frac{y+y_1}{\left(x-x_1\right)^2+\left(y+y_1\right)^2}-\frac{y-y_1}{\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2}+\right.\\
&\left.+\frac{y-y_1/\rho_1^2}{\left(x-x_1/\rho_1^2\right)^2+\left(y-y_1/\rho_1^2\right)^2}-\frac{y+y_1/\rho_1^2}{\left(x-x_1/\rho_1^2\right)^2+\left(y+y_1/\rho_1^2\right)^2}\right),\\
&\dot{y}_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x} = U\frac{2xy}{\rho^4}+\mu_1\left(\frac{x-x_1}{\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2}-\frac{x-x_1}{\left(x-x_1\right)^2+\left(y+y_1\right)^2}+\right.\\
&\left.+\frac{x-x_1/\rho_1^2}{\left(x-x_1/\rho_1^2\right)^2+\left(y+y_1/\rho_1^2\right)^2}-\frac{x+x_1/\rho_1^2}{\left(x-x_1/\rho_1^2\right)^2+\left(y-y_1/\rho_1^2\right)^2}\right).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Если вихри находятся в точках равновесия Фёппля, то есть $x_1(0) = x_1(t) = x_e,\ y_1(0) = y_1(t) = y_e$, система (4.6) стационарна с фазовым портретом, изображенным на 4.2a. Область ограниченную сепаратрисой будем называть вихревой атмосферой точечного вихря [413, 414]. В зависимости от скорости внешнего потока U, размер и форма границы вихревой атмосферы значительно меняются. Будем рассматривать три характерных значения скорости $U = 3;\ 0,8;\ 0,4$. При $U = 3$ размер вихревой атмосферы примерно совпадает с размером цилиндра, при $U = 0,8$ размер вихревой атмосферы значительно больше размера цилиндра, однако влияние цилиндра на поведение жидких частиц все еще сильно, при $U = 0,4$ цилиндр не влияет на поведение частиц (их динамика, в целом, соответствует динамике частиц в окрестности самораспространяющейся вихревой пары в сдвиговом потоке [395] или в окрестности вихря, находящегося у прямой стенки [169, 415]). Характерные формы границы вихревой атмосферы для этих трех значений скорости внешнего потока приведены на 4.2a. Назовем случаи, соответствующие данным скоростям – сильным, средним и слабым влиянием цилиндра на динамику жидких частиц, соответственно.

4.1.3. Возмущенная вихревая атмосфера

Основной целью данного параграфа является исследование нерегулярного переноса жидких частиц в окрестности вихревой конфигурации Фёппля. Поэтому отклоним начальное положение вихрей от точек равновесия Фёппля на некое расстояние δ (пусть для определенности будет $x_1(0) = x_e,\ y_1(0) = y_e + \delta$). Такое отклонение приводит к тому, что вихри начинают двигаться периодически по замкнутым орбитам вокруг равновесия Фёппля (см., 4.1). Такое движение становится периодическим возмущением для системы (4.6). В результате динамика пассивных частиц описывается гамильтоновой системой с полутора степеня-

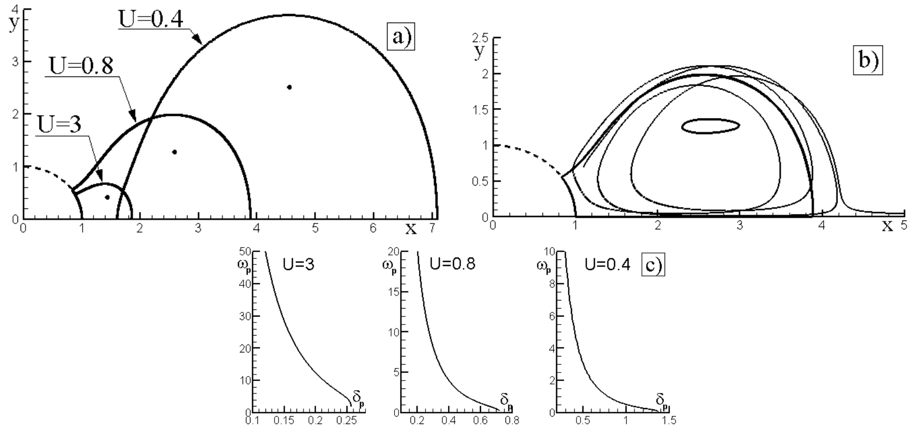

Рис. 4.2. a) сепаратрисы, отделяющие вихревую область (вихревую атмосферу) от внешнего потока, для соответствующих значений скорости U. b) хаотическая траектория, выходящая из области возмущенной вихревой атмосферы во внешний поток при $U = 0,8$. Внутренняя жирная линия изображает траекторию движения вихря вокруг равновесия Фёппля. Внешняя жирная линия изображает сепаратрису невозмущенной вихревой атмосферы. c) частота оборота жидкой частицы в невозмущенной вихревой атмосфере.

ми свободы. Такая система, как известно (см., например, [353, 393]), допускает проявление детерминированного хаоса, выражающегося в экспоненциальной расходимости изначально близких траекторий за конечное время.

За счет наличия нерегулярных траекторий становится возможен выход жидкой частицы, изначально находившейся в вихревой атмосфере, во внешний поток. Подобная траектория изображена на 4.2b. Так как система с фазовым портретом, изображенным на рис. 4.2b, является открытой, то все частицы, покинувшие атмосферу вихря за счет хаотического переноса, не могут попасть в нее обратно. Это ведет к тому, что размер регулярной области возмущенной вихревой атмосферы значительно уменьшается. Где под регулярной областью возмущенной вихревой атмосферы будем понимать область ограниченную последним неразрушенным КАМ-тором соответствующего фазового пространства.

Изменение размера регулярной области фазового пространства гамильтоновой системы удобно продемонстрировать с помощью сечений Пуанкаре. Сечения Пуанкаре при $\delta = 0,03$ для трех характерных случаев влияния цилиндра приведены на рис. 4.3.

4.1.4. Динамика пассивных частиц в возмущенной вихревой атмосфере

Проведем ряд численных экспериментов, показывающих процесс рассеяния пассивной примеси в окрестности возмущенной конфигурации Фёппля. Рассмотрим случай сильного

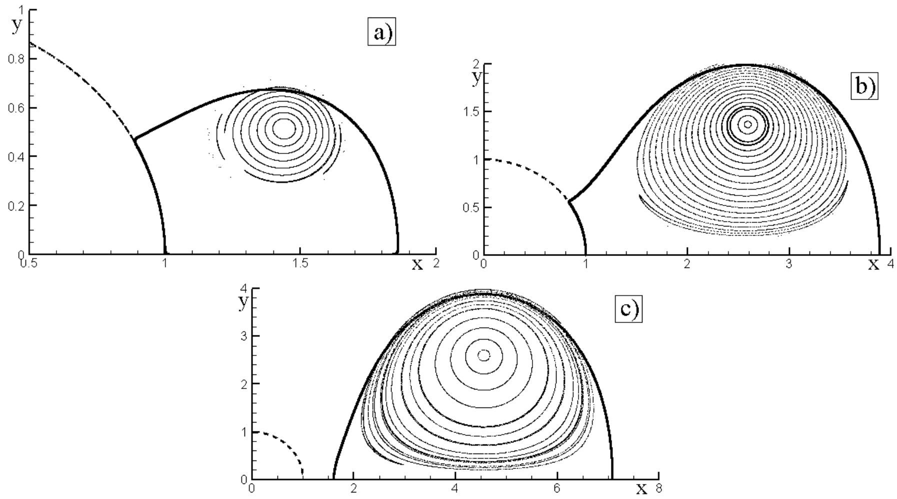

Рис. 4.3. Сечения Пуанкаре системы (4.6) при $\delta = 0,03$. a) сильное влияние цилиндра, b) среднее влияние, c) слабое влияние. Светлая область внутри сепаратрисы за пределами регулярных орбит соответствует нерегулярному движению жидких частиц.

влияния цилиндра. Равномерно распределим 10^4 пассивных маркеров в области, ограниченной сепаратрисой невозмущенной вихревой атмосферы. Далее отклоним начальное положение вихря от положения равновесия на величину δ. В результате часть маркеров будет вынесена из вихревой области в проточную. Процесс выноса изображен на рис. 4.4. На рис. 4.4a область начального распределения маркеров. На рис. 4.5b видна сложная структура складок пятна маркеров ([416, 417]), по которым маркеры выносятся во внешнюю область. Далее, после приближения к цилиндру (4.5c), складки становятся значительно тоньше. Это свидетельствует о том, что самый интенсивный вынос маркеров происходит на начальном этапе движения вихря, до его приближения к цилиндру. На рис. 4.4d приводится картина распределения маркеров после одного периода оборота вихря. Видно, что большая часть маркеров, которые заведомо должны выноситься в проточную область, уже покинула вихревую область. Далее же будет происходить очень медленный вынос таких оставшихся маркеров. Таким образом, на рис. 4.4d изображен остаток возмущенной вихревой атмосферы, которая практически не обменивается жидкими частицами с внешней областью.

4.1.5. Эффективность хаотизации фазового пространства в зависимости от отклонения δ

В качестве количественной характеристики эффективности хаотической адвекции удобно рассмотреть следующую характеристику η. Равномерно распределим (как на рис. 4.4a) N маркеров внутри невозмущенной вихревой области, далее, отклонив вихрь от его положе-

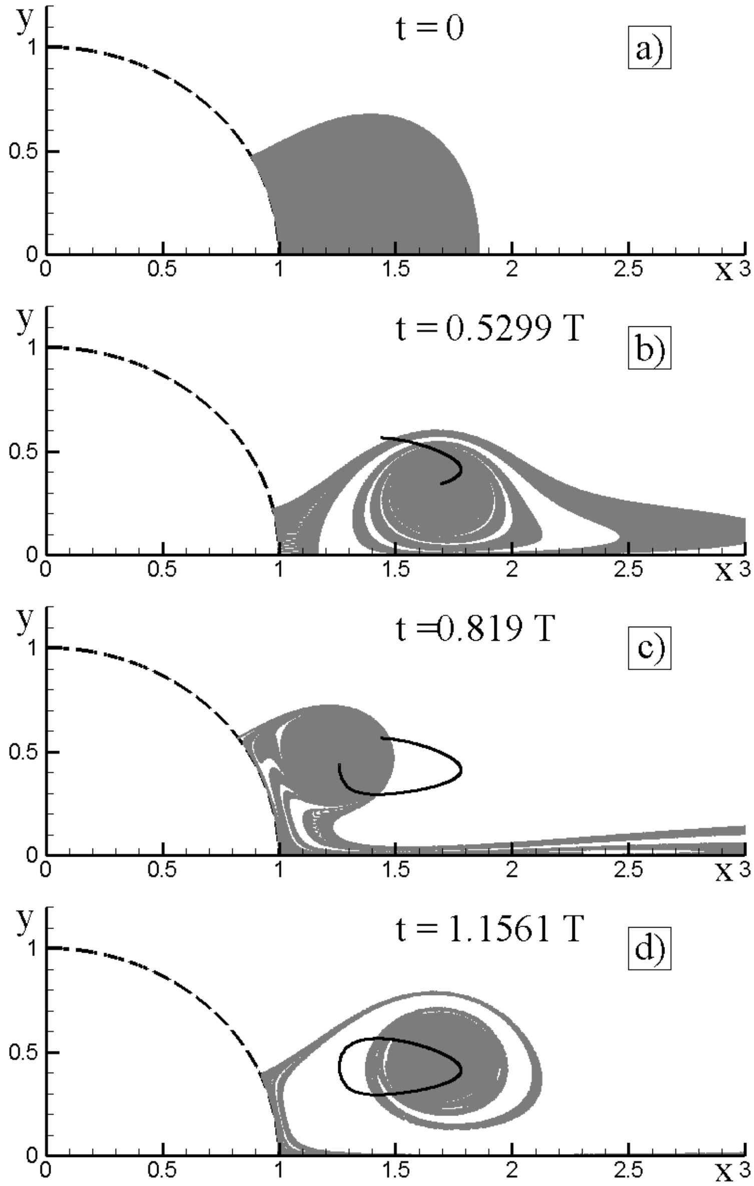

Рис. 4.4. Мгновенные положения ансамбля изначально однородно-распределенных маркеров. $T = 2,0759$ – период возмущения. Штриховая линия – граница цилиндра. Сплошной линией обозначена траектория вихря, возмущающая адвекцию жидких частиц.

ния равновесия, посчитаем количество маркеров N_e, которые покидают вихревую область, на достаточно продолжительном временном интервале Маркеры, пересекшие линию $x = 10$ считались покинувшими вихревую область. Нормируя количество вынесенных маркеров на общее число маркеров, можно сравнить эффективность адвекции из вихревой области в проточную для разных значений скорости U. Таким образом, мы считаем характеристику эффективности адвекции по формуле

$$\eta = \frac{N_e}{N}. \tag{4.7}$$

Проанализируем изменение величины η в зависимости от отклонения ε начальной ординаты вихрей от положений равновесия Фёппля для характерных значений скорости U. Распределим $\sim 10^4$ маркеров в области, соответствующей невозмущенной вихревой атмосфере. Причем, в связи с тем, что площадь невозмущенной вихревой атмосферы значительно меняется в зависимости от скорости U, плотность начального распределения также будет отличаться. Однако, учитывая, что маркеров достаточно много, различие в плотности их распределения не должно сказываться на вычисляемой характеристике η.

На рис. 4.5 показана зависимость $\eta\left(\varepsilon\right)$ для трех характерных значений скорости U. Наиболее эффективная адвекция происходит при сильном влиянии цилиндра. Это объясняется тем, что частота вращения вихря вокруг положения равновесия и собственные частоты оборота жидких частиц вокруг центра вихря соразмерны. Таким образом, становятся возможным множественные перекрытия резонансов, приводящие к появлениею стохастических слоев в возмущенной атмосфере. Для двух других скоростей, частота оборота вихря вокруг положения равновесия несоизмеримо меньше частот оборота частиц. Поэтому хаотической становится лишь незначительная часть возмущенной вихревой атмосферы. Для улучшения эффективности хаотизации мы могли бы увеличить отклонение δ, однако сделать это невозможно в связи с тем, что с дальнейшим увеличением δ, вихрь попадает на незамкнутые (замыкающиеся в бесконечности) орбиты в фазовом пространстве вихревой конфигурации Фёппля (см. рис. 4.1а). Таким образом, на рис. 4.5 показано, что в случае высокой скорости внешнего потока (например, $U = 3$), наблюдается режим сильных возмущений, что приводит к тому, что почти все траектории жидких частиц в окрестности равновесия Фёппля становятся хаотическими. С другой стороны, в случае низких скоростей внешнего потока (например, $U = 0,4$), возмущения достаточно слабы, и только небольшая часть траекторий из окрестности равновесия становится хаотическими.

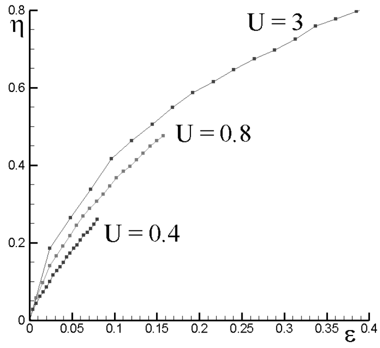

Рис. 4.5. Эффективность переноса жидких частиц $\eta(\varepsilon)$ при характерных значениях скорости внешнего потока U.

4.2. Динамика точечного вихря вблизи границы с округлой выемкой

Динамика точечных вихрей в областях с криволинейными границами представляет интерес, как с точки зрения приложений вихревой динамики, так и с точки зрения общей теории динамики точечных вихрей. Для приложений, например, для исследования вихревой динамики в океане, необходимо учитывать сложные береговые границы и их влияние на движение изолированных когерентных структур. Известны случаи захвата вихревых структур внутрь бухт [82, 254, 418]. Например, интенсивная мезомасштабная динамика наблюдается в Бискайском заливе Используя данные спутниковых наблюдений, авторы работы [419] восстанавливают траектории изолированных вихревых структур, двигающихся вдоль континентального склона. Некоторые из полученных траекторий свидетельствуют, что часть вихрей остается когерентными достаточно долгое время, как минимум до выхода из залива. В работе [254] приводятся численные расчеты взаимодействия поверхностных и глубоководных вихрей в той же области. Экспериментальные данные [420] подтверждают наличие устойчивых когерентным вихревых структур, захваченных внутри Лионского залива. Численное моделирование вихревой динамики того же региона [82] также подтвердило наличие устойчивых когерентных вихревых структур, которые двигаются вдоль береговой черты и способны преодолевать залив, не разрушаясь при этом. Данные примеры показывают, что вихревые структуры способны оставаться когерентными в окрестности криволинейной береговой линии. Простейший способ проанализировать динамику изолированных вихрей заключается в построении модели эволюции точечного вихря в потенциальном потоке с криволинейными границами.

Помимо этого, динамика точечных вихрей в областях с искривленными границами представляет теоретический интерес. Наличие границ изменяет топологию траекторий точечного вихря в потоке, что может привести к появлению периодических и квази-периодических траекторий [383–385, 421–424]. В случае простой прямолинейной границы, точечный вихрь движется равномерно и прямолинейно вдоль нее, так как эта задача аналогична движению вихревой пары в неограниченной области [425]. Для изменения геометрии границы, достаточно конформно отобразить ее в изучаемую область. Далее, чтобы интенсивность точечного вихря не менялась при отображении используется поправка для функции тока в виде функции тока Кирхгофа-Рута [426, 427].

Отметим также работы, в которых анализируются бифуркация потенциального потока в окрестности границы с отверстием [428, 429]. В работе [430] исследуется влияние хаотического перемешивания на осаждение инертных частиц в стоксовом потоке в прямоугольной выемке.

4.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим конформное отображение прямой границы с округлой выемкой радиуса R на верхнюю полуплоскость

$$\zeta = b\frac{1}{1-\gamma z_2},\ \ z_2 = z_1^{\frac{1}{2-\alpha}},\ \ z_1 = \frac{z-a}{z+a}, \tag{4.8}$$

где $a = R\sin(\pi\alpha)$, $b = 2a/(2-\alpha)$, $\pi\alpha$ – характеристический угол выемки (см. рис. 4.6а), $z = x+iy$ – комплексная переменная в исходной области с выемкой и $\zeta = \xi + i\eta$ – комплексная переменная в отображенной полуплоскости. Здесь $\gamma = 1$ при $y \geq 0$ и $\gamma = \exp\{2i\pi/(2-\alpha)\}$ при $y < 0$ определяет соответствующую ветвь отображения.

Точечный вихрь с интенсивностью μ движется в исходной z-области в соответствии с функцией тока Кирхгофа-Рута [426, 427], которая определяет следующее комплексное поле скорости

$$\frac{dz_v^*}{dt} = \left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_v}\left(U + \frac{\mu}{2\eta_v(z_v)}\right) - i\mu\frac{\left.\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right|_{z=z_v}}{2\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_v}}, \tag{4.9}$$

где индекс v соответствует координатам вихря и $\cdot^*$ – комплексное сопряжение. Член $U + \frac{\mu}{2\eta_v}$ соответствует влиянию "зеркального"вихря [425] и плоскому потоку со скоростью U в области с прямолинейной границей. Член $i\mu\frac{\left.\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right|_{z=z_v}}{2\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_v}}$ появлется за счет того, что интенсивность точечного вихря должна оставаться неизменной при переходе из z-области в ζ-область. Далее, решая уравнения

$$\frac{dx_v}{dt} = \mathrm{Re}\frac{dz_v^*}{dt},\ \ \frac{dy_v}{dt} = -\mathrm{Im}\frac{dz_v^*}{dt}, \tag{4.10}$$

получаем траекторию вихря в области с искривленной границей.

Комплексная скорость жидкой частицы в z-плоскости имеет вид

$$\frac{dz^*}{dt} = \frac{d\zeta}{dz}\left(U + i\mu\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_v} - \frac{1}{\zeta - \zeta_v^*}\right)\right), \tag{4.11}$$

Траектория жидкой частицы может быть вычислена согласно формулам, аналогичным (4.10),

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{Re}\frac{dz^*}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = -\mathrm{Im}\frac{dz^*}{dt}. \tag{4.12}$$

4.2.2. Регулярная динамика вихря при постоянном внешнем потоке

В окрестности прямолинейной границы точечный вихрь будет двигаться равномерно и прямолинейно, так как эта постановка эквивалентна движению вихревой пары, состоящей из двух точечных вихрей одинаковых по модулю, но разных по знаку интенсивностей. Если добавить простой плоский поток вдоль границы, то этот поток будет либо увеличивать, либо уменьшать постоянную скорость движения вихря вдоль границы. При этом, при точном совпадении скорости распространения вихря вдоль границы и скорости встречного потока, вихрь остановится.

Если же граница изогнута, то траектория вихря будет существенно отличаться от случая прямолинейной границы [424]. В зависимости от кривизны границы, может появится новый тип движения – вихрь может начать периодически колебаться в локализованных областях. То есть, появляется режим захвата вихря в окрестности искривленной границы. Далее рассмотрим периодические возмущения локализованных режимов движения вихря. Для этого представим встречный поток в виде

$$U = U_0\left(1 + \varepsilon \sin \nu t\right), \tag{4.13}$$

где U_0 – средняя скорость, ε, ν – амплитуда и частота периодических колебаний внешнего потока.

Будем рассматривать изменение динамической картины в зависимости от характеристического угла α, при этом интенсивность вихря положим $\mu = 1$, а скорость внешнего потока $U_0 = -1$.

Сначала изучим стационарную динамику, т.е. $\varepsilon = 0$, $U = U_0$. В зависимости от параметров задачи возможны три типа структуры фазового пространства стационарной системы, которые отличаются количеством и типом стационарных точек. В первом случае существует три стационарные точки, две из которых гиперболические, а третья – эллиптическая (рис. 4.6a). Во втором случае существуют три гиперболические и две эллиптические стационарные

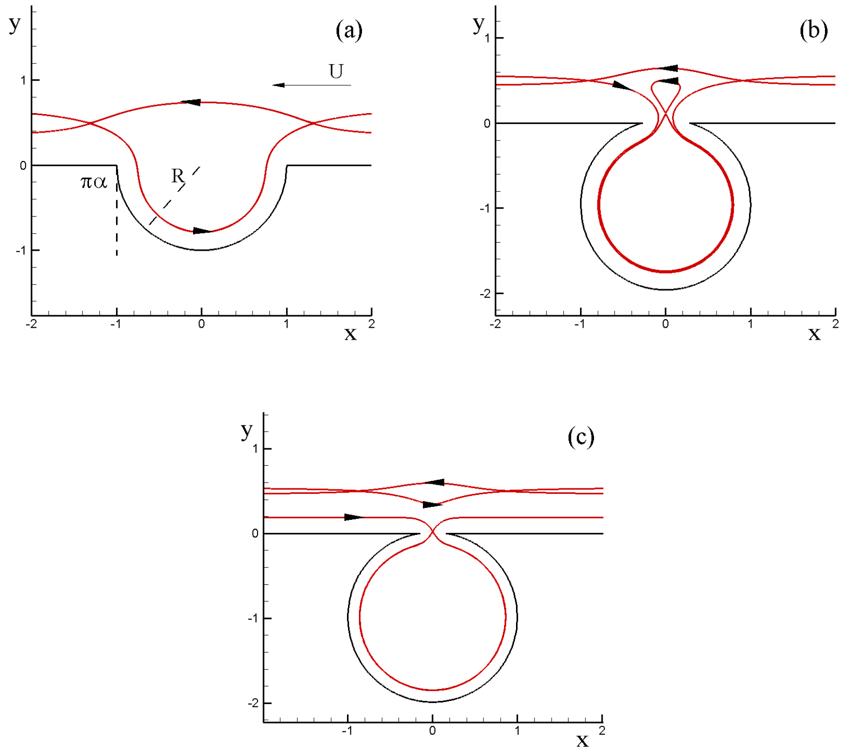

Рис. 4.6. Сепаратрисы фазового портрета для стационарного внешнего потока при $U_0 = -1$, $\epsilon = 0$, $\mu = 1$: (a) $\alpha = 0,5$, (b) $\alpha = 0,09$, (c) $\alpha = 0,05$.

точки (рис. 4.6b). В третьем случае также существуют три гиперболические и две эллиптические стационарные точки, однако структура фазового портрета другая. отличие заключается в том, что на фазовом портрете появляются две отдельные области с замкнутыми траекториями вихря (рис. 4.6c).

Покажем, что указанная классификация охватывает все возможные типы фазового портрета. Для определения положения стационарных точек приравняем выражение (4.9) нулю и найдем корни полученного выражения. Для удобства вычислим положения этих точек в ζ-плоскости с помощью обратного отображения $z_v{=}f\left(\zeta_v\right)$. Выражения для стационарных точек в ζ-плоскости имеют вид

$$\frac{d\zeta_v*}{dt} = \frac{1}{\left|f'\left(\zeta_v\right)\right|^2}\left[U + \mu i\frac{1}{\zeta_v - \zeta_v*} + \frac{1}{2}\mu i\frac{f''\left(\zeta_v\right)}{f'\left(\zeta_v\right)}\right], \tag{4.14}$$

где обратное отображение имеет вид

$$z_v{=}f\left(\zeta_v\right) = -a\left[\left(1 - \frac{b}{\zeta_v}\right)^{2-\alpha} + 1\right] / \left[\left(1 - \frac{b}{\zeta_v}\right)^{2-\alpha} - 1\right]. \tag{4.15}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{U}{\mu} + \frac{1}{2\eta_v} - \frac{1}{2}i\frac{f''\left(\zeta_v\right)}{f'\left(\zeta_v\right)} = 0. \tag{4.16}$$

Из (4.16) следует, что мнимая часть выражения, т.е. y-компонента скорости, равняется нулю независимо от величины U_0. Следовательно, сначала вычислим член с производными

$$\frac{f''(\zeta_v)}{f'(\zeta_v)} = -\frac{1}{\zeta_v}\frac{b}{\zeta_v - b}\left[(2-\alpha)\frac{\left(1-\frac{b}{\zeta_v}\right)^{2-\alpha}+1}{\left(1-\frac{b}{\zeta_v}\right)^{2-\alpha}-1} + 2\frac{\zeta_v - b}{b} + 1\right] =$$
$$-\frac{1}{\zeta_v}\frac{1}{\zeta_v - b}\left[-2z_v + 2\left(\zeta_v - \frac{b}{2}\right)\right]. \tag{4.17}$$

Можно заметить, что при условии $\xi = b/2$, верно равенство $\zeta - b = -\zeta^*$ и $x = 0$. Отсюда следует, что множитель перед квадратными скобками действителен в то время, как действительная часть выражения в квадратных скобках равна нулю

$$\frac{f''(\zeta_v)}{f'(\zeta_v)}\Big|_{\xi=b/2} = \frac{2i}{|\zeta_v|^2}\left[-y_v + \eta_v\right]. \tag{4.18}$$

Таким образом, видно, что y-компонента скорости равна нулю при $\xi = b/2$ и $x = 0$. Подчеркнем, что конформное отображение подразумевает преобразование особых точек в особые. Далее определим η такое что действительная часть в (4.16) с $\xi = b/2$ равна нулю.

Рассмотрим мнимую часть выражения

$$\mathrm{Im}\left[\frac{f''(\zeta_v)}{f'(\zeta_v)}\right] = \frac{2\eta_v - 2y_v}{\frac{b^2}{4} + {\eta_v}^2} = \frac{2\eta_v - 2\mathrm{Im}\left[f\left(\frac{b}{2} + i\eta_v\right)\right]}{\frac{b^2}{4} + {\eta_v}^2}. \tag{4.19}$$

Получаем условие на нахождение положений стационарных точек

$$U + \mu\frac{1}{2\eta_v} + \frac{1}{2}\mu\frac{2\eta_v - 2y_v}{\frac{b^2}{4} + {\eta_v}^2} = 0, \tag{4.20}$$

и в конечной форме

$$F \equiv -\left(\frac{U}{\mu} + \frac{1}{2\eta_v}\right)\left(\frac{b^2}{4} + {\eta_v}^2\right) - \eta_v + y_v = 0, \tag{4.21}$$

где $\eta_v = \eta_v(y_v)$, следует из (4.8). Здесь y_v изменяется от $\sin\pi\alpha\cot\frac{(2-\alpha)\pi}{2}$ до $+\infty$, $\eta_v = \eta_v(y_v)$ – монотонна и изменяется от 0 до $+\infty$. По мере того, как $\eta_v \to 0$, $-\left(\frac{U}{\mu} + \frac{1}{2\eta_v}\right)\left(\frac{b^2}{4} + {\eta_v}^2\right) - \eta_v$ приближается к $-\infty$, т.е. $< y_v$. По мере приближения $y_v \to \infty$, появляется асимптота $-\frac{U}{\mu}{y_v}^2$, т.е. $> y_v$. Отсюда следует, что существует, как минимум, одна стационарная точка при $x_v = 0$.

Режимы движения, аналогичные приведенным на рис. 4.6a,b, соответствуют относительно простой динамике вихря. Вихрь движется против встречного потока, при условии, что его скорость высока, что наблюдается, когда вихрь находится близко к границе. Если же вихрь начинает свое движение дальше от границы, то его скорость движения меньше и он не может преодолеть встречный поток и уносится им. Между этими граничными режимами существуют два промежуточных. Существует область, где скорость движения вихря

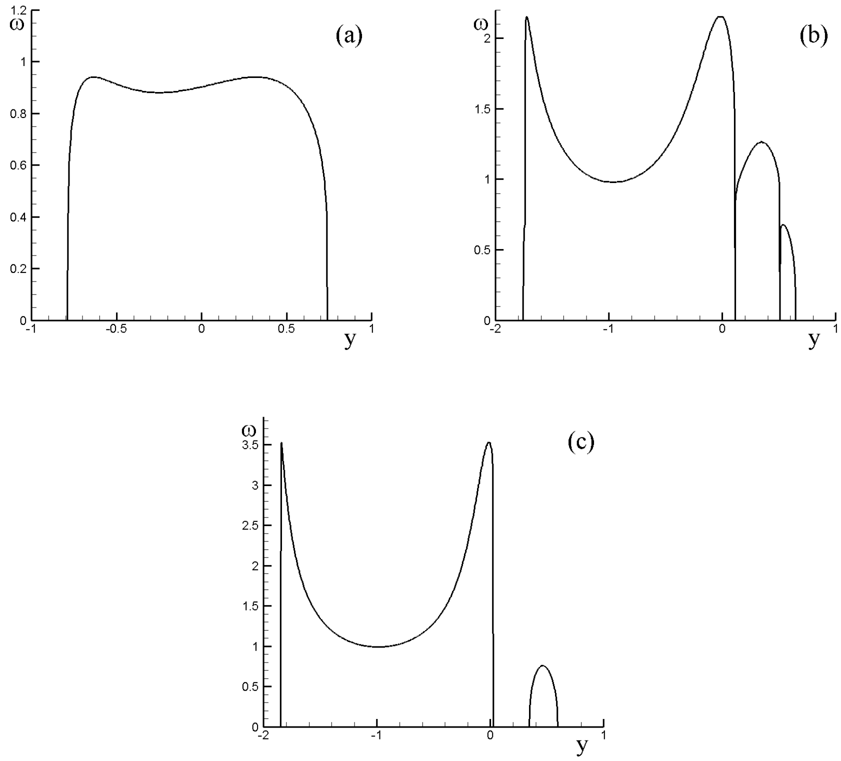

Рис. 4.7. Частоты вращения вихря вокруг эллиптических стационарных точек при постоянном встречном потоке $U = U_0 \equiv const$. Рисунки a,b,c соответствуют рис. 4.6a,b,c, соответственно.

примерно совпадает со скоростью встречного потока, что приводит к периодическому колебанию вихря в локализованной области. Колебания могут быть простыми, как изображено на рис. 4.6a или более сложные, как изображено на рис. 4.6b.

Существенно отличается случай меньшего отверстия в выемке. Вихрь, как и раньше может двигаться против встречного потока, при условии достаточно высокой скорости само-движения, т.е. вблизи границы. Внутри же выемки появляется область периодического движения. На некотором расстоянии от границы появляется полоса, в которой вихрь движется против встречного потока, при этом не попадая в выемку. Еще дальше от границы опять появляется область локализованного движения. С дальнейшем увеличением расстояния до границы, скорость само-движения уменьшается и вихрь не может двигаться против встречного потока.

На рис. 4.7 приведены частоты обращения вихря вокруг стационарных эллиптических точек, соответствующие фазовым портретам, изображенным на рис. 4.6. Данные частоты будем называть частотами стационарного движения. Их значения будут использоваться при анализе хаотизации системы при наличии периодического возмущения [171–173, 398, 399].

4.2.3. Нерегулярная динамика точечного вихря при переменном встречном потоке

В случае наложения колебательной компоненты на скорость встречного потока, динамика вихря существенно меняется. Появляется экспоненциальная расходимость изначально близких траекторий [353, 393]. Такие траектории называются нерегулярными или хаотическими. Двигаясь по такой нерегулярной траектории, вихрь может посещать различные области потока.

Итак, возмутим систему (4.12) за счет ненулевых амплитуды ε и частоты ν в колебательном встречном потоке (4.13). Проведем анализ параметров, приводящих к наиболее эффективной хаотизации фазового пространства. Для этого воспользуемся частотами оборота вихря вокруг эллиптических особых (рис. 4.7) точек в стационарной задаче. Из теории нелинейных колебаний [267, 393] известно, что наиболее эффективное пересечения нелинейных резонансов достигается при частотах возмущения близких к собственной частоте стационарной системы. Будем рассматривать относительно малые амплитуды возмущений $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 0,01$.

Как и раньше, будем строить сечения Пуанкаре для демонстрации хаотических и регулярных областей в фазовом пространстве.

Сначала рассмотрим переход к хаотической динамике стационарной системы, фазовый портрет которой изображен на рис. 4.6a. Будем считать, что хаотизации системы происходит тем более эффективно, чем большая часть фазового пространства подвержена хаотической динамике. Из рис. 4.7a видно, что вращение вихря внутри выемки напоминает твердотельное вращение с почти постоянной частотой. Максимальная частота собственных колебаний тогда примерно равна 1. На рис. 4.8 представлена серия сечений Пуанкаре для амплитуды возмущения $\varepsilon = 0,1$. Видно, что значение частоты 1 попадает в интервал оптимальных частот для хаотического транспорта. Также можно заметить, что эффективность хаотизации резко падает с изменением частоты. На рис. 4.8a приведено сечение Пуанкаре для частоты $\nu = 0,7$. Видно, что при этой частоте вихревые траектории в основном устойчивы в окрестности области сепаратрисы стационарного движения. На рис. 4.8b приведен случай наиболее эффективной хаотизации ($\nu = 0,85$), для которого большинство траекторий стало хаотическими и покинуло область выемки. По мере дальнейшего увеличения частоты возмущения, динамика стабилизируется, что видно из рис. 4.8c,d для $\nu = 1$ и $\nu = 1,1$, соответственно.

Возмутим стационарную конфигурацию, изображенную на рис. 4.6b. В стационарной конфигурации существует три особых точки, лежащих на оси симметрии. Таким образом,

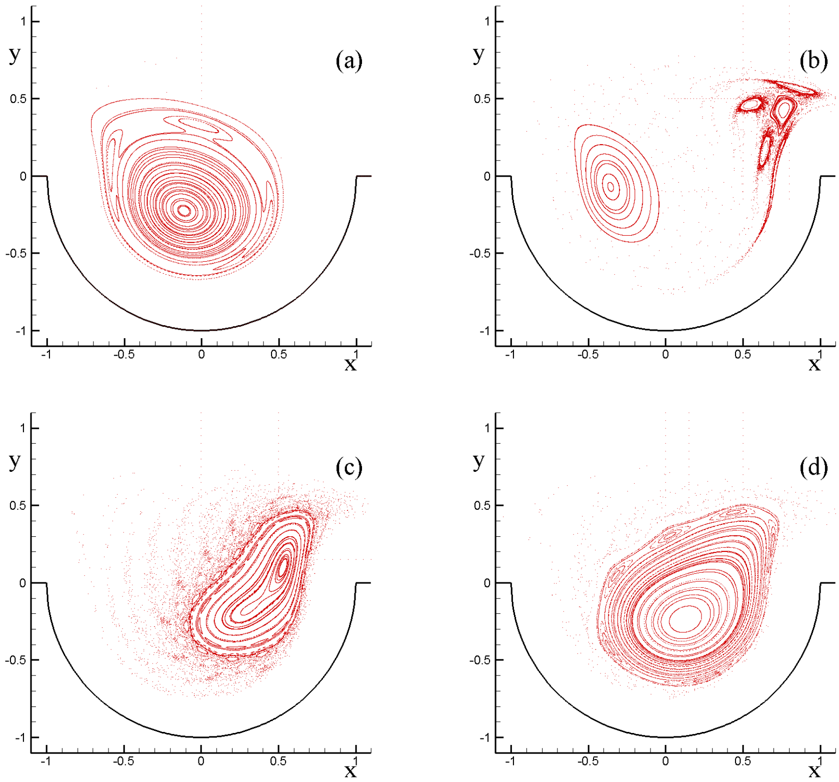

Рис. 4.8. Сечения Пуанкаре, соответствующие стационарной конфигурации с рис. 4.6a для фиксированной амплитуды $\varepsilon = 0,1$ и переменной частоты возмущения ν: (a) $\nu = 0,7$, (b) $\nu = 0,85$, (c) $\nu = 1$, (d) $\nu = 1,1$.

вихрь может колебаться в окрестности двух центров вращения, т.е. эллиптических особых точек. Частотная зависимость для этого случая изображена на рис. 4.7b. Из рисунка видно, что частоты в различных областях вращения вихря существенно отличаются. Это, в свою, очередь означает, что эффективная хаотизация разных вращательных областей будет достигаться при разных частотах возмущения. Дополнительный интерес вызывает наличие в стационарной конфигурации двух сепаратрис: одна – внутренняя, окружающая две различные области вращательного движения, вторая – внешняя сепаратриса, отделяющая незамкнутые траектории вихрей и замкнутую область периодического движения.

Рассмотрим внешнюю вращательную область, ограниченную внешней и внутренней сепаратрисами. Примем амплитуду возмущения равной $\varepsilon = 0,01$ и будем изменять частоту возмущения в пределах, сравнимых с частотой вращения стационарной конфигурации. Из вида частотной зависимости стационарной конфигурации следует, что наиболее эффективная хаотизация фазового пространства должна наблюдаться при значениях частоты возмущения в окрестности величины $\nu = 0,7$. Из сечения Пуанкаре, изображенного на рис. 4.9a видно, что, в случае возмущения на данной частоте, область фазового пространства между двумя сепаратрисами стационарной конфигурации становится заполненной хаотическими траекториями. В тоже время, область внутри внутренней сепаратрисы остается относительно регулярной, так как частоты стационарного движения в данной области значительно отличаются от частоты возмущения.

Выберем частоту возмущения, равной $\nu = 1,3$, что соответствует стационарной частоте в окрестности верхней эллиптической особой точки. На рис. 4.9b видно появление острова устойчивости в окрестности стационарной эллиптической точки. Данный остров устойчивости перекрывается с регулярной областью рециркуляции, что приводит к разрушению инвариантных торов и, как следствие, появлению хаотических траекторий в окрестности перекрытия регулярных областей. Заметим, что все инвариантные торы, связанные с внешней сепаратрисой разрушаются, т. е. не существует барьеров для траекторий вихря, которые начинаются в окрестности стационарной эллиптической точки, и поэтому они все, в итоге, уходят во внешний поток. С дальнейшим увеличением частоты возмущения $\nu = 1,45$ (см. рис. 4.9c) остров устойчивости постепенно уменьшается и фазовый портрет становится более регулярным. Тонкий хаотический слой все еще существует на месте разрушенной внешней сепаратрисы, но появляются инвариантные регулярные торы (например, изображенный жирной линией на рис. 4.9c), которые выступают в роли непроницаемого барьера для траекторий вихря. В тоже время, несмотря на то, что барьер предотвращает проникновение траекторий вихря в внешний поток, внутри этой ограниченной области траектории могут быть хаотиче-

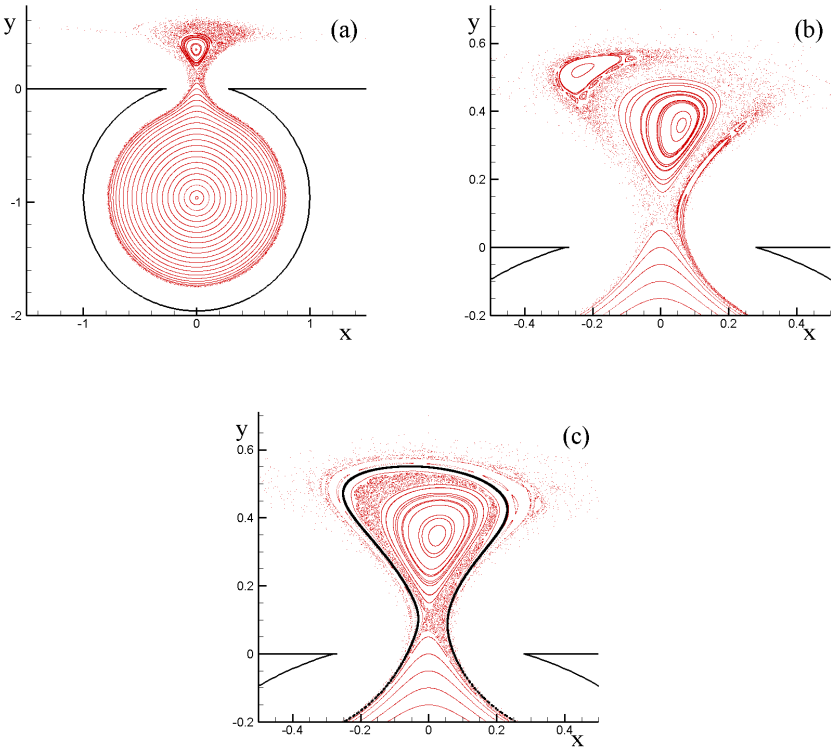

Рис. 4.9. Сечения Пуанкаре, соответствующие стационарной конфигурации с рис. 4.6b для фиксированного значения амплитуды $\varepsilon = 0,01$ и различных значений частоты возмущения ν: (a) $\nu = 0,7$, (b) $\nu = 1,3$, (c) $\nu = 1,45$. Жирной линией обозначен одна из инвариантных орбит, играющая роль барьера, отделяющего локализованное возмущенное движение от проточного потока.

скими, т.е. вихрь будет двигаться в локализованной области, однако нерегулярным образом.

Как видно из рис. 4.9 значение амплитуды возмущения $\varepsilon = 0,01$ является слишком малым для существенной хаотизации движения вихря внутри выемки. Поэтому выберем большее значение амплитуды $\varepsilon = 0,1$. Как и раньше выберем значение частоты возмущения, которое характерно для стационарной системы. Максимальная частота стационраного движения в данном случае $\approx 2,2$. Сечение Пуанкаре с рис. 4.10a получено для частоты возмущения $\nu = 2$. Из рисунка видно, что остров устойчивости появляется в тонком хаотическом слое, появившемся вместо разрушенной внешней сепартрисы. В тоже время, остров устойчивости не взаимодействует с хаотическим слоем. С дальнейшим увеличением значения частоты возмущения $\nu = 2,1$ остров устойчивости поглощается хаотическим слоем, который в свою очередь увеличивается по площади. Заметим, что на месте локализованной области движения в окрестности верхней стационарной эллиптической точки не остается регулярных траекторий, так как амплитуда возмущения слишком большая.

Частотная зависимость, изображенная на рис. 4.7c аналогична показанной на рис. 4.7b.

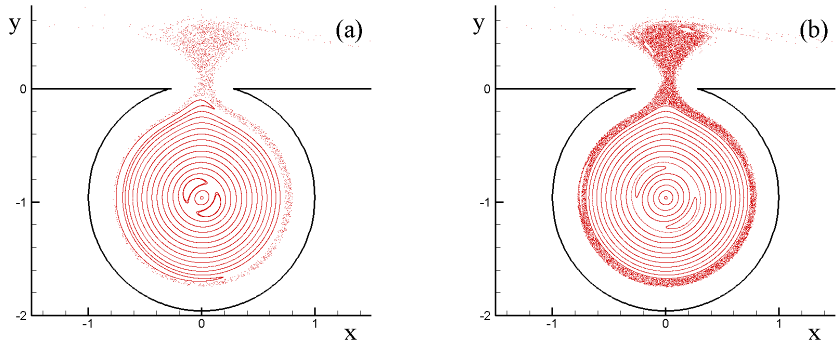

Рис. 4.10. Сечения Пуанкаре, соответствующие стационарной конфигурации с рис. 4.6b для фиксированного значения амплитуды $\varepsilon = 0,1$ и различных значений частоты возмущения ν: (a) $\nu = 2$, (b) $\nu = 2,1$.

Поэтому и переход к нерегулярной динамике происходит похожим образом. Верхняя область вращателнього движения эффективно хаотизируется при частоте возмущения ≈ 0.6 (достаточно малой амплитуды $\varepsilon = 0,01$). На рис. 4.11a изображена увеличенная часть соответствующего сечения Пуанкаре. Вращательная область внутри выемки при этом устойчива из-за того, что вход в выемку очень узкий, и, следовательно, возмущение от внешнего потока не может эффективно воздействовать на динамику вихря внутри выемки. Для эффективной хаотизации необходимо существенно увеличивать амплитуду возмущения. При этом интервал наиболее эффективных для хаотизации частот будет $2,5 < \nu < 4$ по причине наличия узкого пика на соответствующей частотной зависимости. Даже существенно большее возмущение при $\varepsilon = 0,5$ не приводит к значительной хаотизации динамики вихря внутри выемки. Из рис. 4.11b, построенного при частоте возмущения $\nu = 2,5$, видно, что самый широкий остров устойчивости находится в окрестности выхода из выемки и не может вызвать существенной хаотизации динамики внутри выемки.

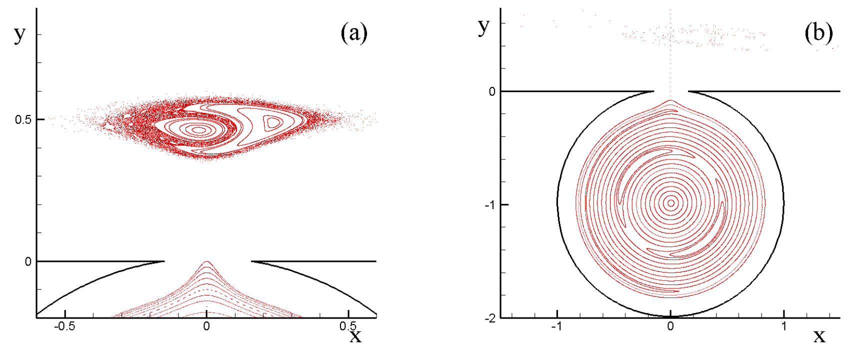

Рис. 4.11. Сечения Пуанкаре, соответствующие стационарной частотной зависимости с рис. 4.6c для параметров: (a) $\varepsilon = 0,01$, $\nu = 0,6$, (b) $\varepsilon = 0,5$, $\nu = 2,5$.

Глава 5

Динамика двух точечных вихрей и жидких частиц в их окрестности в постоянном или переменном сдвиговом потоке

В данной главе рассматривается эволюция двух сингулярных вихрей произвольных интенсивностей в неограниченной области, помещенных во внешний неоднородный поток. Неоднородный поток представляет собой комбинацию сдвиговой и вращательной компонент скорости. Рассматривается баротропная и бароклинные двухслойная и трехслойная постановки. Изучается движение как самих вихрей в таком потоке, так и жидких частиц, находящихся в окрестности двух вихрей. Данная постановка интересна тем, что в реальных потоках когерентные вихревые структуры часто подвергаются воздействию других объектов. Это воздействие приводит к значительному изменению траектории движения рассматриваемых структур. Интерес к двум вихрям обусловлен тем, что именно двух-вихревое взаимодействие порождает устойчивые самораспространяющиеся структуры, которые могут перемещаться на значительные расстояния, перенося при этом значительные объемы жидкости, характерной для области их зарождения [86, 253, 254, 343, 431–434]. Деформационный поток – это простейший способ учесть сдвиговое и вращательное воздействие от вихревых структур во внешнем потоке. Итак, рассмотрим два точечных вихря произвольных интенсивностей μ_α, $\alpha = 1, 2$ в баротропном потоке. Функция тока потока будет иметь вид:

$$\psi_v = \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha \log \left((x - x_\alpha)^2 + (y - y_\alpha)^2 \right), \tag{5.1}$$

где (x_α, y_α) – координаты вихрей.

Далее поместим систему вихрей во внешний деформационный поток вида

$$\psi_d = S(t) \left(x^2 - y^2 \right) + \Omega(t) \left(x^2 + y^2 \right), \tag{5.2}$$

где $S(t)$ – сдвиг скорости, $\Omega(t)$ – внешнее вращение потока. Будем рассматривать переменный внешний поток, т.е.

$$S(t) = S_0 (1 + \varepsilon_1 \sin \nu t), \Omega(t) = \Omega_0 (1 + \varepsilon_2 \sin \nu t), \tag{5.3}$$

где ε_1, ε_2 и ν – амплитуды и частота возмущений компонент деформационного потока, соответственно. Следует сделать несколько пояснений относительно вида данного внешнего потока. Данное поле скорости является первым приближением любого произвольного внешнего поля и чрезвычайно часто используется для анализа устойчивости вихревых структур к различным возмущениям [189, 199–202, 208, 214, 215, 415, 432, 435–450]. Одна из интерпретаций подобного внешнего потока заключается в следующем. Подобное сдвиговое воздействие генерируется за счет наличия достаточно отдаленной изолированной вихревой структуры [451–454], а изменчивость потока во времени может быть связана с меандрирующими струями, от которых периодически отрываются изолированные вихри [371, 449]. Помимо непосредственно геофизических приложений данный внешний поток активно используется в теоретической физике для моделировния оптических ловушек для конденсатов Бозе-Эйнштейна [455–467].

Уравнения абсолютного движения самих точечных вихрей имеют вид:

$$\dot{x}_\alpha = -\left.\frac{\partial\left(\psi_v + \psi_d\right)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_\alpha\\ y=y_\alpha}} = 2y_\alpha\left(S - \Omega\right) + \mu_\beta \frac{y_\beta - y_\alpha}{r_0^2},$$
$$\dot{y}_\alpha = \left.\frac{\partial\left(\psi_v + \psi_d\right)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_\alpha\\ y=y_\alpha}} = 2x_\alpha\left(S + \Omega\right) - \mu_\beta \frac{x_\beta - x_\alpha}{{r_0}^2}, \tag{5.4}$$

где $\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2$, $r_0^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$ – квадрат расстояния между вихрями.

5.1. Эволюция центра завихренности вихревой системы

Сначала проанализируем динамику вихревой системы как целого в таком переменном внешнем потоке. Координаты центра завихренности определятся выражением [435, 440]

$$x_c = \frac{L_x}{\mu_1 + \mu_2}, y_c = \frac{L_y}{\mu_1 + \mu_2}, \tag{5.5}$$

где

$$L_x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, L_y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \tag{5.6}$$

определяют компоненты импульса диполя. Из рассмотрения исключается случай компенсированной вихревой пары, т.е. двух вихрей одинаковой по модулю, но разной по знаку интенсивности. В этом случае, центр завихренности лежит на бесконечности.

Тогда уравнение движения компонент линейного момента имеют вид:

$$\ddot{L}_x - \frac{\left(\dot{S} - \dot{\Omega}\right)}{\left(S - \Omega\right)}\dot{L}_x - 4\left(S^2 - \Omega^2\right)L_x = 0, \quad \ddot{L}_y - \frac{\left(\dot{S} + \dot{\Omega}\right)}{\left(S + \Omega\right)}\dot{L}_y - 4\left(S^2 - \Omega^2\right)L_y = 0. \tag{5.7}$$

Данные выражения являются уравнениями Хилла [468–470]. Известно, что уравнение Хилла допускает появление линейного параметрического резонанса в системе, приводящего к экспоненциальному росту решений.

При этом, важно отметить, что уравнение Хилла является линейным уравнением, следовательно и параметрический резонанс является исключительно линейным эффектом. Попытки интерпретировать появление данного резонанса в нелинейных системах могут привести к неверным выводам [471, 472].

5.1.1. Совпадение амплитуд колебаний, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

Сначала проанализируем уравнение (5.7) для случая совпадения амплитуд колебаний внешнего сдвига и вращения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. В данном случае, система 5.7 интегрируется в элементарных функциях

$$
\begin{aligned}
&L_x = L_x(0)\cos\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right) - \\
&\sqrt{\frac{(\Omega_0 - S_0)}{(S_0 + \Omega_0)}} L_y(0)\sin\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right), \\
&L_y = L_y(0)\cos\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right) + \\
&\sqrt{\frac{(S_0 + \Omega_0)}{(\Omega_0 - S_0)}} L_x(0)\sin\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right).
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Из (5.8) следует, что в случае если $S_0^2 - \Omega_0^2 > 0$ и центр деформации не совпадает с центром завихренности в начальный момент времени, то центр завихренности движется неограниченно по гиперболической траектории, то есть движение диполя является ограниченным для произвольных значений интенсивностей. Если же $S_0^2 - \Omega_0^2 < 0$ то движение становится локализованным. То есть пара вихрей движется в ограниченной области при произвольных значениях интенсивностей μ_1, μ_2. При этом центр завихренности движется по эллиптической траектории вокруг центра сдвига и вращения (либо по гиперболической при $S_0^2 - \Omega_0^2 < 0$)

$$
L_x^2 = \frac{(S_0 - \Omega_0)}{(S_0 + \Omega_0)} L_y^2 + \frac{1}{4}\left({L_x}^2(0) - \frac{S_0 - \Omega_0}{S_0 + \Omega_0}{L_y}^2(0)\right). \tag{5.9}
$$

5.1.2. Несовпадение амплитуд колебаний, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ и примем, что $\Omega_0^2 > S_0^2$. Далее будет показано, что, несмотря на преобладание вращения над сдвигом, всегда существуют такие значения параметров $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, \nu$, при которых движение вихрей становится нелокализованным. В данном случае, уравнение Хилла (5.8) допускает появление параметрического резонанса, приводящего к нелокализованной динамике центра завихренности системы вихрей.

Из (5.7) имеем

$$\ddot{L}_x - \frac{\left(\dot{S} - \dot{\Omega}\right)}{(S-\Omega)}\dot{L}_x - 4\left(S^2 - \Omega^2\right)L_x = 0,$$
$$\ddot{L}_y - \frac{\left(\dot{S} + \dot{\Omega}\right)}{(S+\Omega)}\dot{L}_y - 4\left(S^2 - \Omega^2\right)L_y = 0. \qquad (5.10)$$

Для удобства введем три параметра и новое время τ

$$\delta_1 = \frac{S_0\varepsilon_1 - \Omega_0\varepsilon_2}{S_0 - \Omega_0}, \delta_2 = \frac{S_0\varepsilon_1 + \Omega_0\varepsilon_2}{S_0 + \Omega_0}, \Delta = \frac{\nu}{2\sqrt{\Omega_0^2 - S_0^2}} - 1, \tau = 2\sqrt{\Omega_0^2 - S_0^2}t. \qquad (5.11)$$

Перейдем к новым переменным

$$U = \frac{dL_x/d\tau}{L_x}, V = \frac{dL_y/d\tau}{L_y}. \qquad (5.12)$$

Тогда с учетом (5.12) выражения (5.10) примут вид

$$\frac{dU}{d\tau} - \frac{d\left(S-\Omega\right)/d\tau}{S-\Omega}U - \frac{S^2 - \Omega^2}{\Omega_0^2 - S_0^2} + U^2 = 0,$$
$$\frac{dV}{d\tau} - \frac{d\left(S+\Omega\right)/d\tau}{S+\Omega}V - \frac{S^2 - \Omega^2}{\Omega_0^2 - S_0^2} + V^2 = 0, \qquad (5.13)$$

с начальными условиями

$$U\left(0\right) = V\left(0\right) = i. \qquad (5.14)$$

Решения уравнений (5.12) могут быть формально записаны в виде

$$L_x = \widetilde{C_1}\exp\left\{\int\limits_0^\tau U(\xi)d\xi\right\} + \widetilde{C_2}\exp\left\{-\int\limits_0^\tau U(\xi)d\xi\right\},$$
$$L_y = \widetilde{C_3}\exp\left\{\int\limits_0^\tau V(\xi)d\xi\right\} + \widetilde{C_4}\exp\left\{-\int\limits_0^\tau V(\xi)d\xi\right\}. \qquad (5.15)$$

Из (5.15) видно, что компоненты центра завихренности пары вихрей могут неограниченно расти, если выражение $\int\limits_0^\tau U(\xi)d\xi$ или $\int\limits_0^\tau V(\xi)d\xi$ содержат растущие действительные компоненты.

Рассмотрим преобразования первого уравнения из (5.13). Сделаем следующую замену переменных

$$U = i\frac{(S-\Omega)}{S_0 - \Omega_0}\left(R+1\right). \qquad (5.16)$$

Тогда получаем для R

$$\frac{dR}{d\tau} + i\left[\frac{S-\Omega}{S_0-\Omega_0} - \frac{S+\Omega}{S_0+\Omega_0}\right] + i\frac{S-\Omega}{S_0-\Omega_0}(2R+R^2) = 0, \quad R\left(0\right) = 0. \qquad (5.17)$$

С учетом (5.3) и (5.11) выражение для (5.17) примет вид

$$\frac{dR}{d\tau} = 2i\,(\delta_2 - \delta_1)\sin 2\,(1+\Delta)\,t - i\,(1 + 2\delta_1 \sin 2\,(1+\Delta)\,t)\,(2R + R^2). \tag{5.18}$$

Проведем процедуру усреднения по быстрым осцилляциям [473] для решения вида

$$R = \rho \exp\{-2i\,(1+\Delta)\,\tau\}. \tag{5.19}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{d\tau} - 2i\,(1+\Delta)\,\rho = \\
&= (\delta_2 - \delta_1)\,(\exp\{4i\,(1+\Delta)\,t\} - 1) - i\left(1 + \delta_1 \frac{\exp\{2i\,(1+\Delta)\,t\} - \exp\{-2i\,(1+\Delta)\,t\}}{i}\right) \times \\
&\times (2\rho + \rho^2 \exp\{-2i\,(1+\Delta)\,t\}).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Предположим, что ρ меняется медленно по сравнению с $\exp\{2i\,(1+\Delta)\,t\}$ за период возмущения, тогда быстро осциллирующие члены в уравнении (5.20) можно отбросить, что дает уравнение для медленно меняющейся функции

$$\frac{d\bar\rho}{d\tau} = (\delta_1 - \delta_2) - \delta_1 \bar\rho^2 + 2i\Delta\bar\rho, \quad \bar\rho(0) = 0. \tag{5.21}$$

Интегрируя это выражение, имеем

$$\bar\rho\,(\tau) = (\delta_1 - \delta_2)\,\frac{\sin\beta\tau}{\beta\cos\beta\tau - i\Delta\sin\beta\tau}, \tag{5.22}$$

где

$$\beta = \sqrt{\Delta^2 - (\delta_1 - \delta_2)\,\delta_1} \tag{5.23}$$

дает условие на появление параметрического резонанса. Величина β приблизительно указывает на положение самой широкой зоны нелокализованности движения пары вихрей. В случае если она действительна, то движение локализовано. Если же значение мнимо, центр завихренности движется неограниченно по спиралевидным траекториям от своего начального положения. Таким образом, в системе наблюдается параметрический резонанс, приводящий к появлению нелокализованных режимов движения пары вихрей в нестационарном внешнем поле. На рис. 5.1 приведены примеры траекторий центра завихренности: a) при действительном $\beta \approx 0,15$ (локализованное движение пары вихрей) в то время как $\Delta = -0,18, \delta_1 = -0,1, \delta_2 = 0$, b) при чисто мнимом $\beta \approx 0,92i$ (нелокализованное движение вихрей) в то время как $\Delta = -0,04, \delta_1 = -0,1, \delta_2 = 0$.

Используя теорию Флоке, можно получить точные границы зон неустойчивости в пространстве параметров. Рассмотрим фундаментальную матрицу уравнения (5.13) вида

$$Y_x(t) = \begin{pmatrix} \exp\left\{\int\limits_0^\tau U(\xi)d\xi\right\} & \frac{V(\tau)}{2(S+\Omega)}\exp\left\{\int\limits_0^\tau V(\xi)d\xi\right\} \\ U(t)\exp\left\{\int\limits_0^\tau U(\xi)d\xi\right\} & 2(S-\Omega)\exp\left\{\int\limits_0^\tau V(\xi)d\xi\right\} \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$

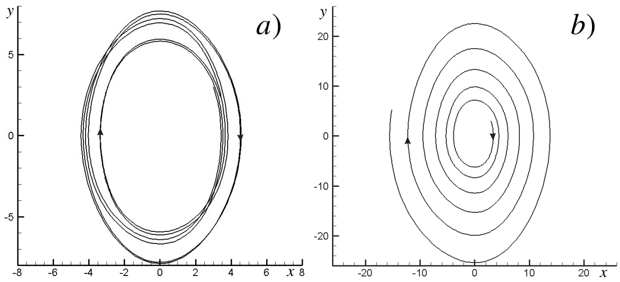

Рис. 5.1. Траектории центра завихренности пары вихрей. a) локализованное движение $\Delta = -0,18, \delta_1 = -0,1, \delta_2 = 0$; b) нелокализованное движение $\Delta = -0,04, \delta_1 = -0,1, \delta_2 = 0$.

где $U(\tau), V(\tau)$ решения уравнений Риккати (5.13) с начальными условиями

$$U(0) = V(0) = 0, \tag{5.25}$$

Выражение для мультипликаторов κ имеет вид:

$$\det(Y_x(T = \frac{\pi}{1+\Delta}) - \kappa Y_x(0)) = 0. \tag{5.26}$$

С учетом (5.26) получаем

$$\kappa^2 - \kappa \left(\frac{S(T) - \Omega(T)}{S_0 - \Omega_0} \exp\left\{ \int\limits_0^T V(\xi) d\xi \right\} + \exp\left\{ \int\limits_0^T U(\xi) d\xi \right\} \right) +$$

$$+ \frac{4\left(S^2(T) - \Omega^2(T)\right) - U(T)V(T)}{4(S_0 - \Omega_0)(S\,(T) + \Omega\,(T))} \exp\left\{ \int\limits_0^T \left(U(\xi) + V(\xi)\right) d\xi \right\} = 0 \tag{5.27}$$

Так как S и Ω периодические, то имеет место равенство

$$\frac{S(T) \pm \Omega(T)}{S_0 \pm \Omega_0} = 1. \tag{5.28}$$

Тогда выражение (5.27) сводится к

$$\kappa^2 - \kappa \left(\exp\left\{ \int\limits_0^T V(\xi) d\xi \right\} + \exp\left\{ \int\limits_0^T U(\xi) d\xi \right\} \right) + 1 = 0. \tag{5.29}$$

Равенство нулю дискриминанта этого выражения является условием на определение точных границ области локализованности движения пары вихрей

$$\exp\left\{ \int\limits_0^T V(\xi) d\xi \right\} + \exp\left\{ \int\limits_0^T U(\xi) d\xi \right\} = \pm 2. \tag{5.30}$$

На рисунке 5.2 темные области соответствуют параметрической неустойчивости. Жирные линии показывают границы размеров главной области неустойчивости, полученные с помощью аналитической оценки.

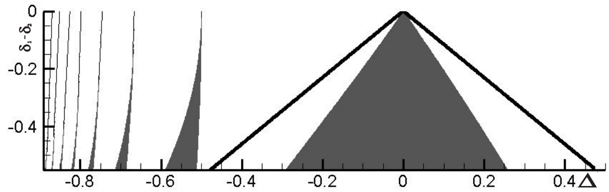

Рис. 5.2. Области параметрического резонанса при $\delta_2 = 0$. Жирные линии соответствуют оценке, полученной с помощью усреднения по быстрым осцилляциям (переход от чисто мнимого коэффициента β к действительному и обратно).

В данном параграфе рассмотрено движение центра завихренности пары вихрей произвольных интенсивностей в нестационарном вращательно-сдвиговом внешнем потоке. Рассмотрен несимметричный случай взаимодействия пары вихрей с внешним потоком. За счет данной асимметрии центр завихренности совершает колебания вокруг центра сдвига и вращения.

В случае совпадения вида колебаний сдвига и вращения показана интегрируемость движения центра завихренности. Если среднее значение вращения по модулю превосходит среднее значение сдвига, то центр завихренности движется локализовано по эллиптическим траекториям. В обратном случае, центр завихренности движется по гиперболическим траекториям.

Рассматривая локализованный при совпадении амплитуд случай превосходства модуля усредненного вращения над модулем усредненного сдвига, показано, что в случае несовпадения амплитуд колебаний сдвига и вращения, уравнения на компоненты центра завихренности сводятся к уравнениям Риккати. Показано наличие параметрического резонанса. При определенных параметрах амплитуд и частоты колебаний сдвига и вращения положение центра завихренности неограниченно растет по спиралевидным траекториям. Таким образом, исходно локализованное движение в стационарной конфигурации становится нелокализованным при малом возмущении внешнего потока. Отметим, что появление параметрической неустойчивости в задачах вихревой динамики является частым явлением. Например, в работе [144] параметрическая неустойчивость приводит к неустойчивости на границе двухслойного бароклинного вихря.

5.2. Обобщение на случай произвольного количества вихрей и слоев жидкости

Выводы предыдущего параграфа легко обобщаются на случай вихревой системы, состоящей из произвольного количества точечных вихрей, помещенных в произвольное количество непроницаемых слоев вращающейся жидкости. Рассмотрим динамику N точечных вихрей во вращающейся жидкости, состоящей из M слоев различных постоянных плотностей, в геострофическом приближении [104, 119, 314]. Уравнения, описывающие динамику данной системы в неограниченной области, приведены в работе [121]. Теперь введем в систему внешней деформационный поток вида (5.2) [11, 203, 371, 449, 451, 474–478], а также дополнительный однородный поток [1–6, 14, 21, 103, 166, 167, 169, 171–173, 319–321, 339, 347–349], который является нулевым членом в разложении произвольного внешнего потока. Конечные динамические уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{dx_j^\alpha}{dt} &= A\left(t\right) + 2y_j^\alpha\left(S\left(t\right) - \Omega\left(t\right)\right) - \sum_{i=1}^{M} h_i \sum_{\beta=1}^{N_i} \mu_i^\beta \frac{\left(y_j^\alpha - y_i^\beta\right)}{\left(r_{ji}^{\alpha\beta}\right)^2} \Phi_{ji}^{\alpha\beta}\left(r_{ji}^{\alpha\beta}\right),\\
\frac{dy_j^\alpha}{dt} &= -B\left(t\right) + 2x_j^\alpha\left(S\left(t\right) + \Omega\left(t\right)\right) + \sum_{i=1}^{M} h_i \sum_{\beta=1}^{N_i} \mu_i^\beta \frac{\left(x_j^\alpha - x_i^\beta\right)}{\left(r_{ji}^{\alpha\beta}\right)^2} \Phi_{ji}^{\alpha\beta}\left(r_{ji}^{\alpha\beta}\right).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Здесь x_j^α, y_j^α – положение точечного вихря α с интенсивностью μ_j^α ($1 \le \alpha, \beta \le N_j$ если $N_j \ne 0$), находящегося в j–ом слое ($1 \le j \le M$), h_j – глубина слоя j, $r_{ji}^{\alpha\beta}$ – расстояние между вихрем α из слоя j и вихря β из слоя i. Из сумм исключается сингулярный случай при $\alpha = \beta$ одновременно с $i = j$. $S(t)$ – внешний сдвиг, $\Omega(t)$ –внешнее вращение. $A(t)$ и $B(t)$ – компоненты равномерного внешнего потока. Выражения $\Phi_{ji}^{\alpha\beta}\left(r_{ji}^{\alpha\beta}\right)$ определяются для каждого числа слоев M отдельно. Для целей данного параграфа вид данной функции не существенен. Здесь и далее рассматривается случай ненулевой общей интенсивности вихревой системы.

$$\mu = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\beta=1}^{N_i} h_i \mu_i^\beta \ne 0. \tag{5.32}$$

Положение центра завихренности как и прежде:

$$X = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{M} \sum_{\beta=1}^{N_i} h_i \mu_i^\beta x_i^\beta, \;\; Y = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{M} \sum_{\beta=1}^{N_i} h_i \mu_i^\beta y_i^\beta. \tag{5.33}$$

Из (5.31) следует

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= A\left(t\right) + 2Y\left(S\left(t\right) - \Omega\left(t\right)\right),\\
\frac{dY}{dt} &= -B\left(t\right) + 2X\left(S\left(t\right) + \Omega\left(t\right)\right).
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Общее формальное решение данной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{X}^{-1}(t_0)\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \mathbf{X}(t)\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{X}^{-1}(\tau)\begin{pmatrix} A(t) \\ -B(t) \end{pmatrix} d\tau, \qquad (5.35)$$

где $\mathbf{X}(t)$ – фундаментальная матрица системы

$$\frac{dX}{dt} = 2Y\left(S(t) - \Omega(t)\right),$$
$$\frac{dY}{dt} = 2X\left(S(t) + \Omega(t)\right). \qquad (5.36)$$

Введем замену (5.36)

$$Z_1 = X/\sqrt{(S(t) - \Omega(t))},\;\; Z_2 = Y/\sqrt{(S(t) + \Omega(t))}, \qquad (5.37)$$

приводящую к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 Z_{1,2}}{dt^2} + \left\{\frac{1}{2}\frac{d^2\ln\left(S(t)\pm\Omega(t)\right)}{dt^2} - \frac{1}{4}\left[\frac{d\ln\left(S(t)\pm\Omega(t)\right)}{dt}\right]^2 - 4\left(S^2(t) - \Omega^2(t)\right)\right\} Z_{1,2} = 0. \quad (5.38)$$

При условии периодических $S(t),\Omega(t)$ выражение 5.38 является уравнением Хилла [470].

Как показано в предыдущем параграфе, система (5.36) обладает важным свойством -– если скорость сдвига и вращения $S(t)/\Omega(t) = S_0/\Omega_0$ меняются по одинаковому закону, то эта система становится интегрируемой в квадратурах. Действительно, пусть

$$S(t) = S_0\phi_1(t),\;\; \Omega(t) = \Omega_0\phi_2(t), \qquad (5.39)$$

и $\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi(t)$, тогда

$$X = X_0\cos\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\int\limits_0^t\phi(\tau)\,d\tau\right) -$$
$$\sqrt{\frac{(\Omega_0 - S_0)}{(S_0 + \Omega_0)}}Y_0\sin\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\int\limits_0^t\phi(\tau)\,d\tau\right),$$
$$Y = Y_0\cos\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\int\limits_0^t\phi(\tau)\,d\tau\right) +$$
$$\sqrt{\frac{(S_0 + \Omega_0)}{(\Omega_0 - S_0)}}X_0\sin\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\int\limits_0^t\phi(\tau)\,d\tau\right). \qquad (5.40)$$

В частности, если

$$\phi_1(t) = 1 + \varepsilon_1\sin\nu t;\;\; \phi_2(t) = 1 + \varepsilon_2\sin\nu t, \qquad (5.41)$$

при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, следует решение

$$X = X_0\cos\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right) -$$
$$\sqrt{\frac{(\Omega_0 - S_0)}{(S_0 + \Omega_0)}}Y_0\sin\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right),$$
$$Y = Y_0\cos\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right) +$$
$$\sqrt{\frac{(S_0 + \Omega_0)}{(\Omega_0 - S_0)}}X_0\sin\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\left(t + \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\cos\nu t - 1\right)\right)\right). \quad (5.42)$$

В частности, решения (5.40) и (5.42) указывают на то, что траектории системы ограничены при $\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right) > 0$ и неограниченны при $\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right) < 0$. Данный результат обобщает вывод предыдущего параграфа на случай произвольного количества вихрей, расположенных в произвольном количестве слоев. В стационарном случае центр завихренности описывает эллиптические траектории в режиме ограниченного движения и гиперболические траектории в режиме неограниченного движения. Центры эллипсов и гипербол сдвинуты в точку

$$X_0 = \frac{B_0}{2\left(S_0 + \Omega_0\right)},\ \ Y_0 = -\frac{A_0}{2\left(S_0 - \Omega_0\right)}. \quad (5.43)$$

В предыдущем параграфе показано, что при наличии периодических $\phi_1(t) \neq \phi_2(t)$, уравнение Хилла (5.38) описывает появление неограниченных решений даже при условии среднего вращения превосходящего средний сдвиг $\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right) > 0$ в результате параметрической неустойчивости [473].

Легко убедиться, что однородный плоский поток $(A(t), B(t))$ не ведет к изменению режимов движения, за исключением случая $|S_0| = |\Omega_0|$. Например, интеграл в (5.35) можно выразить посредством двух функций

$$\frac{1}{4\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}}\sqrt{\frac{(\Omega_0 - S_0)}{2S_0}}\ln\left|\frac{\sin\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\int\limits_0^t\phi(\tau)\,d\tau\right) - \sqrt{\frac{(S_0-\Omega_0)}{2S_0}}}{\sin\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\int\limits_0^t\phi(\tau)\,d\tau\right) + \sqrt{\frac{(S_0-\Omega_0)}{2S_0}}}\right|,$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}}\sqrt{-\frac{(S_0 + \Omega_0)}{2S_0}}\times$$
$$\ln\left|\frac{\cos\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\int\limits_0^t\phi(\tau)\,d\tau\right) - \sqrt{-\frac{(S_0+\Omega_0)}{2S_0}}}{\cos\left(2\sqrt{\left({\Omega_0}^2 - {S_0}^2\right)}\int\limits_0^t\phi(\tau)\,d\tau\right) + \sqrt{-\frac{(S_0+\Omega_0)}{2S_0}}}\frac{1 + \sqrt{-\frac{(S_0+\Omega_0)}{2S_0}}}{1 - \sqrt{-\frac{(S_0+\Omega_0)}{2S_0}}}\right|. \quad (5.44)$$

Учитывая неравенство $\left|\frac{S_0\pm\Omega_0}{2S_0}\right| \leq 1$, логарифмическая функция остается ограниченной при условии ограниченности однородного решения. В обратном случае, логарифмическая функция растет неограниченно, когда растет однородное решение.

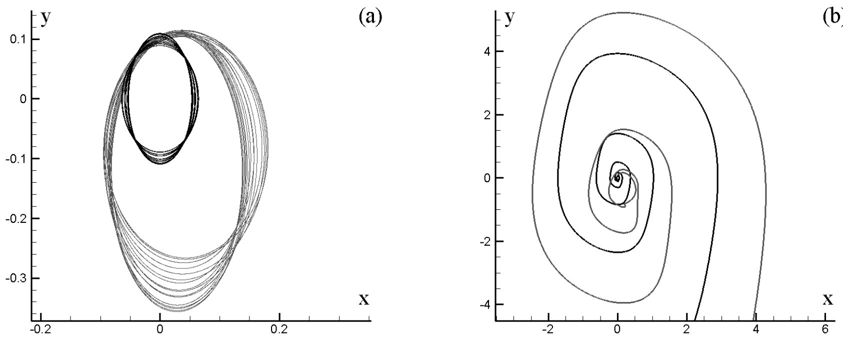

Рис. 5.3. Траектории центра завихренности при $S_0 = -0,01,\ \Omega_0 = -0,02$ в режиме ограниченного движения (a) $\varepsilon_1 = 0,5, \varepsilon_2 = 0,2, \nu = 0,01$ в режиме параметрической неустойчивости (b) $\varepsilon_1 = 0,5, \varepsilon_2 = 0,\ \nu = 0,07$. Темные траектории – отсутствие внешнего однородного потока $A = B = 0$, серые траектории – внешний однородный поток вида $A = B = 0,01\,(1 + 0,1 \sin 0,001t)$.

Рисунок 5.3 показывает типичные траектории движения центра завихренности в режимах ограниченного и неограниченного поведения. Серые траектории соответствуют наличию однородного потока, темные – отсутствию однородного потока, т.е. $A(t) = B(t) = 0$. Изменения в траекториях меняеют качественного поведения центра завихренности.

Вернемся к системе (5.31). Рассмотрим преобразование координат

$$\tilde{x}_j^\alpha = x_j^\alpha - X;\ \ \tilde{y}_j^\alpha = y_j^\alpha - Y, \tag{5.45}$$

где X, Y – координаты центра завихренности. Тогда уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}_j^\alpha}{dt} &= 2\tilde{y}_j^\alpha \left(S\left(t\right) - \Omega\left(t\right)\right) - \sum_{i=1}^{M} h_i \sum_{\beta=1}^{N_i} \mu_i^\beta \frac{\left(\tilde{y}_j^\alpha - \tilde{y}_i^\beta\right)}{\left(\tilde{r}_{ji}^{\alpha\beta}\right)^2} \Phi_{ji}^{\alpha\beta}\left(\tilde{r}_{ji}^{\alpha\beta}\right),\\
\frac{d\tilde{y}_j^\alpha}{dt} &= 2\tilde{x}_j^\alpha \left(S\left(t\right) + \Omega\left(t\right)\right) + \sum_{i=1}^{M} h_i \sum_{\beta=1}^{N_i} \mu_i^\beta \frac{\left(\tilde{x}_j^\alpha - \tilde{x}_i^\beta\right)}{\left(\tilde{r}_{ji}^{\alpha\beta}\right)^2} \Phi_{ji}^{\alpha\beta}\left(\tilde{r}_{ji}^{\alpha\beta}\right),
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Данная система обладает двумя интегралами движения $\tilde{X} = \tilde{Y} = 0$. Новый центр завихренности всегда находится в точке начала координат $\tilde{X}_0 = \tilde{Y}_0 = 0$.

Таким образом показано, что результаты для любого случая симметрично расположенных вихрей [227] могут быть перенесены на несимметричный случай.

Приведенный анализ продемонстрировал особенности движения системы точечных вихрей, помещенных в деформационный поток, как целого. То есть, движение центра завихренности показывает, как движется система в целом, при этом динамика самих вихрей и жидких частиц из их окрестности может быть значительно сложней. Анализу поведения самих вихрей и адвектируемой ими жидкости посвящены следующие параграфы данной главы.

5.3. Динамика двух точечных вихрей произвольных интенсивностей, помещенных в постоянный или переменный деформационные потоки

Итак рассмотрим систему (5.4), описывающую динамику двух точечных вихрей произвольных интенсивностей μ_1, μ_2 при наличии внешнего деформационного потока с постоянными компонентами сдвига S_0 и вращения Ω_0. В работе [371] показано, что при $\mu_1 = \mu_2$ динамическая система (5.4) с $2,5$ степенями свободы остается симметричной относительно центра вращения и деформации. Далее, эта система редуцируется к системе с 1.5 степенями свободы, что эквивалентно изучению движения только одного вихря вместо двух. Так как система имеет $1,5$ степени свободы, то ее решения могут демонстрировать хаотический характер.

В случае произвольных интенсивностей вихрей μ_1, μ_2 центр завихренности вихревой системы не совпадает с центром деформации. В результате нарушается симметрия, что приводит к усложнению траекторий движения. Однако, как и в случае равных интенсивностей, количество степеней свободы в системе можно уменьшить на единицу.

Положения центра завихренности определяются выражениями (5.5). В случае постоянной внешней деформации, т.е. $S = S_0 \equiv const$, $\Omega = \Omega_0 \equiv const$ данные выражения интегрируются в квадратурах в виде (5.9). Явный вид траекторий компонент импульса системы тогда имеет вид

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x(0) \\ L_y(0) \end{pmatrix} \cos\left(\Phi(t)\right) - \frac{\sqrt{\Omega_0^2 - S_0^2}}{S_0 + \Omega_0} \begin{pmatrix} L_y(0) \\ \frac{S_0+\Omega_0}{S_0-\Omega_0} L_x(0) \end{pmatrix} \sin\left(\Phi(t)\right), \\ \Phi(t) = 2\sqrt{\Omega_0^2 - S_0^2} t. \end{gathered} \tag{5.47}$$

В соответствии с (5.47), L_x, L_y связаны с преобразованиями координат и меняются со временем. Используя данные выражения, координаты одного вихря могут быть выражены через координаты второго. В результате уравнения в системе (5.4) разделяются на две независимые системы. Что, в свою очередь, означает уменьшение числа степеней свободы до $1,5$.

Дальнейшее уменьшение числа степеней свободы обычно включает в себя вычисление углового момента (см., например, [386])

$$M(t) = \mu_1 \left(x_1^2 + y_1^2\right) + \mu_2 \left(x_2^2 + y_2^2\right). \tag{5.48}$$

Однако в нашей задаче, в общем случае, данная величина не сохраняется и выписать ее явное выражение не представляется возможным. Единственным исключением, когда данное выражение является инвариантом $M = 0$, служит случай совпадения центра деформации и центра завихренности (т.е. при $L_x(0) = L_y(0) = 0$).

Рассмотрим общий случай несовпадения центра деформации и центра завихренности. Тогда, при $S_0^2 - \Omega_0^2 > 0$, центр завихренности движется неограниченно от центра деформации по гиперболическим траекториям. В соответствии с (5.47), локализованное движение системы возможно только при $S_0^2 - \Omega_0^2 < 0$. Далее будем рассматривать случай локализованного движения.

Перейдем в систему координат, связанную с центром завихренности

$$\begin{aligned}
&x_1 - x_c = r_1 \cos\varphi_1, x_2 - x_c = r_2 \cos\varphi_2,\\
&y_1 - y_c = r_1 \sin\varphi_1, y_2 - y_c = r_2 \sin\varphi_2,\\
&r_1^2 = (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2, r_2^2 = (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Используя новые переменные, выражение для компонент импульса преобразуется к виду

$$\mu_1 r_1 \cos\varphi_1 = -\mu_2 r_2 \cos\varphi_2, \quad \mu_1 r_1 \sin\varphi_1 = -\mu_2 r_2 \sin\varphi_2. \tag{5.50}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \varphi_2, \qquad \mathbf{sgn}(\mu_1) \neq \mathbf{sgn}(\mu_2);\\
&\varphi_1 = \varphi_2 + \pi, \qquad \mathbf{sgn}(\mu_1) = \mathbf{sgn}(\mu_2),
\end{aligned} \tag{5.51}$$

и

$$\begin{aligned}
&\mu_1 r_1 = -\mu_2 r_2, \qquad \mathbf{sgn}(\mu_1) \neq \mathbf{sgn}(\mu_2);\\
&\mu_1 r_1 = \mu_2 r_2, \qquad \mathbf{sgn}(\mu_1) = \mathbf{sgn}(\mu_2).
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Следовательно, расстояние от вихрей до движущегося центра завихренности всегда обратно пропорциональная интенсивности вихрей.

Функция тока одного из вихрей в движущейся системе координат имеет вид

$$\psi = \psi_d + \frac{\mu_2}{\mu} \log(\mu r_1), \tag{5.53}$$

где $\mu = \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$ и

$$\psi_d = (r_1 \cos\varphi_1 + x_c)^2 (\Omega_0 + S_0) + (r_1 \sin\varphi_1 + y_c)^2 (\Omega_0 - S_0) =$$
$$= (\Omega_0 + S_0) \left(r_1^2 \cos^2\varphi_1 + 2r_1 x_c \cos\varphi_1\right) + (\Omega_0 - S_0) \left(r_1^2 \sin^2\varphi_1 + 2r_1 y_c \sin\varphi_1\right) +$$
$$+ (\Omega_0 + S_0)\, x_c^2 + (\Omega_0 - S_0)\, y_c^2 =$$
$$= \left[\Omega_0 r_1^2 + S_0 r_1^2 \cos 2\varphi_1\right] + 2r_1 \left\{(\Omega_0 + S_0)\, x_c \cos\varphi_1 + (\Omega_0 - S_0)\, y_c \sin\varphi_1\right\} +$$
$$+ \frac{(\Omega_0 + S_0)\,\mu_2^2}{\mu^2} \left(L_x^2(0) - \frac{S_0 - \Omega_0}{S_0 + \Omega_0} L_y^2(0)\right). \tag{5.54}$$

Динамические уравнения в системе координат (r_1, φ_1), движущейся вместе с центром завихренности, имеет вид

$$\dot r_1 = -\frac{1}{r_1}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_1} - (\dot x_c \cos\varphi_1 + \dot y_c \sin\varphi_1)\,, \dot\varphi_1 = \frac{1}{r_1}\frac{\partial\psi}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1}(\dot x_c \sin\varphi_1 - \dot y_c \cos\varphi_1)\,. \tag{5.55}$$

Подставляя (5.47) в (5.5) и дифференцируя по времени, получаем

$$(\mu_1 + \mu_2) \begin{pmatrix} \dot x_c \\ \dot y_c \end{pmatrix} = -2\sqrt{\Omega_0^2 - S_0^2} \left(\begin{pmatrix} L_x(0) \\ L_y(0) \end{pmatrix} \sin(\Phi(t)) + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{\Omega_0^2 - S_0^2}}{S_0 + \Omega_0} \begin{pmatrix} L_y(0) \\ \frac{S_0+\Omega_0}{S_0-\Omega_0} L_x(0) \end{pmatrix} \cos(\Phi(t)) \right), \tag{5.56}$$

Отсюда уравнения движения (5.55) преобразуются к виду

$$\dot r_1 = -\frac{1}{r_1}\left(-2S_0 r_1^2 \sin 2\varphi_1 + 2r_1 \left\{-(\Omega_0 + S_0)\, x_c \sin\varphi_1 + (\Omega_0 - S_0)\, y_c \cos\varphi_1\right\}\right) -$$
$$- (\dot x_c \cos\varphi_1 + \dot y_c \sin\varphi_1) = 2S_0 r_1 \sin 2\varphi_1,$$
$$\dot\varphi_1 = \frac{1}{r_1}\left(2\Omega_0 r_1 + 2S_0 r_1 \cos 2\varphi_1 + 2\left\{(\Omega_0 + S_0)\, x_c \cos\varphi_1 + (\Omega_0 - S_0)\, y_c \sin\varphi_1\right\} + \frac{\mu_2}{\mu r_1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{r_1}(\dot x_c \sin\varphi_1 - \dot y_c \cos\varphi_1) = 2\Omega_0 + 2S_0 \cos 2\varphi_1 + \frac{\mu_2}{\mu r_1^2}. \tag{5.57}$$

Уравнения движения (5.57) совместно с преобразованиями координат (5.49) описывают динамику двух точечных вихрей произвольных интенсивностей, помещенных в асимметричный внешний постоянный деформационный поток. Система уравнений (5.57) имеет ту же форму, что и уравнения для двух вихрей одинаковых интенсивностей в симметричном внешнем деформационном потоке [371].

Центр завихренности вращается вокруг центра деформации, расположенного в начале координат, по эллиптической траектории с частотой

$$\omega_c = 2\sqrt{\Omega_0^2 - S_0^2}. \tag{5.58}$$

В данном случае уравнения движения (5.57) явно не зависят от времени, т.е. мы имеем дело с системой с 1 степенью свободы. Такая система является интегрируемой для любых

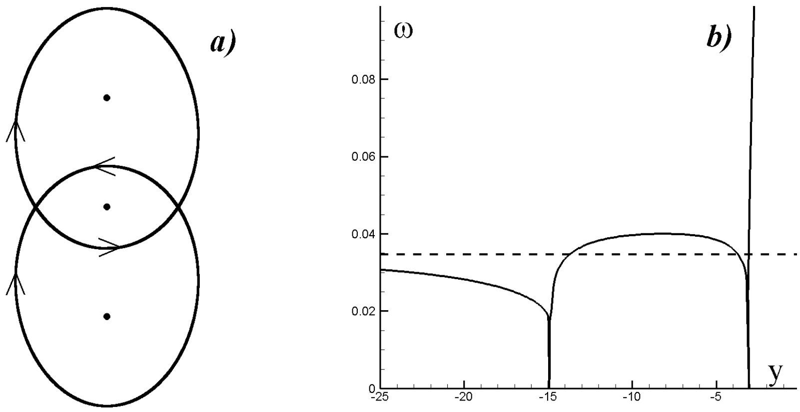

Рис. 5.4. a) фазовый портрет системы (5.57), соответствующий центру завихренности, изначально расположенному в точке $(1, 1)$, при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $S_0 = -0,01$, $\Omega_0 = -0,02$. Точки в областях рециркуляции обозначают регулярные особые точки; b) частота вращения вихря вокруг соответствующих особых точек для фазового портрета с рис. 5.4a в зависимости от начальной координаты y. Пунктирная линия показывает частоту вращения (5.58) центра завихренности вокруг центра деформации.

значений параметров Ω_0, S_0. Первый интеграл системы имеет форму функции тока (5.53). Особые точки системы определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= 2S_0 r_1 \sin 2\varphi_1 = 0, \\ \dot{\varphi}_1 &= 2\Omega_0 + 2S_0 \cos 2\varphi_1 + \frac{\mu_2}{\mu r_1^2} = 0. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{-\frac{\mu_2}{2\mu\left(\Omega_0 + S_0\right)}}, \varphi_1 = \pi n, n = 0, 1, 2, ..., \\ r_1 &= \sqrt{-\frac{\mu_2}{2\mu\left(\Omega_0 - S_0\right)}}, \varphi_1 = \pi n + \frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, ... \end{aligned} \tag{5.60}$$

Также, помимо регулярных точек, определяемых из данной системы, в фазовом пространстве всегда существует дополнительная сингулярная точка при $r_1 = 0$ для любого φ_1. В соответствии с (5.60)в фазовом пространстве может существовать 0, 2, 4 регулярных особых точек в зависимости от параметров внешней деформации [12, 25, 477].

На рис. 5.4a изображен фазовый портрет системы (5.57). Данный фазовый портрет содержит фазовые траектории вихря интенсивности μ_1 в системе координат, движущейся вместе с центром завихренности. Частота вращения вихря вокруг эллиптических особых точек представлена на рис. (5.4)b. В центре координат находится сингулярная особая точка. Частота в ее окрестности стремитсся к бесконечности. Удаляясь от этой точки, частота падает до нуля на сепаратрисе, с которой начинается область рециркуляции с обратным направлением вращения. Далее частота снова падает до нуля на сепаратрисе, после которой начинает асимптотически стремится к частоте вращения центра завихренности вокруг деформационного центра (5.58).

5.4. Параметрическая неустойчивость в окрестности эллиптических особых точек в системе двух точечных вихрей, помещенных в переменный деформационный поток

В данном параграфе рассмотрим баротропную модель двух-вихревого взаимодействия происходящего на фоне крупномасштабного переменного сдвигового течения. Случай постоянных сдвига и внешнего вращения рассмотрен в предыдущем параграфе. Существует режим, при котором вихри находятся в локализованной области, в том числе существуют стационарные точки, при помещении в которые, вихри остаются неподвижными. Как видно из рис. 5.4а две стационарные точки являются эллиптическими. Это подразумевает, что динамика в окрестности этих точек крайне устойчивая и не сильно отличается даже при значительных возмущениях внешнего потока. Однако, как будет показано в данном параграфе, в окрестности этих эллиптических точек может наблюдаться параметрическая неустойчивость, что приводит к локальному экспоненциальному расхождению траекторий вихрей. Такое экспоненциальное расхождение продолжается до тех пор, пока траектории не попадают в область сильной нелинейности в окрестности сепаратрисы. Если же возмущение не индуцирует появление параметрического резонанса, то траектории остаются в окрестности стационарных эллиптических точек даже при значительных возмущениях внешнего потока. Эффект параметрической неустойчивости в данном случае похож на случай параметрической неустойчивости для центра завихренности произвольного количества точечных вихрей, рассмотренный в предыдущих параграфах. Итак, проанализируем влияние параметрической неустойчивости в окрестности эллиптических точек.

Рассматривается движение двух точечных вихрей с интенсивностями μ_1, μ_2 (причем $\mu_1 \neq -\mu_2$), помещенных в переменный сдвиговой поток вида 5.2 с компонентами S и Ω, заданных в виде осциллирующих функций [12, 371, 449]. Будем рассматривать случай одинаковых амплитуд осцилляций ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$). Тогда уравнения движения двух точечных вихрей имеют вид 5.4.

Так как внешний поток зависит от времени, то в вихревой системе появляются начальные конфигурации, при которых ее эволюция становится нерегулярной, т.е. любые малые отклонения от конкретной фазовой траектории приводят к непредсказуемым результатам.

Такая нерегулярная динамика зарождается в окрестности сепаратрисы и с увеличением возмущения распространяется на всю область. Однако область стационарных эллиптических точек является наиболее устойчивой и при последовательном увеличении амплитуды возмущения будет становиться неустойчивой в последнюю очередь. Рассмотрим динамику в окрестности возмущенных эллиптических точек подробно. Линеаризуем нестационарную систему (5.4) в окрестности этих точек

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = 2y_1^0\left(S_0-\Omega_0\right)\varepsilon\sin\nu t + \\
&2\left(\left(S_0-\Omega_0\right)\varepsilon\sin\nu t + \frac{\mu}{\left(y_1^0\right)^2}\right)y, \\
&\frac{dy}{dt} = 2x\left(2S_0+\left(S_0+\Omega_0\right)\varepsilon\sin\nu t\right),
\end{aligned} \tag{5.61}$$

где x, y – отклонения от эллиптических точек x_1^0, y_1^0. Система (5.61) неоднородная, ее решения выражаются через решение однородной системы следующим образом

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{X}\left(t\right)\mathbf{X}^{-1}\left(t_0\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \\
&2y_1^0\left(S_0-\Omega_0\right)\varepsilon\mathbf{X}\left(t\right)\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{X}^{-1}\left(\tau\right)\begin{pmatrix} \sin\nu\tau \\ 0 \end{pmatrix}d\tau,
\end{aligned} \tag{5.62}$$

где $\mathbf{X}\left(t\right)$ – фундаментальная матрица однородной системы

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = 2y\left(2\left|S_0-\Omega_0\right| + \left(S_0-\Omega_0\right)\varepsilon\sin\nu t\right), \\
&\frac{dy}{dt} = 2x\left(2S_0+\left(S_0+\Omega_0\right)\varepsilon\sin\nu t\right).
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Данная однородная система содержит периодические коэффициенты и легко сводится к уравнению Хилла. Отсюда следует принципиальная возможность появления параметрической неустойчивости [468–470]. В свою очередь, известно, что решения неоднородной системы ведут себя так же, как и решения однородной в смысле ограниченности. Далее будем рассматривать однородную систему (5.63).

Получим грубую оценку зон параметрической неустойчивости. Используем метод усреднения по быстрым осцилляциям (см., например, [11, 473]). Рассмотрим комплексную функцию

$$R = i\frac{x}{y} - 1. \tag{5.64}$$

Используя (5.63), получаем для R,

$$\frac{dR}{dt} = i\left(a_1 + a_2\sin\nu t\right) + i\left(b_1 + b_2\sin\nu t\right)\left(R+1\right)^2, \tag{5.65}$$

где $a_1 = 2\frac{\mu}{\left(y_1^0\right)^2}$, $a_2 = 2\varepsilon\left(S_0 - \Omega_0\right)$, $b_1 = 4S_0$, $b_2 = 2\varepsilon\left(S_0 + \Omega_0\right)$. Предположим, что решение (5.65) имеет вид

$$R = \rho\left(t\right)e^{-i\nu t}. \tag{5.66}$$

Подставляя (5.66) в (5.65), получаем для ρ

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt} - i\nu\rho = i\left(a_1 + b_1\right)e^{i\nu t} + \frac{a_2 + b_2}{2}\left(e^{2i\nu t} - 1\right) + \\
&ib_1\left(2\rho + \rho^2 e^{-i\nu t}\right) - \frac{b_2}{2}\left(2\rho e^{-i\nu t} + \rho^2 e^{-2i\nu t}\right) + \\
&\frac{b_2}{2}\left(2\rho e^{i\nu t} + \rho^2\right).
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Отбрасывая все быстро-осциллирующие члены, получаем для среднего $\bar{\rho}$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{\rho}}{dt} - i\nu\bar{\rho} = -\frac{a_2 + b_2}{2} + 2ib_1\bar{\rho} + \frac{b_2}{2}\bar{\rho}^2, \\
&\bar{\rho}\left(0\right) = -1.
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Интегрируем данное выражение

$$\frac{\bar{\rho} - \rho_1}{\bar{\rho} - \rho_2} = \frac{1 + \rho_1}{1 + \rho_2}e^{\frac{b_2}{2}\left(\rho_2 - \rho_1\right)t}, \tag{5.69}$$

где $\rho_{1,2} = \pm\left(\frac{a_2 + b_2}{b_2} - \left(\frac{2b_1 + \nu}{b_2}\right)^2\right)^{1/2} + \frac{i\left(2b_1 + \nu\right)}{2}$ и

$$\rho_2 - \rho_1 = -2\left(\frac{a_2 + b_2}{b_2} - \left(\frac{2b_1 + \nu}{b_2}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{5.70}$$

В начальных обозначениях выражение (5.70) преобразуется к

$$\rho_2 - \rho_1 = \pm 2\left(\frac{2S_0}{\left(S_0 + \Omega_0\right)} - \left(\frac{8S_0 + \nu}{2\varepsilon\left(S_0 + \Omega_0\right)}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{5.71}$$

Разность $\rho_2 - \rho_1$ характеризует тип усредненного движения. Если разность действительна, то решение (5.69) – неограниченное. Иначе, при чисто мнимом значении разности, решение (5.69) – ограниченное. Возвращаясь к исходной постановке, делаем вывод, что значение (5.71) определяет испытывает ли окрестность стационарных эллиптических точек локальную параметрическую неустойчивость.

Используя теорию Флоке, получим точные границы зон параметрической неустойчивости линеаризованной задачи на плоскости параметров (ν, ε).

На рис. 5.5 изображены области параметрической неустойчивости. Пунктирная линия показывает границы, данные оценкой (5.71). Оценка, в целом, дает правдивый результат, хотя и заметно завышенный.

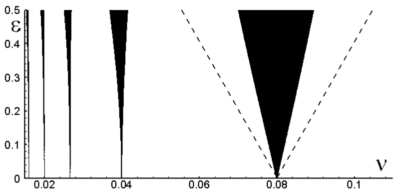

Рис. 5.5. Зоны параметрической неустойчивости при $S_0 = -0,01$, $\Omega_0 = -0,02$. Темные области – неограниченные решения, приводящие к спиралевидным траектриям в окрестности стационарных эллиптических точек. Пунктирная линия – аналитическая оценка области (5.71).

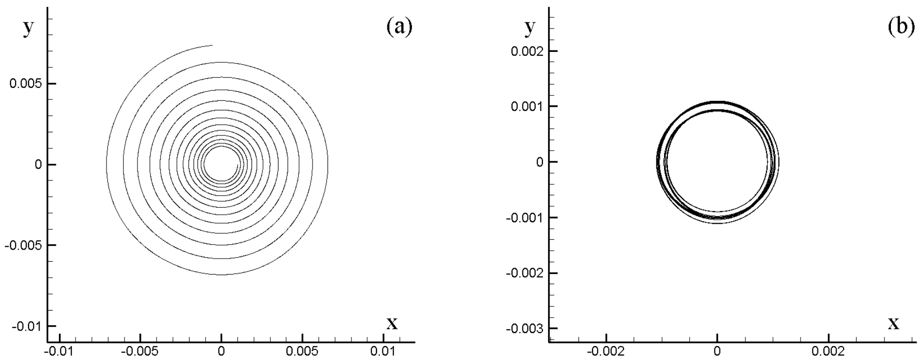

Рис. 5.6. Траектории линеаризованной системы (5.63) при $S_0 = -0,01$, $\Omega_0 = -0,02$. (a) параметрическая неустойчивость при $\nu = 0,08$, $\varepsilon = 0,1$; (b) без параметрической неустойчивости при $\nu = 0,07$, $\varepsilon = 0,1$.

Теперь, изучим поведение траекторий вихрей при выполнении условий параметрической неустойчивости и без выполнения. Будем строить траектории линеаризованной системы и их аналог в исходной нелинейной системе. Линеаризованная система (5.63), действительно, испытывает параметрическую неустойчивость, выражающуюся в спиралевидном неограниченном решении. Такая траектория приведена на рис. 5.6a для главной области параметрической неустойчивости с рис. 5.5. Параметры для траектории $\nu = 0,08$, $\varepsilon = 0,1$. На рис. 5.6b приведена аналогичная траектории, но вне области неустойчивости при $\nu = 0,07$, $\varepsilon = 0,1$. В результате, получаем ограниченную траекторию.

Теперь, проверим насколько линейная теория соответствует движению вихрей в исходной нелинейной системе (5.4). На рис. 5.7 приведены траектории вихрей, соответствующие траекториям, полученным с помощью линеаризованной системы, изображенным на рис. 5.6.

При условии наличия параметрической неустойчивости (см. рис. 5.7a), траектории вихрей экспоненциально расходятся от стационарных эллиптических точек до тех пор, пока

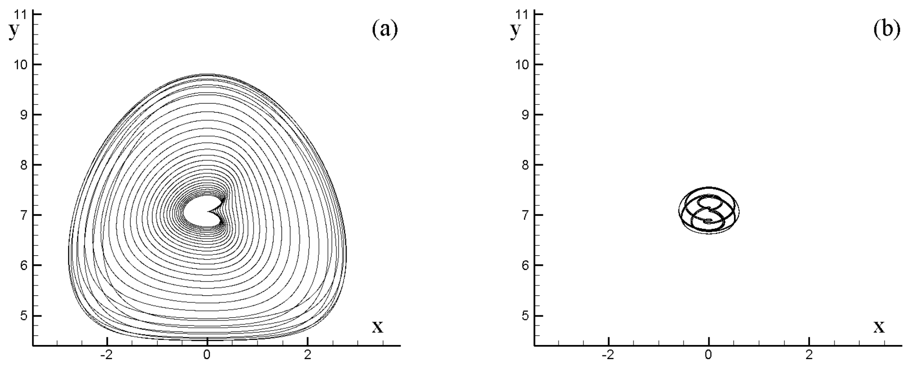

Рис. 5.7. Траектории исходной нелинейной системы (5.4) при $S_0 = -0,01$, $\Omega_0 = -0,02$, $\mu = 1$. (a) локально неограниченное движение, соответствующее параметрической неустойчивости при $\nu = 0,08$, $\varepsilon = 0,1$; (b) локально ограниченное решение при $\nu = 0,07$, $\varepsilon = 0,1$.

не достигнут области сильной нелинейности около разрушенной сепаратрисы стационарной задачи. В окрестности разрушенных сепаратрис линейный параметрический резонанс подавляется и не влияет на дальнейшую динамику вихрей. Однако, как только траектория возвращается в окрестность стационарных эллиптических точек, влияние линейной параметрической неустойчивости снова становится определяющим.

Следует отметить, что параметрический резонанс никак не соотносится с появлением хаотической динамики в нелинейных системах. Многие работы отмечают появление хаотического поведения при условии реализации параметрической неустойчивости в соответствующей линеаризованной системе [471, 472, 479–482]. Однако вывод о том, что линейный параметрический резонанс каким-либо образом связан с хаотической динамикой в нелинейной системе [472] в корне неверен. Аналогичный вывод в поддержку отсутствия связи между параметрической неустойчивостью линеаризованной системы и появлением хаотической динамики в нелинейной системе приведен в работе [483].

Проанализируем поведение нелинейной системы с помощью метода сечений Пуанкаре. Области регулярного движения отображаются на сечениях Пуанкаре в виде замкнутых орбит, а области хаотического – в виде набора беспорядочно разбросанных точек. Рассмотри сечения Пуанкаре для исходной системы (5.4) в главной зоне параметрического резонанса для линейной системы. Так как система симметрична относительно оси x, будем выводить только верхнюю часть фазовых портретов.

На рис. 5.8a приведено сечение Пуанкаре, соответствующее главной зоне параметрической неустойчивости при $\varepsilon = 0,1, \nu = 0,08$. Рисунок 5.8b соответствует параметрам $\varepsilon =$

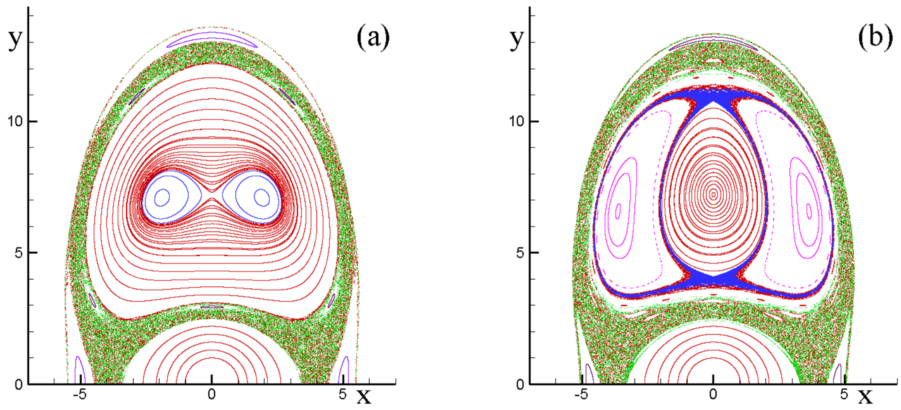

Рис. 5.8. Сечения Пуанкаре для исходной нелинейной системы (5.4) при $S_0 = -0,01$, $\Omega_0 = -0,02$, $\mu = 1$, амплитуде возмущения $\varepsilon = 0,1$ и частоте: (a) $\nu = 0,08$ – главная область параметрической неустойчивости; (b) $\nu = 0,075$ – вне области параметрической неустойчивости.

$0,1, \nu = 0,075$, находящимся рядом с главной зоной параметрической неустойчивости. Амплитуды возмущений одинаковы для обоих рисунков, а частоты немного отличны.

На рис. 5.9 изображены траектории, начинающиеся в стационарных эллиптических точках, для тех же параметров, что и сечения Пуанкаре с рис. 5.8. Как и предсказывает оценка (5.71), траектории, испытывающие локальную параметрическую неустойчивость, расходятся экспоненциально от своих начальных положений вплоть до области сильной нелинейности около разрушенной сепаратрисы (см. рис. 5.9a). Без параметрической неустойчивости, траектории остаются в очень ограниченной области около своих начальных положений (см. рис. 5.9b).

Сравнивая сечения Пуанкаре, видим, что более эффективная хаотизация соответствует набору параметров, при которых не наблюдается параметрическая неустойчивость в линейном приближении, при меньшей частоте $\nu = 0,075$ (см. рис. 5.8b). Более того, в условиях линейной параметрической неустойчивости, вообще, сепаратриса нелинейного резонанса в окрестности эллиптической точки практически не разрушена. В то же время, меньшая частота возмущения индуцирует эффективное разрушение сепаратрисы нелинейного резонанса в окрестности стационарной эллиптической точки и, как следствие, появление большого количества хаотических траекторий [172, 173, 267, 354]. Таким образом, данное сравнение показывает, что появление хаотических траекторий в той или иной области фазового пространства связано исключительно с пространственным распределением нелинейных резонансов и никаким образом не связано с параметрической неустойчивостью в соответствующей

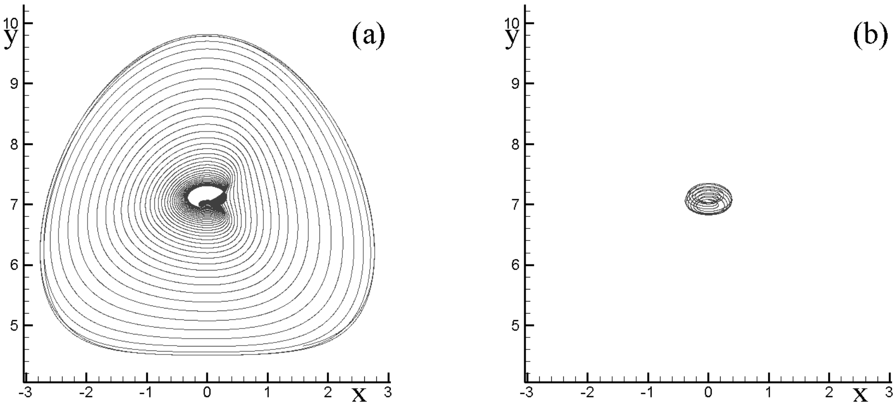

Рис. 5.9. Траектории вихрей, начинающиеся в стационарных эллиптических точках, для нелинейной системы (5.4) при $S_0 = -0,01$, $\Omega_0 = -0,02$, $\mu = 1$, амплитуде возмущения $\varepsilon = 0.1$ и частотах: (a) $\nu = 0,08$ – главная зона параметрической неустойчивости; (b) $\nu = 0,075$ – вне зоны параметрической неустойчивости.

линейной системе.

Для подтверждения этого вывода, можно проанализировать появление хаотической динамики при параметрах возмущения, соответствующих второй зоне линейной параметрической неустойчивости (в окрестности частоты $\nu = 0,04$), приведенной на рис. 5.5. Еще более меньшая частота возмущения приводит к еще более эффективной хаотизации траекторий вихрей. Поэтому рассмотрим меньшую амплитуду возмущения. На рис. 5.10a изображено сечение Пуанкаре при линейной параметрической неустойчивости (при $\varepsilon = 0,03$, $\nu = 0,04$); рис. 5.10b соответствует отсутствию линейной параметрической неустойчивости (при $\varepsilon = 0,03$, $\nu = 0,036$).

На рис. 5.11 приведены траектории движения вихрей, начинающиеся в стационарных эллиптических точках для тех же параметров, что и рис. 5.10. Как и в случае главной зоны линейной параметрической неустойчивости, траектории расходятся экспоненциально от своего начального положения. А без параметрической неустойчивости – траектории остаются в ограниченной области.

5.5. Адвекция жидких частиц в системе двух точечных вихрей, помещенных в постоянный деформационный поток

Рассмотрим теперь адвекцию жидких частиц двумя точечными вихрями, помещенными в стационарный внешний деформационный поток. С точки зрения приложений геофизиче-

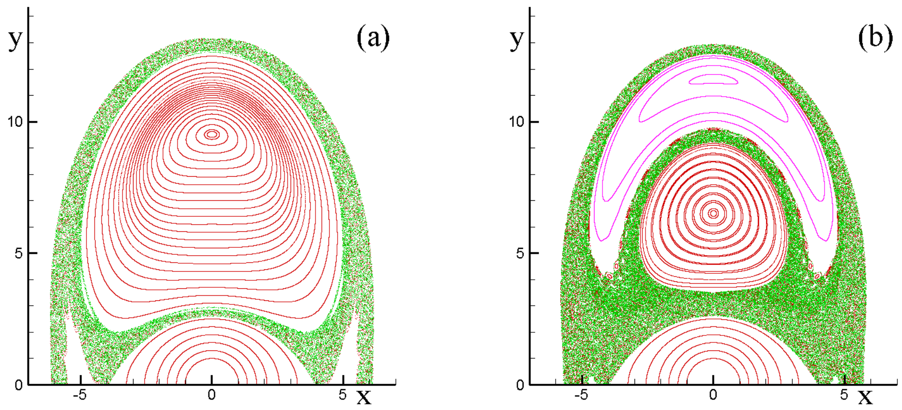

Рис. 5.10. Сечения Пуанкаре исходной нелинейной системы (5.4) при $S_0 = -0,01$, $\Omega_0 = -0,02$, $\mu = 1$, амплитуде возмущения $\varepsilon = 0,03$ и частотах: (a) $\nu = 0,04$ – вторая зона линейно параметрической неустойчивости; (b) $\nu = 0,036$ – вне зоны линейной параметрической неустойчивости.

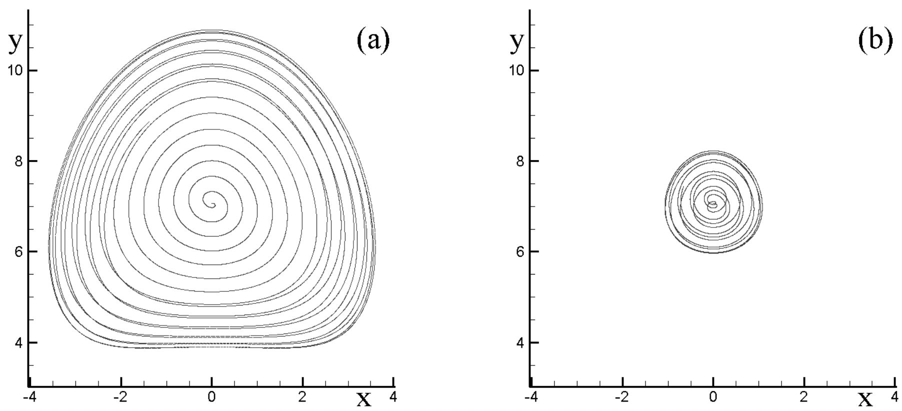

Рис. 5.11. Траектории вихрей, начинающиеся в стационарных эллиптических точках, для нелинейного уравнения (5.4) при $S_0 = -0,01$, $\Omega_0 = -0,02$, $\mu = 1$, амплитудах возмущения $\varepsilon = 0,03$ и частотах: (a) $\nu = 0,04$ – вторая зона линейной параметрической неустойчивости; (b) $\nu = 0,036$ – вне зоны параметрической неустойчивости.

ской гидродинамики, адвекция жидких частиц сингулярными вихрями представляет основной интерес. Для сравнения результатов теоретических расчетов с реальными наблюдениями нужно учитывать не только траекторию движения сингулярного вихря, но и количество жидкости, которая перемещается вместе с вихрем в его непосредственной окрестности. Уравнения движения жидких частиц:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial\left(\psi_v+\psi_d\right)}{\partial y} = 2y\left(S_0-\Omega_0\right) - \left(\mu_1\frac{y-y_1}{{\rho_1}^2}+\mu_2\frac{y-y_2}{{\rho_2}^2}\right), \\ \dot{y} &= \frac{\partial\left(\psi_v+\psi_d\right)}{\partial x} = 2x\left(S_0+\Omega_0\right)+\mu_1\frac{x-x_1}{{\rho_1}^2}+\mu_2\frac{x-x_2}{{\rho_2}^2}, \end{aligned} \tag{5.72}$$

где $\rho_1=\sqrt{\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2}$, $\rho_2=\sqrt{\left(x-x_2\right)^2+\left(y-y_2\right)^2}$.

В общем случае система уравнений (5.72) нестационарна, так как координаты вихрей явно зависят от времени, т.е. $x_1\equiv x_1\left(t\right),\ y_1\equiv y_1\left(t\right),\ x_2\equiv x_2\left(t\right),\ y_2\equiv y_2\left(t\right)$. Отсюда следует, что данная система является системой с $1,5$ степенями свободы даже для случая постоянного внешнего деформационного потока. Как следствие, становится возможным хаотический перенос жидких частиц, индуцированный взаимодействием вихрей. Система (5.72) становится стационарной только в том случае, если оба вихря находятся в своих положениях равновесия, определяемых из соотношений (5.60).

Примеры возможных стационарных фазовых портретов движения жидких частиц приведены на рис. 5.12.

Положения и количество особых точек системы, описывающей адвекцию жидких частиц, определяются из выражений

$$\begin{aligned} &2y\left(S_0-\Omega_0\right) - \left(\mu_1\frac{y-y_1}{{\rho_1}^2}+\mu_2\frac{y-y_2}{{\rho_2}^2}\right)=0, \\ &2x\left(S_0+\Omega_0\right)+\mu_1\frac{x-x_1}{{\rho_1}^2}+\mu_2\frac{x-x_2}{{\rho_2}^2}=0. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Из (5.73) следует существование до 9 регулярных особых точек. Дополнительно всегда существуют две сингулярные точки, соответствующие положению точечных вихрей (треугольники на рис. 5.12). Количество особых точек изменяется в зависимости от значения параметров сдвига и вращения и от интенсивности вихрей. На рис. 5.12 также видно, что на вертикальной оси симметрии всегда существуют три регулярные особые точки. В зависимости от типа данных точек можно охарактеризовать все возможные виды фазового портрета стационарной системы Координат данных точек на оси симметрии выражаются из (5.73) при условии $x=x_1=x_2=0$.

$$y^3-\left(y_1+y_2\right)y^2+\left(y_1y_2-\frac{\mu_1+\mu_2}{2\left(S_0-\Omega_0\right)}\right)y+\frac{\mu_1y_2+\mu_2y_1}{2\left(S_0-\Omega_0\right)}=0. \tag{5.74}$$

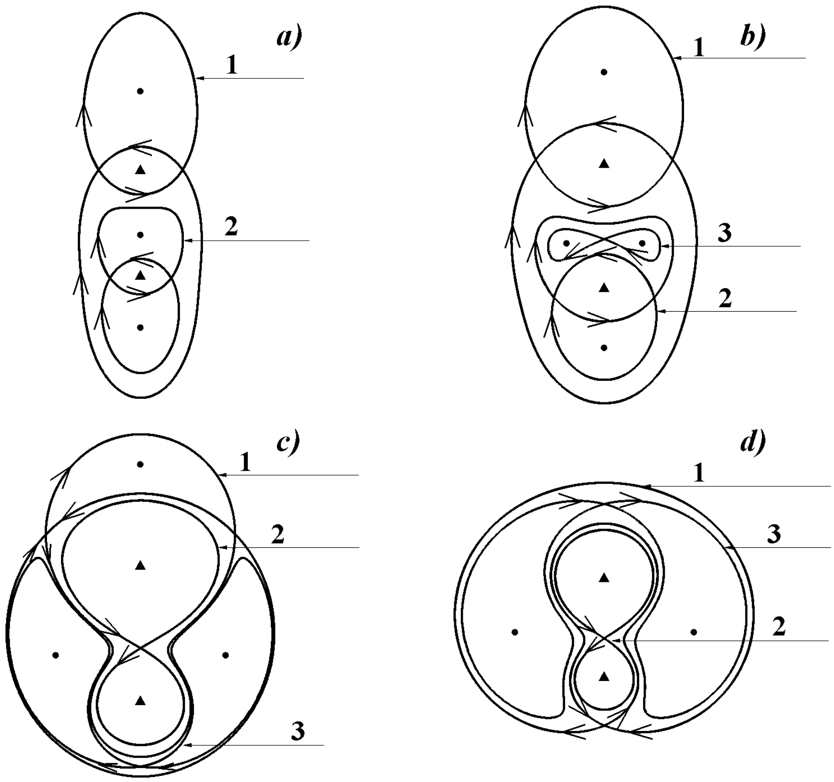

Рис. 5.12. Качественно различные фазовые портреты системы (5.72) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\Omega_0 = -0,02$ и четырех значений сдвига S_0 : a) $-0,014$, b) $-0,01$, c) $-0,005$, d) $-0,001$. Жирными линиями обозначены сепаратрисы движения. Треугольники – положения неподвижных вихрей в своих стационарных точках. Жирные точки – эллиптические особые точки в стационарной конфигурации.

Когда эти три точки эллиптические, фазовый портрет системы аналогичен, приведенному на рис. 5.12a. Когда две точки эллиптические, а третья – гиперболическая, то фазовый портрет аналогичен, приведенному на рис. 5.12b. Две гиперболических и одна эллиптическая – рис. 5.12c. Три гиперболических – 5.12d. Тип данных точек определяется собственными числами матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f & 2\left(S_0 - \Omega_0\right) - g \\ 2\left(S_0 + \Omega_0\right) - g & -f \end{pmatrix}, \tag{5.75}$$

где

$$\begin{gathered} f = \frac{2\mu_1 x_1\left(y_1 - \tilde{y}_i\right)}{\left(x_1^2 + \left(y_1 - \tilde{y}_i\right)^2\right)^2} + \frac{2\mu_2 x_2\left(y_2 - \tilde{y}_i\right)}{\left(x_2^2 + \left(y_2 - \tilde{y}_i\right)^2\right)^2} = 0, \\ g = \frac{\mu_1\left(x_1^2 - \left(y_1 - \tilde{y}_i\right)^2\right)}{\left(x_1^2 + \left(y_1 - \tilde{y}_i\right)^2\right)^2} + \frac{\mu_2\left(x_2^2 - \left(y_2 - \tilde{y}_i\right)^2\right)}{\left(x_2^2 + \left(y_2 - \tilde{y}_i\right)^2\right)^2} = -\left(\frac{\mu_1}{\left(y_1 - \tilde{y}_i\right)^2} + \frac{\mu_2}{\left(y_2 - \tilde{y}_i\right)^2}\right) \end{gathered} \tag{5.76}$$

и $\tilde{y}_i$, $i = 1, 2, 3$ – соответствующая особая точка, полученная из (5.74).

Собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ имеют вид

$$\lambda^2 = \left(2S_0 - g\right)^2 - 4\Omega_0^2. \tag{5.77}$$

Если $\lambda^2 > 0$, то особая точка $\tilde{y}_i$ гиперболическая. Если $\lambda^2 < 0$, особая точка эллиптическая. Отсюда условие на гиперболичность особых точек

$$2(S_0 + \Omega_0) < g < 2(S_0 - \Omega_0). \tag{5.78}$$

Проанализируем устойчивость и смену типа данных критических точек в зависимости от значений параметров $S_0 \in (0, \Omega_0)$ при фиксированных интенсивностях вихрей $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$. Для других значений параметров качественных изменений не будет.

На рис. 5.13b показывает как меняются 4 типа фазового пространства стационарной системы. Штрихпунктирная линия на рис. 5.13b показывает количество особых точек, умноженное на нормировочный коэффициент 10^{-4}. Возможно 5, 7 или 9 особых точек.

Сравнивая данную штрихпунктирную линию с кривыми 1, 2, 3 с того же рисунка, видно, что бифуркация фазовой структуры связана с изменением типа трех особых точек, лежащих на оси симметрии. В результате имеем 4 типа фазового портрета и три бифуркации. Первый фазовый портрет (область I на рис. 5.13b) содержит три эллиптические точки, лежащие на оси симметрии. Дополнительно есть 4 гиперболических точки. Второй фазовый портрет (область II на рис. 5.13b) – две эллиптических и одна гиперболическая и дополнительно две эллиптических и четыре гиперболических. Третий фазовый портрет (область III на рис. 5.13b) – одна эллиптическая и две гиперболических и дополнительно две эллиптических и две гиперболических. Четвертый фазовый портрет (область IV на рис. 5.13b) – три эллиптических и дополнительно две эллиптических.

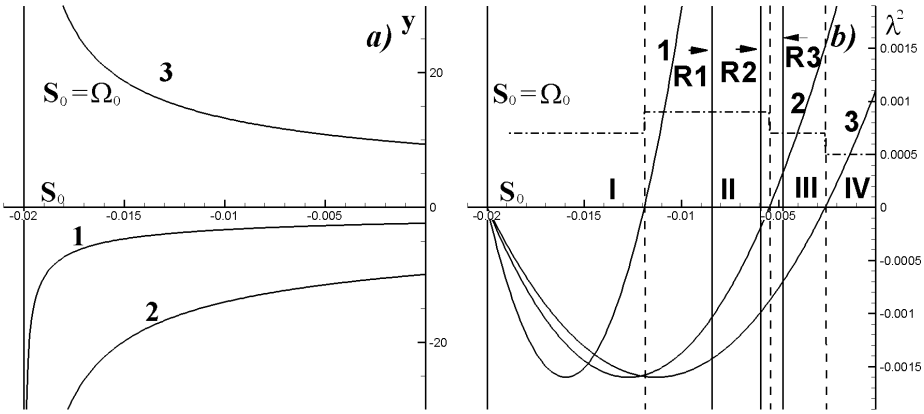

Рис. 5.13. a) положения трех особых точек $\tilde{y}_i$ в зависимости от S_0; b) функция $\lambda^2(S_0)$, определяющая тип данных точек; крайняя слева вертикальная сплошная линия соответствует $S_0 = \Omega_0 = -0,02$, вертикальные штриховые линии разделяют области различных фазовых портретов, вертикальные сплошные линии $R1$, $R2$, $R3$ обозначают наступление пересоединения сепаратрис.

5.5.1. Частота оборота жидких частиц вокруг эллиптических особых точек в стационарном случае

В стационарном случае жидкие частицы движутся по замкнутым траекториям, совпадающим с линиями тока соответствующей функции тока. Так как траектории замкнутые, то можно вычислить частоту оборота по этим траекториям вокруг эллиптических особых точек. На рис. 5.14 показаны частоты оборота относительно различных эллиптических особых точек. Сплошная линия показывает частоту вращения относительно особых точек, расположенных на оси симметрии, а пунктирная линия соответствует частоте оборота вокруг боковых эллиптических точек.

5.5.2. Пересоединение сепаратрис

На рис. 5.12 показаны возможные фазовые портреты системы (5.72) с двумя и тремя сепаратрисами движения. Сепаратрисы разделяют фазовое пространство на области с качественно различным типом движения. Наличие нескольких сепаратрис приводит к появлению интересно феномена - пересоединение сепаратрис [173, 262, 484–487].

Типичное пересоединение сепаратрис включает три этапа. Сначала две сепаратрисы приближаются друг к другу по мере изменения параметров. Далее две сепаратрисы сливаются в одну с более сложной структурой. После этого одна сепаратриса опять разделяется на две с другой топологической структурой.

Условие на пересоединение сепаратрис может быть получено следующим образом. За-

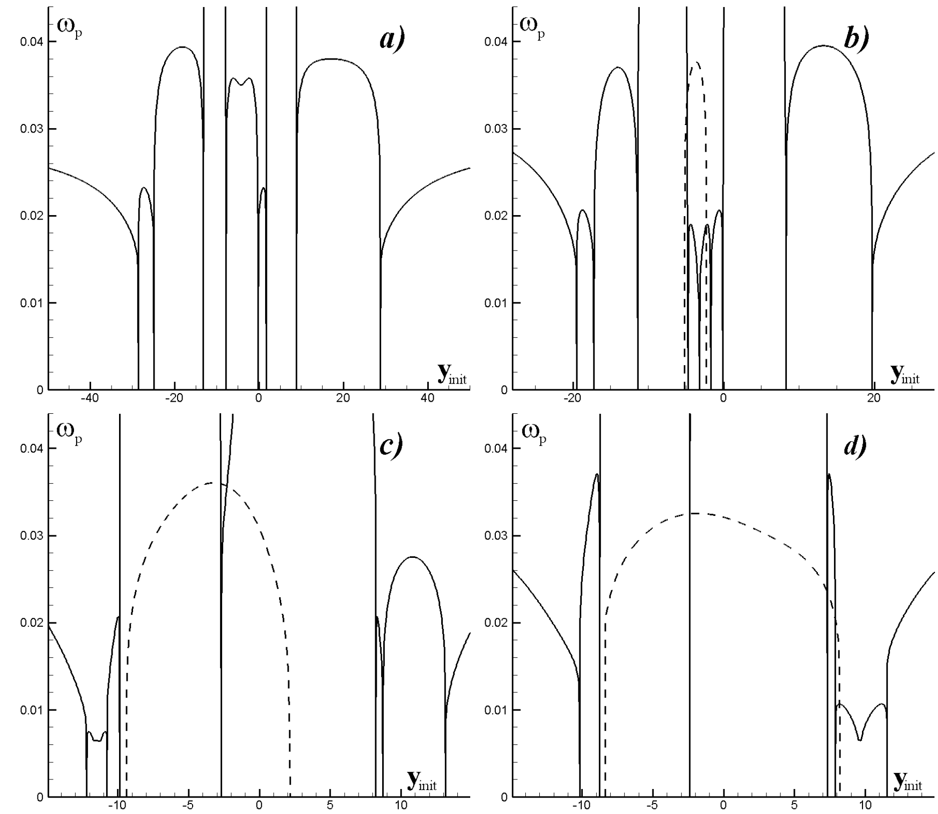

Рис. 5.14. Сплошная линия показывает частоту оборота относительно особых точек, расположенных на оси симметрии. Пунктирная линия соответствует частоте оборота вокруг боковых эллиптических точек. Зависимости соответствуют фазовым портретам a) I, b) II, c) III, d) IV.

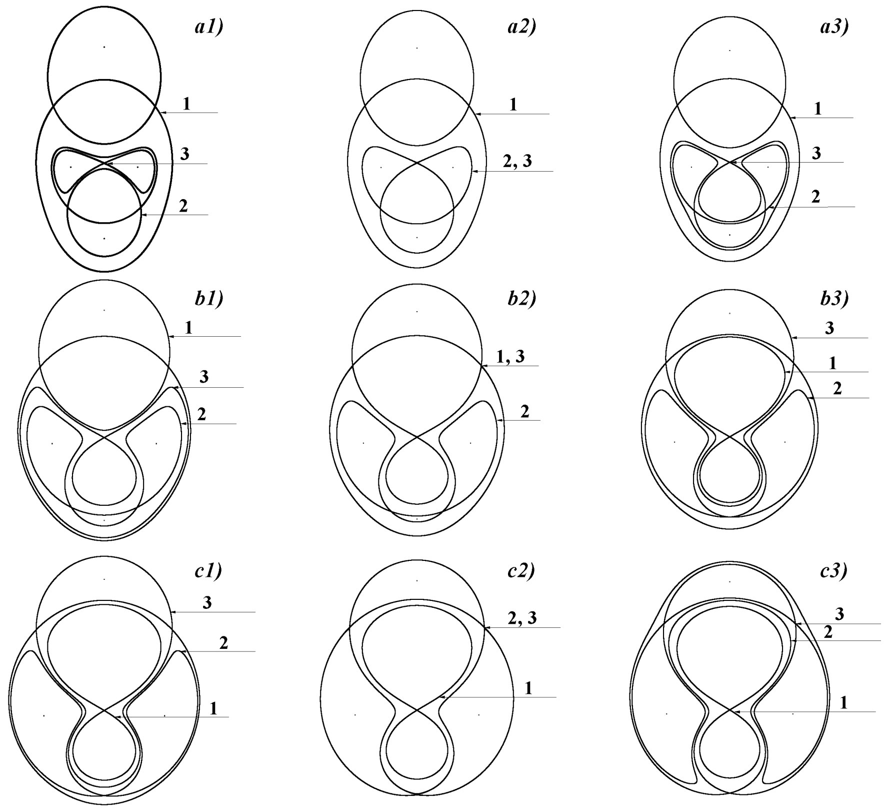

Рис. 5.15. Пересоединение сепаратрис. Фрагменты 1 соответствуют фазовым портретам до пересоединения. Фрагменты 2 – объединение двух сепаратрис в одну. Фрагменты 3 – разъединение на две сепаратрисы с другой структурой. Символы a, b, c в заголовках соответствуют пересоединениям $R1$, $R2$, $R3$, соответственно.

пишем значение функции тока в момент, когда существует одна сепаратриса ψ_{si}

$$\psi_{si} = S_0 \left(\tilde{x}_i - \tilde{y}_i\right) + \Omega_0 \left(\tilde{x}_i + \tilde{y}_i\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\mu_\alpha}{2} \log\left(\left(\tilde{x}_i - x_\alpha\right)^2 + \left(\tilde{y}_i - y_\alpha\right)^2\right), \tag{5.79}$$

где $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$ зависят явно от значений параметров S_0 и Ω_0 посредством системы (5.73). Равенство

$$\psi_{si} = \psi_{sj},\ i \neq j \tag{5.80}$$

дает условие на S_0 и Ω_0 при пересоединение сепаратрисы i и j.

На рис. 5.15 изображены фазовые портреты до, во время и после пересоединения сепаратрис. Рисунки 5.15a1,2,3 соответствуют $R1$; рис. 5.15b1,2,3 – $R2$; рис. 5.15c1,2,3 – $R3$. Сепаратрисы 2 и 3 принимают участие в пересоединении $R1$; сепаратрисы 1 и 3 в $R2$ и сепаратрисы 2 и 3 в $R3$.

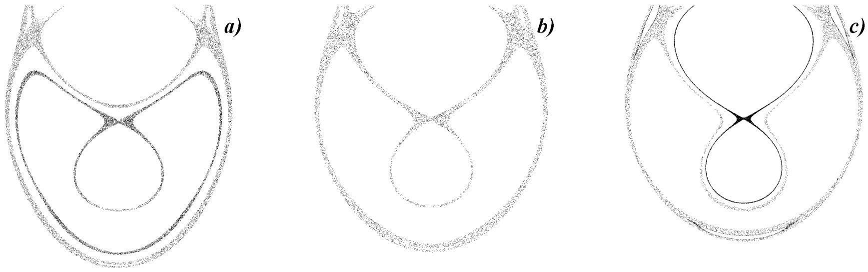

Рис. 5.16. Сечения Пуанкаре в окрестности пересоединения $R2$ при $\delta = 0,03$: a) $S_0 = -0,007$, $\omega_\delta = 3,8157 \times 10^{-2}$, b) $S_0 = -0,00593$, $\omega_\delta = 3,6537 \times 10^{-2}$, c) $S_0 = -0,00522$, $\omega_\delta = 3,5134 \times 10^{-2}$.

5.5.3. Хаотический перенос жидких частиц

Существует большое количество работ, посвященных изучению нерегулярного переноса жидких частиц в гидродинамических и геофизических приложениях [36, 37, 103, 176, 214, 261, 262, 280, 283, 319, 349, 360, 395, 488–498] В случае малых амплитуд возмущения возможны аналитические оценки для простых потоков (см. [205, 206, 319, 371, 395, 499]). В случае конечных амплитуд возмущений можно использовать качественные методы, основанные на критерии перекрытия нелинейных резонансов [267, 391, 392].

Возмутим систему, описывающую движение жидких частиц, (5.72) путем смещения вихрей из положений равновесия на расстояние δ вдоль вертикальной оси симметрии. Вихри начнут движение по замкнутым траекториям с частотой ω_δ, зависящей от δ (зависимость данной частоты от δ изображена рис. 5.4a). Отсюда $x_1 \equiv x_1(t)$, $y_1 \equiv y_1(t)$, $x_2 \equiv x_2(t)$, $y_2 \equiv y_2(t)$, тогда система (5.72) будет системой с $1,5$ степенями свободы, что допускает появление нерегулярных траекторий движения жидких частиц.

Для качественной оценки нерегулярной адвекции жидких частиц, удобно воспользоваться методом сечений Пуанкаре.

На рис. 5.16 изображены сечения Пуанкаре в окрестности пересоединения сепаратрис. На рис. 5.16a приведено сечения при $S_0 = -0,007$. Отчетливо видны два отдельных стохастических слоя. По мере приближения системы к условию пересоединения ($S_0 = -0,00593$), стохастические слои сливаются (см. рис. 5.16b). Далее по мере изменения S_0 ($S_0 = -0,00522$), стохастические слои снова отделены друг от друга (рис. 5.16в).

С увеличением возмущения, ширина стохастического слоя также увеличивается [500–502]. В результате область, в окрестности которой начинается пересоединение сепаратрисных слоев, значительно расширяется.

При фиксированном отклонении вихрей от положений равновесия δ область, занятая нерегулярным переносом, больше в случае преобладания вращения над сдвигом ($S_0 \ll \Omega_0$).

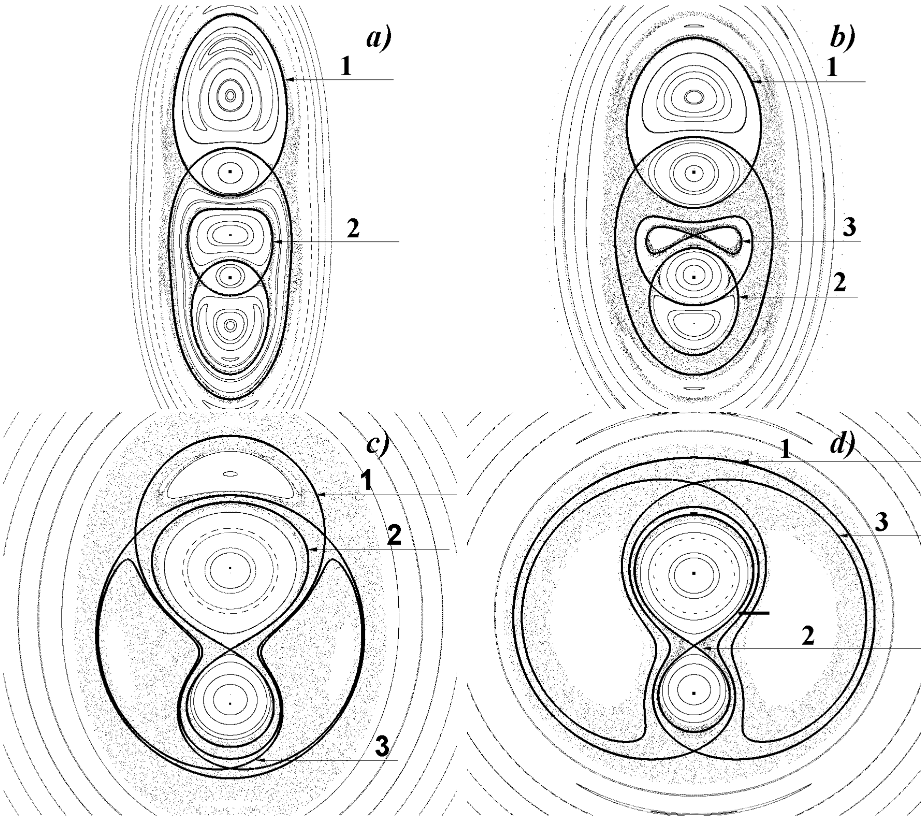

Рис. 5.17. Сечения Пуанкаре системы при $\delta = 0,3$: a) $S_0 = -0,014$, $\omega_\delta = 3,66599 \times 10^{-2}$, b) $S_0 = -0,01$, $\omega_\delta = 3,9991 \times 10^{-2}$, c) $S_0 = -0,005$, $\omega_\delta = 3,4593 \times 10^{-2}$, d) $S_0 = -0,001$, $\omega_\delta = 1,7219 \times 10^{-2}$. Жирные линии соответствуют положению сепаратрис в невозмущенном случае.

И, наоборот, область нерегулярности меньше при $S_0 \sim \Omega_0$. Это связано с тем, что сепаратрисные слои располагаются значительно ближе друг к другу в случае преобладания вращения, т.е. $S_0 \sim 0$. Поэтому они начинают сливаться при меньших значениях амплитуды возмущения. На рис. 5.17a показан фазовый портрет возмущенной системы при $S_0 \sim \Omega_0$. Видно, что сепаратрисные слои явно отделены друг от друга. На рис. 5.17b оба слоя сливаются в один. На рис. 5.17c показан завершающий этап формирования стохастического моря из всех трех стохастических слоев при наличии доминантного вращения ($S_0 \ll \Omega_0$).

Для оценки эффективности хаотического переноса для различных значений отклонения δ, удобно использовать лагранжевы характеристики. То есть, такие характеристики, которые отслеживают поведение траектории на протяжении всего времени интегрирования. В данной задаче удобно использовать накопленные показатели Ляпунова [489, 503]. Так как система закрытая и все траектории локализованы в пространстве, счет продолжается до тех пор пока показатель не перестанет меняться. Если бы система была открытой, то достаточно было бы посчитать показатель до момента выхода траектории из локализованной области [321, 339]. Начальное время интегрирования $2\dot{1}0^4$. Если за это время показатель стал стационарным,

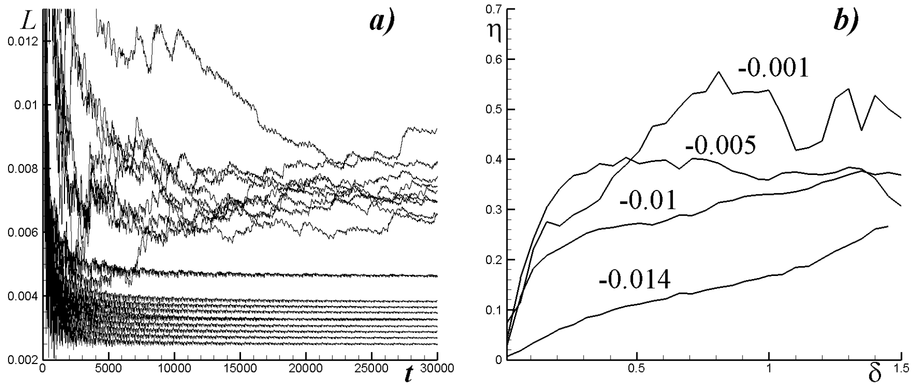

Рис. 5.18. a) накопленные показатели Ляпунова регулярных и хаотических траекторий в зависимости от времени накопления. Показатель для регулярных траекторий выходит на стационарное значение достаточно быстро, для хаотических, наоборот, нет стационарного значения. b) доля хаотических траекторий из общего количества начальных условий, равномерно распределенных внутри внешней сепаратрисы движения, в зависимости от отклонения δ вихрей от их положений равновесия для указанных значений сдвига S_0.

то предполагается, что он соответствует регулярной траектории. Далее счет продолжается еще на временной интервал 5×10^3. В случае если показатель меняется незначительно в этот дополнительный временной интервал, то тогда траектория окончательно считается регулярной. И, наоборот, если показатель траектории начинает меняться на любом из временных интервалов, то траектория считается хаотической. Отличие регулярных и хаотических траекторий продемонстрировано на рис. 5.18a. На рисунке изображены накопленные показатели Ляпунова для 50 траекторий, с начальными условиями равномерно распределенными на интервале $x \in [3; 5]$ при $y = 0$ (начальные положения соответствуют линии, изображенной на рисунке рис. 5.17d) в зависимости от времени накопления. Данный отрезок содержит начальные положения как регулярных, так и хаотических траекторий.

Далее, распределим равномерно около $2\dot{1}0^4$ маркеров внутри внешней стационарной сепаратрисы. Вычислим накопленный показатель для всех начальных условий и посчитаем долю начальных условий, приводящих к хаотическим траекториям, в общем числе начальных условий. На рис. 5.18b изображены графики данной величины в зависимости от отклонения вихрей от их положений равновесия δ для указанных значений сдвига S_0 ($S_0 = -0,014$, $-0,01$, $-0,005$, $-0,001$). Данные графики подтверждают наблюдение, что хаотизация становится более эффективна для случая большего сдвига. Причиной этого является то, что в этом случае сепаратрисные стохастические слои сливаются при значительно более слабых возмущениях.

Итак, в данном параграфе установлено, что динамика жидких частиц в окрестности двух точечных вихрей, помещенных в постоянный деформационный поток описывается системой с полутора степенями свободы. Несмотря на то, что внешний поток стационарный, дополнительная зависимость от времени появляется за счет нестационарного движения вихрей. То есть, в данном случае возмущение в системе является собственным внутренним колебанием ее составляющих. В результате движение жидких частиц демонстрирует хаотический характер. Для стационарного случая, т.е. тогда, когда вихри находятся без движения в своих стационарных точках, проведена классификация всех возможных фазовых портретов системы. Для нестационарной системы проведен анализ хаотической динамики с использованием сечений Пуанкаре и накопленных показателей Ляпунова. Показано, что хаотизация становится более эффективной при существенном преобладании вращения над сдвигом по причине того, что в таком случае сепаратрисные слои сливаются при значительно меньших возмущениях системы.

Далее рассмотрим адвекцию жидких частиц в случае нестационарного деформационного потока.

5.6. Адвекция жидких частиц в системе двух точечных вихрей, помещенных в переменный внешний деформационный поток, при параметрической неустойчивости

В данном параграфе рассматривается адвекция жидких частиц, индуцируемая взаимодействием двух точечных вихрей в осциллирующем деформационном потоке. Итак, рассмотрим систему (5.4), описывающую динамику двух точечных вихрей произвольных интенсивностей μ_1 и μ_2, помещенных в переменный деформационный поток, состоящий из компонент сдвига S и вращения Ω (5.3). Как было установлено в параграфе 5.2, центр завихренности такой системы может испытывать параметрическую неустойчивость, в результате которой вся вихревая система, как единое целое, будет двигаться в ограниченной или неограниченной областях. В то же время, результаты, касающейся движения центра завихренности, ничего не говорят о динамике собственно вихрей и переносимой вместе с ними жидкости. Таким образом, в данном параграфе будет изучаться система уравнений (5.4), с помощью которой вычисляются траектории вихрей, а также система (5.72), которая описывает движение жидких пассивных частиц, индуцируемое двумя вихрями и колебательным деформационным потоком.

Итак, рассмотрим случай параметрической неустойчивости центра завихренности такой системы. Центр завихренности перемещается по спиралевидным траекториям в неограниченной области. Параметры, соответствующие параметрической неустойчивости, например, $\Omega_0 = -0,02$, $S_0 = -0,01$, $\varepsilon = 0,5$, $\nu = 0,07$. Начальные положения вихрей: $x_1(0) = 0$, $y_1(0) = -3$, $x_2(0) = 1$, $y_2(0) = 0,5$. Для сравнения со случаем локализованного движения (отсутствие параметрического резонанса) выберем частоту колебаний внешнего потока $\nu = 0.1$. Оценка области параметрической неустойчивости 5.23 показывает, что появление или отсутствие параметрического резонанса зависит только от параметров деформационного потока и не зависит от интенсивности или начального положения вихрей в данном потоке. Поэтому во всех дальнейших вычислениях используются одни и те же начальные положения. Чтобы продемонстрировать отличие адвекции жидких частиц для различных комбинаций знаков вихрей, будем использовать 4 набора интенсивностей $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -2$, и $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 2$.

В случае вихрей одного знака, они локально вращаются вокруг центра завихренности, находящегося между данными вихрями. Если знаки интенсивностей различны, то вихри вращаются вокруг центра завихренности, лежащего за пределами отрезка, соединяющего центры вихрей. Изменение знаков двух вихрей на противоположные приводит к разному направлению вращения системы.

На рис. 5.19 изображены траектории движения вихрей и центра завихренности (5.5) для обозначенных начальных условий и частоты колебаний сдвига $\nu = 0,07$. Здесь и далее, жирная линия показывает траекторию движения центра завихренности. На рис. 5.19a,b,c,d изображены траектории двух вихрей с интенсивностями (a) $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, (b) $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -2$, (c) $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -2$, (d) $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 2$.

На рис. 5.20 изображены аналогичные траектории, однако соответствующие локализованному движению при частоте колебаний деформационного потока $\nu = 0,1$, вне зоны параметрической неустойчивости. Сравнивая рис. 5.19 и 5.20, видно, что траектории центра завихренности значительно меняются от почти периодического (см. рис. 5.20) до существенно непериодического типа движения (см. рис. 5.19).

На рис. 5.19 – 5.20 b,d изображены случаи, соответствующие движению двух вихрей, в основном, совпадающем с общим направлением вращения, которое задается внешним параметром Ω. В результате этого достигается увеличение скорости перемещения вихревой системы, и, следовательно, большее расстояние, пройденное вихрями. Это наблюдение так же подтверждается наличием тенденции к большему расстоянию между самопересечениями траекторий движения вихрей в случае сонаправленного вращения (см. рис. 5.19–5.20 a,c и рис. 5.19–5.20 b,d).

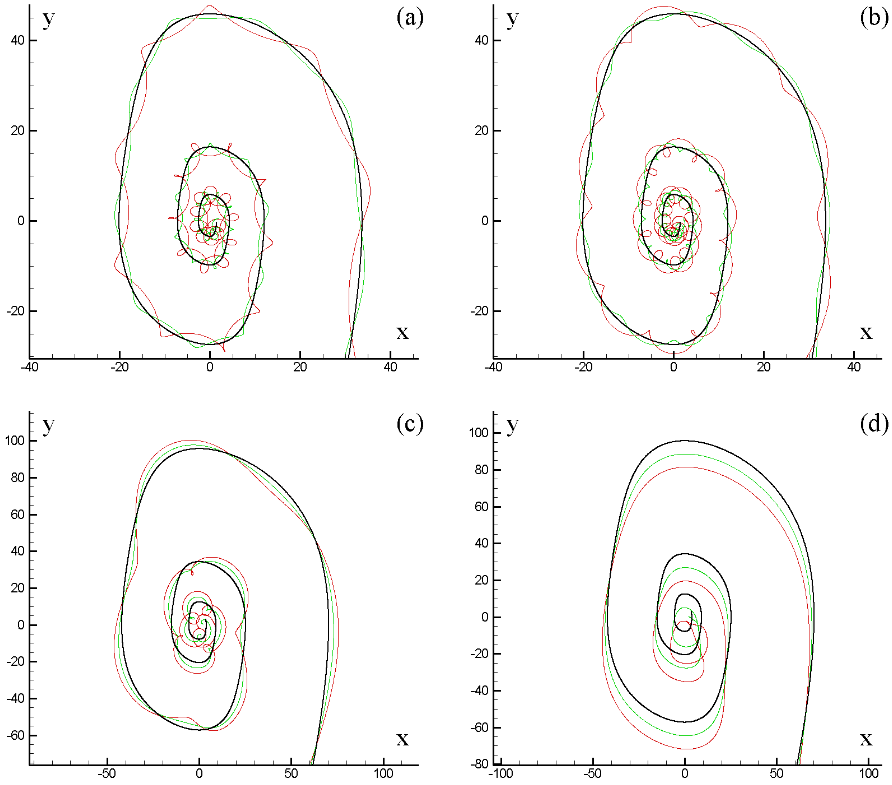

Рис. 5.19. Неограниченное движение двух точечных вихрей в следствии параметрического резонанса. Жирная линия – траектория центра завихренности. Значения параметров $\Omega_0 = -0,02$, $S_0 = -0,01$, $\varepsilon = 0,5$, $\nu = 0,07$, начальные положения вихрей $x_1(0) = 0$, $y_1(0) = -3$, $x_2(0) = 1$, $y_2(0) = 0,5$; (a) $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, (b) $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -2$, (c) $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -2$, (d) $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 2$.

Далее будем рассматривать динамику жидких частиц, индуцируемую таким движением вихрей.

5.6.1. Экспоненциальная расходимость траекторий жидких частиц

Так как рассматривается переменный внешний поток, то помимо возмущения от движения вихрей движение жидких частиц так же возмущается колебаниями внешнего потока. В результате, наблюдается непериодическое возмущение динамики жидких частиц, что делает невозможным применение метода сечений Пуанкаре для анализа регулярной и нерегулярной динамики. Поэтому основным средством исследования будут накопленные показатели Ляпунова, вычисленные по локальному изменению в значении тензора Коши–Грина [36, 38, 40, 94, 96, 355, 358, 418, 497, 498, 504–510]. Данная характеристика показывает насколько сильно локально растягивается бесконечно-малый элемент среды за некоторое мало время. В областях с хаотической динамикой, такое расхождение будет значительно отличаться от расхождения в областях с регулярной динамикой. Эта характеристика является

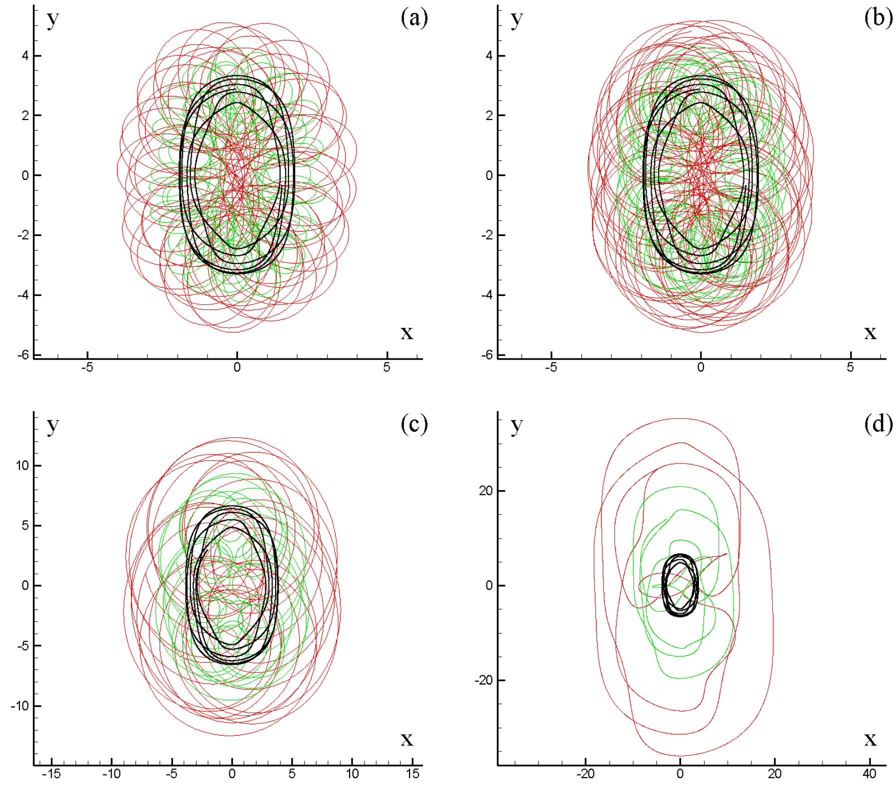

Рис. 5.20. Ограниченное движение двух вихрей в колебательном деформационном потоке. Жирная линия – траектория движения центра завихренности. Для тех же значений параметров, что и рис. 5.19 за исключением $\nu = 0,1$.

"лагранжевой то есть она отслеживает изменение свойств вдоль траекторий на некотором временном интервале, что является преимуществом перед анализом изменений поля скорости в некоторой локализованной области.

На рис. 5.21, 5.22 изображены поля накопленных показателей, соответствующие траекториям вихрей с рис. 5.19, 5.20, соответственно. На рис. 5.21 изображено нелокализованное движение, а на рис. 5.22 – локализованное. Увеличенные области в окрестности вихрей приведены на вставках. Более темный цвет соответствует более высоким значениям показателей Ляпунова. Соответственно темные области указывают на траектории, чувствительные к малым возмущениям. А светлые области соответствуют почти регулярному предсказуемому поведению.

Так как фон на рис. 5.22 заметно более светлый по сравнению с рис. 5.21, можно заключить, что в результате параметрической неустойчивости общая степень неустойчивости движения жидких частиц значительно возрастает. Так же заметно, что в случае параметрической неустойчивости, более темные области имеют тенденцию к вытягиванию вдоль оси сдвига внешнего потока. В результате, областей регулярного движения, окруженных устой-

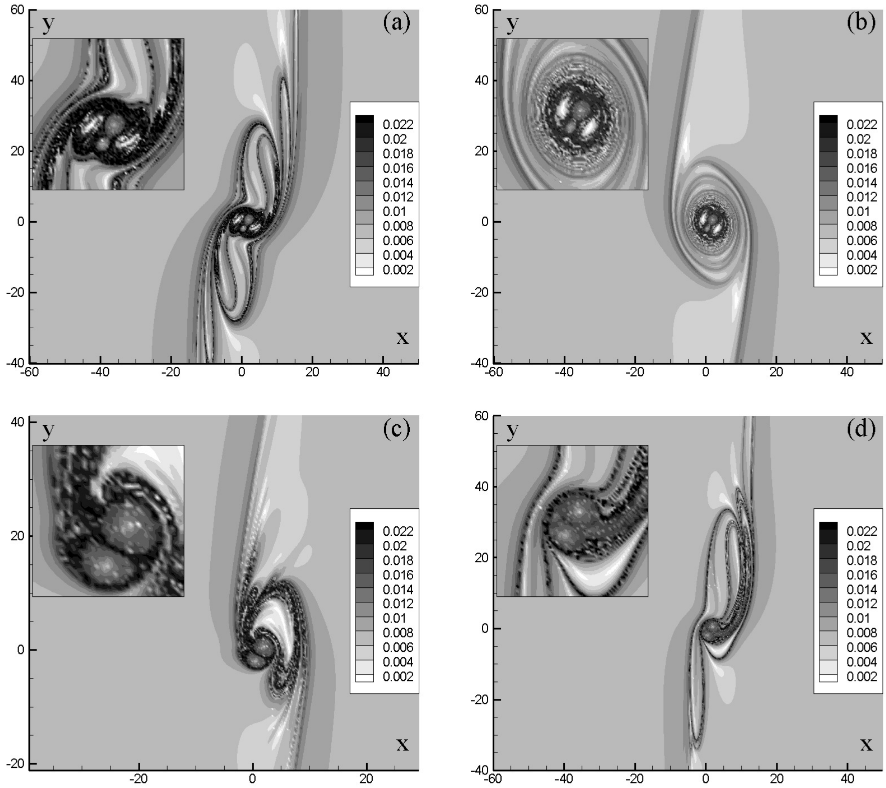

Рис. 5.21. Поле накопленных показателей Ляпунова для жидких частиц, соответствующее нелокализованным вихревым траекториям с рис. 5.19. Более темный цвет соответствует более интенсивному перемешиванию. Вставки показывают увеличенную область в непосредственной близости от вихря.

чивыми многообразиями практически не возникает [351]. Это различие хорошо видно на рис. 5.21a. Для сравнения приведен рис. 5.22a с обширной регулярной областью. Та же тенденция видна для рис. 5.21–5.22 b,c,d, хотя и с определенными изменениями в форме инвариантных кривых, огибающих регулярные области. Несмотря на то, что глобальная структура переноса жидких частиц достаточно различна, в окрестности самих вихрей картины переноса имеют много общего для режимов ограниченного и неограниченного движения. В тоже время хорошо видна разница, характеризуемая направлением вращения самих вихрей.

5.6.2. Эволюция ансамбля жидких частиц

Поле накопленных показателей Ляпунова обнаруживает области качественно разной динамики движения жидких частиц. Далее, проследим эволюцию ансамбля жидких частиц во времени. Сильная дисперсия в таком случае будет свидетельствовать в пользу эффективной хаотической адвекции. Проведем следующий численный эксперимент. Расположим $\sim 10^4$ трассеров равномерно в окружности радиуса $r = 60$, которая полностью охватывает всю область перемешивания. Далее, вычислим стандартное отклонение σ_r расстояния от текущего

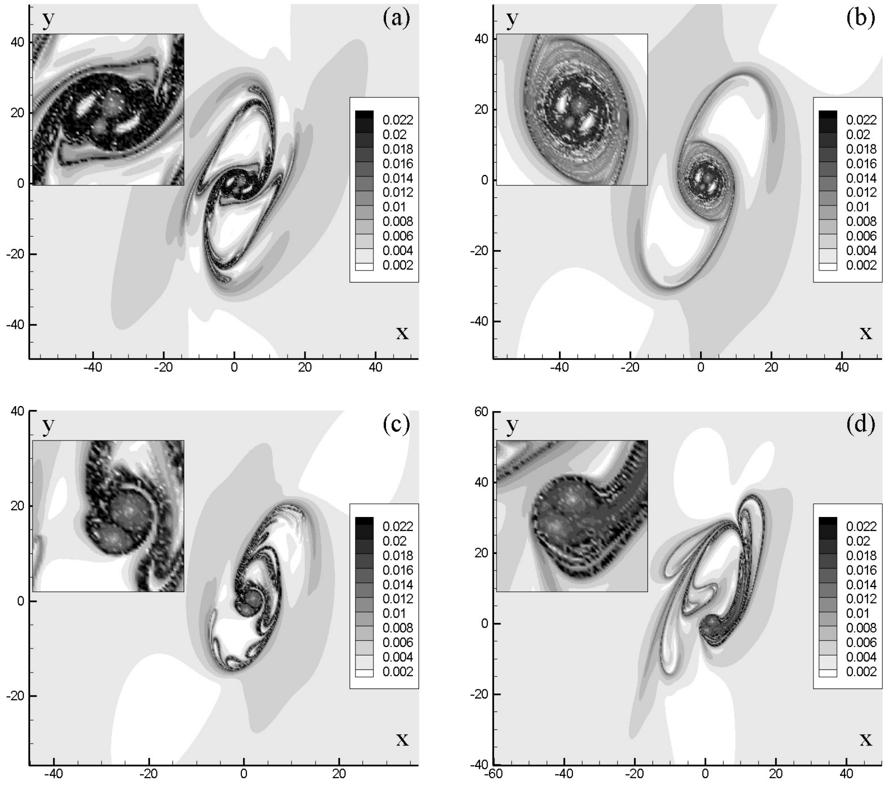

Рис. 5.22. Поле накопленных показателей Ляпунова для жидких частиц, соответствующее локализованным вихревым траекториям с рис. 5.20.

положения маркера до начала координат. Результаты вычислений приведены на рис. 5.23. Рисунок 5.23a изображен в логарифмическом масштабе. Видно, что стандартное отклонение демонстрирует экспоненциальный рост, т.е. любой ансамбль жидких частиц испытывает экспоненциальное растяжение. На рис. 5.23b, наоборот, приведен случай ограниченного значения стандартного отклонения, что соответствует локализованной динамике.

Основываясь на рис. 5.23a можно утверждать, что статистически для большого количества трассеров, система эволюционирует практически идентично для любых значений интенсивностей вихрей. То есть, эволюция жидких частиц в таком случае в основном определяется крупно-масштабным внешним потоком. Однако, в окрестности непосредственного вихревого взаимодействия картины переноса и перемешивания жидкости будут отличаться.

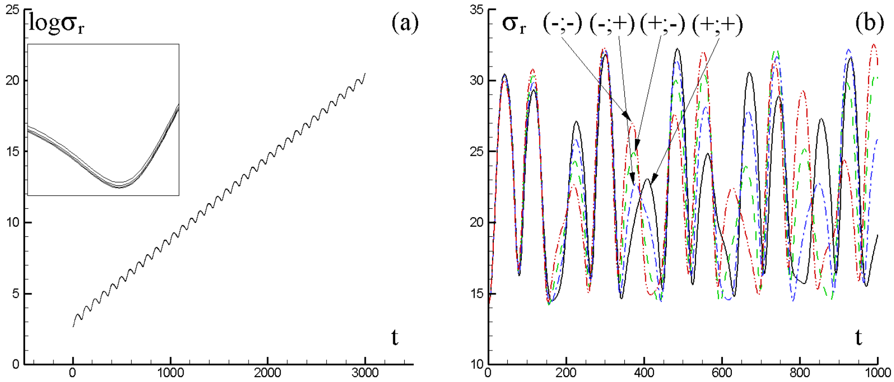

Рис. 5.23. Стандартное отклонение σ_r для $\sim 10^4$ трассеров, изначально равномерно распределенных внутри окружности, в зависимости от времени. Кривые соответствуют различным значениям интенсивности вихрей. (a) нелокализованное движение (в логарифмическом масштабе). Все четыре кривые сливаются в одну. На вставке изображена увеличенная область; (b) локализованное движение.

5.7. Глобальная хаотизация движения жидких частиц в системе двух точечных вихрей, помещенных в двухслойный постоянный деформационный поток

В предыдущих параграфах данной главы, в основном, рассматривались баротропные вихревые системы, однако так же полезно изучать многослойные бароклинные конфигурации. Исследование двух- и трехслойных моделей позволяет получить общие представления о вихревых взаимодействиях в геофизических потоках с ярко-выраженными устойчивыми слоями, вызванными, например, наличием выделенного термоклина [65, 126, 130, 137, 156, 255, 338, 511–521]. Итак рассмотрим систему двух точечных вихрей, располагающихся в нижнем слое двухслойного геострофического потока [104, 105, 119–121, 126–129, 134, 135, 139, 140, 218, 229, 342, 440, 440, 522–524]. С учетом того, что рассматривается несжимаемый невязкий квази-геострофический поток на f – плоскости, потенциальная завихренность q_α сохраняется в каждом слое $\alpha = 1, 2$,

$$\frac{D_\alpha q_t}{Dt} = 0 \qquad (5.81)$$

где

$$q_1 = \Delta\psi_1 + \frac{f}{H_1}\zeta + 4\Omega, \quad q_2 = \Delta\psi_2 - \frac{f}{H_2}\zeta + 4\Omega, \qquad (5.82)$$

а ψ_α – функция тока в слое α глубины H_α и плотности ρ_α, f – потосянный параметр Кориолиса, $\zeta = \frac{f}{g^*}(\psi_2 - \psi_1)$ – возмущение границы раздела слоев и $g^* = g\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_2}$ – редуцированное ускорение свободного падения.

Функция тока ψ_i может быть представлена в виде комбинации двух вспомогательных функций: баротропной компоненты Ψ и бароклинной Ψ' [119, 253, 314, 525]

$$\psi_1 = \psi_d + \frac{\Psi}{H} - \frac{H_2}{H}\Psi',\ \psi_2 = \psi_d + \frac{\Psi}{H} + \frac{H_1}{H}\Psi', \tag{5.83}$$

где

$$\Delta\Psi = H_1 q_1 + H_2 q_2,\ \ \Delta\Psi' - k_1^2\Psi' = q_2 - q_1, \tag{5.84}$$

где $k_1 = \frac{1}{L_D} = f\left(\frac{H}{g^* H_1 H_2}\right)^{1/2}$, L_D – внутренний радиус деформации Россби, $H = H_1 + H_2$ – полная глубина.

Введем теперь в нижний слой вихревые возмущения в виде точечных вихрей с интенсивностями μ_1 и μ_2, тогда

$$q_1 = 0, \quad q_2 = fL_0^2\sum_{i=1}^{2}\mu_i\delta\left(x - x_i\right)\delta\left(y - y_i\right), \tag{5.85}$$

где $\delta\left(\cdot\right)$ – дельта-функция Дирака, x, y – декартовы координаты, x_i, y_i – положения i–го вихря и L_0 – нормализующий параметр. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta\Psi &= H_2\sum_{i=1}^{2} f\mu_i L_0^2\delta\left(x - x_i\right)\delta\left(y - y_i\right),\\ \Delta\Psi' - k_1^2\Psi' &= \sum_{i=1}^{2} f\mu_i L_0^2\delta\left(x - x_i\right)\delta\left(y - y_i\right).\end{aligned} \tag{5.86}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\Psi &= H_2\sum_{i=1}^{2}\frac{f\mu_i}{k_0^2}\log\left(k_0\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\right|\right),\\ \Psi' &= \sum_{i=1}^{2}\frac{f\mu_i}{k_0^2}K_0\left(k_1\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\right|\right),\end{aligned} \tag{5.87}$$

где $k_0 = \frac{1}{L_0}$, $\mathbf{r} = \left(x, y\right)$, $\mathbf{r}_i = \left(x_i, y_i\right)$ и $K_0\left(\cdot\right)$, $K_1\left(\cdot\right)$ – модифицированные функции Бесселя.

Добавим к системе внешний постоянный деформационный поток с сдвигом S_0 и вращением Ω_0 вида (5.2). Тогда, с учетом геострофическиех соотношений, получаем уравнения движения для любой точки в слоях

$$\begin{aligned}\frac{dx^\alpha}{dt} &= -\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial y} = 2y^\alpha\left(S_0 - \Omega_0\right) - \frac{f}{H}\sum_{i=1}^{2}\frac{(y^\alpha - y_i)\mu_i}{R_i^\alpha k_0^2}\left[\frac{H_2}{R_i^\alpha} + (-1)^{2-\alpha}k_1 H_{3-\alpha}K_1\left(k_1 R_i^\alpha\right)\right],\\ \frac{dy^\alpha}{dt} &= \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x} = 2x^\alpha\left(S_0 + \Omega_0\right) + \frac{f}{H}\sum_{i=1}^{2}\frac{(x^\alpha - x_i)\mu_i}{R_i^\alpha k_0^2}\left[\frac{H_2}{R_i^\alpha} + (-1)^{2-\alpha}k_1 H_{3-\alpha}K_1\left(k_1 R_i^\alpha\right)\right],\end{aligned} \tag{5.88}$$

где $\alpha = 1, 2$ соответствует номеру слоя, $i = 1, 2$ нумерует вихри в нижнем слое и $R_i^\alpha = \left(\left(x^\alpha - x_i\right)^2 + \left(y^\alpha - y_i\right)^2\right)^{1/2}$. Данная система является системой нелинейных дифференциальных уравнений для жидких частиц в поле скорости, индуцируемом двумя точечными вихрями в нижнем слое.

Обезразмерим данные выражения

$$(x, y, x_i, y_i, r, R_i, a, h, H, H_i) = k_1^{-1}(x, y, x_i, y_i, r, R_i, a, h, H, H_i)^*,$$

$$t = f^{-1}t^*.$$

Опуская звездочки, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx^\alpha}{dt} &= 2y^\alpha\left(S_0 - \Omega_0\right) - \frac{1}{H}\gamma^2\sum_{i=1}^{2}\frac{(y^\alpha - y_i)\mu_i}{R_i^\alpha}\left[\frac{H_2}{R_i^\alpha} + (-1)^{2-\alpha}H_{3-\alpha}K_1\left(R_i^\alpha\right)\right],\\ \frac{dy^\alpha}{dt} &= 2x^\alpha\left(S_0 + \Omega_0\right) + \frac{1}{H}\gamma^2\sum_{i=1}^{2}\frac{(x^\alpha - x_i)\mu_i}{R_i^\alpha}\left[\frac{H_2}{R_i^\alpha} + (-1)^{2-\alpha}H_{3-\alpha}K_1\left(R_i^\alpha\right)\right], \end{aligned} \tag{5.89}$$

где $\gamma = \frac{k_1}{k_0} = \frac{L_0}{L_D}$ – обратно пропорциональна внутреннему радиусу деформации Россби. Так же переобозначим $\mu_i^* = \gamma^2\mu_i$ и снова опустим звездочку.

Рассматриваемая конфигурация с двумя вихрями в нижнем слое интересна тем, что данные вихри индуцируют переменное поле скорости не только в нижнем слое, но и в верхнем. В нижнем же слое перенос жидких частиц полностью аналогичен рассмотренному в баротропной постановке в параграфе 5.5.

Используя (5.89), получаем уравнения движения жидкой частицы в верхнем слое (индекс $\alpha = 1$ далее опускается)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2y\left(S_0 - \Omega_0\right) - \frac{H_2}{H}\sum_{i=1}^{2}\frac{(y - y_i)\mu_i}{R_i}\left[\frac{1}{R_i} - K_1\left(R_i\right)\right],\\ \frac{dy}{dt} &= 2x\left(S_0 + \Omega_0\right) + \frac{H_2}{H}\sum_{i=1}^{2}\frac{(x - x_i)\mu_i}{R_i}\left[\frac{1}{R_i} - K_1\left(R_i\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.90}$$

Подставляя соответствующие координаты вихрей в уравнения (5.89) и исключая самоиндукцию, получаем уравнения движения самих вихрей, аналогичные баротропному случаю (5.4)

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= 2y_i\left(S_0 - \Omega_0\right) - \frac{1}{H}\frac{\mu_{3-i}}{r_{12}}(y_i - y_{3-i})\left[\frac{H_2}{r_{12}} + H_1K_1\left(r_{12}\right)\right],\\ \frac{dy_i}{dt} &= 2x_i\left(S_0 + \Omega_0\right) + \frac{1}{H}\frac{\mu_{3-i}}{r_{12}}(x_i - x_{3-i})\left[\frac{H_2}{r_{12}} + H_1K_1\left(r_{12}\right)\right], \end{aligned} \tag{5.91}$$

где $r_{12} = \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right)^{1/2}$.

5.7.1. Траектории вихрей

Движение самих вихрей полностью аналогична баротропному случаю, рассмотренному ранее. Действительно, так как вихри располагаются в одном слое, то они взаимодействуют между собой так же, как и в баротропном случае [104, 119], что приводит к тому, что скорость вращения вихрей вокруг центра завихренности бесконечно увеличивается по мере их приближения друг к другу, т.е. $\frac{1}{r_{12}} + K_1(r_{12}) \sim \frac{1}{r_{12}}$ при $r_{12} \to 0$.

Как и в баротропном случае, ограниченное движение возможно при $\Omega_0^2 > S_0^2$. Иначе вихри разлетятся по гиперболическим траекториям. Все дальнейшие вычисления проведены для случая $H_1 = H_2$ и $\mu_1 = \mu_2$.

Если вращение Ω_0 и сдвиг S_0 постоянны, то вихри движутся регулярно в соответствии с фазовым портретом и частотами оборота с рис. 5.4.

Положения особых точек вычисляются стандартным способом – приравниванием (5.91) нулю. Положения особых точек на оси y удовлетворяют выражению

$$2(S_0 - \Omega_0)\, y = \mu_2 \frac{1}{H}\left(\frac{H_1}{\mu y} + H_2 K_1(\mu y)\right), \tag{5.92}$$

где $\mu = \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$ и с учетом симметрии

$$\begin{aligned}
&\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0,\\
&\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 = 0,\\
&\mu_1 r_1 = \mu_2 r_2,\\
&r_{12} = \mu r_1.
\end{aligned} \tag{5.93}$$

Далее помещаем вихри в их точки равновесия. После этого, отклоняем вихри от их положения равновесия вдоль оси y и вычисляем частотную зависимость, аналогичную рис. 5.4b. Хотя точная частота считается численно, можно вычислить нулевую частоту колебаний, т.е. частоту колебаний вихря, при его бесконечно малом отклонении от положения равновесия. Разложим выражения (5.91) в ряд Тейлора до линейных членов в окрестности эллиптической точки $\left(0, y_1^{(0)}\right)$ по малому отклонению $x_1 \approx x_1^{(0)} + \tilde{x}_1$, $y_1 \approx y_1^{(0)} + \tilde{y}_1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}}{dt} &\approx \frac{1}{H}\frac{\mu_2}{r_1^{(0)}}\left\{2\frac{H_2}{r_1^{(0)}\mu} + H_1 K_1\left(r_1^{(0)}\mu\right) - H_1 K_1{}'\left(r_1^{(0)}\mu\right)\mu r_1^{(0)}\right\}\tilde{y},\\
\frac{d\tilde{y}}{dt} &\approx \left[2(S+\Omega) + \frac{1}{H}\frac{\mu_2}{r_1^{(0)}}\left[\frac{H_2}{r_1^{(0)}\mu} + H_1 K_1\left(r_1^{(0)}\mu\right)\right]\right]\tilde{x},
\end{aligned} \tag{5.94}$$

где $r_1^{(0)} = \left(x_1^{(0)} + y_1^{(0)}\right)^{1/2}$.

С учетом $x_1^{(0)} = 0$, $K_1{}'\left(r_1^{(0)}\mu\right) = -K_0\left(r_1^{(0)}\mu\right) - \frac{1}{\mu r_1^{(0)}} K_1\left(r_1^{(0)}\mu\right)$ и (5.92), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}}{dt} &= \left\{4(S-\Omega) + \frac{H_1}{H}\mu_2 \mu K_0\left(r_1^{(0)}\mu\right)\right\}\tilde{y},\\
\frac{d\tilde{y}}{dt} &= 4S\tilde{x}.
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Собственные числа матрицы Якоби имеют вид

$$\lambda^2 = -\omega_\delta^2 = -4S\left\{4\left(S-\Omega\right) + \frac{H_1}{H}\mu_2\mu K_0\left(r_1^{(0)}\mu\right)\right\}, \tag{5.96}$$

где ω_δ – искомая собственная частота колебаний вихря вокруг эллиптической особой точки.

После отклонения от положения равновесия, вихри движутся периодически тем самым размешивая окружающие жидкие частицы. Рассмотрим динамику жидких частиц подробней.

5.7.2. Типичные фазовые портреты

В отличие от баротропного случая, в верхнем слое нет сингулярных точек, так как вихри располагаются в нижнем слое и индуцируют только регулярное поле в верхнем слое. Это видно из системы (5.90), так как $\frac{1}{R_i} - K_1\left(R_i\right) \sim 0$ при $R_i \to 0$.

Когда вихри находятся в своих положениях равновесия, они индуцируют стационарное поле скорости. В этом случае можно построить фазовые портреты для движения жидких частиц. Количество особых точек зависит от значений сдвига и вращения.

Информация о стационарных фазовых портретах важна для определения положений гиперболических точек и, проходящих через них сепаратрис. При возмущении, именно в окрестности сепаратрис в первую очередь зарождается хаотическая динамика.На рис. 5.24 приведены типичные стационарные фазовые портреты для вихрей одинаковых интенсивностей $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$.

Далее для анализа появляющейся хаотической динамики потребуется вычислить частоты обращения жидких частиц вокргу соответствующих эллиптических особых точек в стационарном случае. Такую частоту будем называть собственной частотой вращения жидких частиц. На рис. 5.25 представлены эти собственные частоты, соответствующие фазовым портретам с рис. 5.24. Фазовые портреты с рис. 5.24 бывают трех типов. Отличие заключается в количестве и наборе особых очек. Как и прежде, достаточно определить тип трех точек, лежащих на вертикальной оси симметрии. Выражение для их нахождения имеет вид

$$\begin{aligned} 2\left(S-\Omega\right)y_0 = {} & \frac{H_2}{H}\mu_1\frac{\left(y_0 - y_1^0\right)}{R_1^{(0)}}\left[\frac{1}{R_1^{(0)}} - K_1\left(R_1^{(0)}\right)\right] \\ & + \frac{H_2}{H}\mu_2\frac{y_0 + \frac{\mu_1}{\mu_2}y_1^{(0)}}{R_2^{(0)}}\left[\frac{1}{R_2^{(0)}} - K_1\left(R_2^{(0)}\right)\right], \end{aligned} \tag{5.97}$$

где y_0 – координата особой точки на оси ординат, $y_1^{(0)}$ – координата особой точки для вихрей из выражения (5.92), $R_1^{(0)} = \left|y_0 - y_1^{(0)}\right|$ и $R_2^{(0)} = \left|y_0 + \frac{\mu_1}{\mu_2}y_1^{(0)}\right|$.

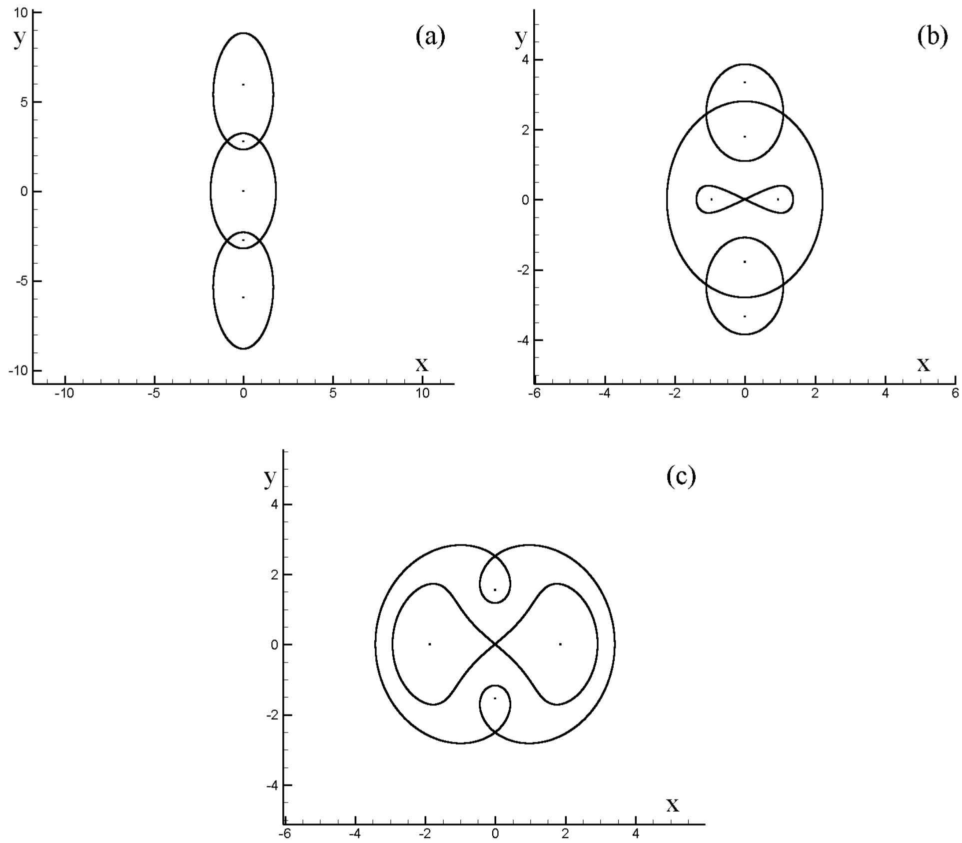

Рис. 5.24. Фазовые портреты адвекции жидких частиц. Сплошные линии – сепартрисы, точки – эллиптические особые точки. Параметры: $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, $\Omega_0 = -0,02$ для разных значений сдвига: (a) $S_0 = -0,015$, (b) $S_0 = -0,007$, (c) $S_0 = -0,001$.

Как и для собственной частоты колебаний вихря (5.96), можно получить аналогичную нулевую частоту собственных колебаний жидкой частицы, используя уравнения (5.90),

$$\omega_0^2 = -\left[4\left(S_0-\Omega_0\right)+\frac{H_2}{H}\mu_1\frac{y_1^{(0)}}{y_0}\left\{\frac{1}{R_1^{(0)}}\left[\frac{1}{R_1^{(0)}}-K_1\left(R_1^{(0)}\right)\right]-\frac{1}{R_2^{(0)}}\left[\frac{1}{R_2^{(0)}}-K_1\left(R_2^{(0)}\right)\right]\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{H_2}{H}\left\{\mu_1K_0\left(R_1^{(0)}\right)+\mu_2K_0\left(R_2^{(0)}\right)\right\}\right]$$
$$\times\left[4S+\frac{y_1^{(0)}}{y_0}\frac{H_2}{H}\mu_1\left\{\frac{1}{R_1^{(0)}}\left[\frac{1}{R_1^{(0)}}-K_1\left(R_1^{(0)}\right)\right]-\frac{1}{R_2^{(0)}}\left[\frac{1}{R_2^{(0)}}-K_1\left(R_2^{(0)}\right)\right]\right\}\right]. \quad (5.98)$$

Для дальнейшего анализа воспользуемся упрощенной версией данного выражения, которое действительно только для центральной эллиптической точки при $\mu_1=\mu_2$ (как на рис. 5.24a),

$$\tilde{\omega}_0 = 2\left(\left(\Omega_0+\frac{1}{2}\frac{H_2}{H}\mu_1K_0\left(y_1^{(0)}\right)\right)^2\right.$$
$$\left.-\left(S_0+\frac{H_2}{H}\mu_1\frac{1}{y_1^{(0)}}\left(\frac{1}{y_1^{(0)}}-K_1\left(y_1^{(0)}\right)\right)-\frac{1}{2}\frac{H_2}{H}\mu_1K_0\left(y_1^{(0)}\right)\right)^2\right)^{1/2} \quad (5.99)$$

Собственная частота, полученная по данному выражению в точности совпадает с собственной частотой колебаний жидкой частицы в центральной особой точке.

Из выражения (5.99) непосредственно следует условие на бифуркацию центральной особой точки (смена типа как на рис. 5.24a,b). По мере уменьшения параметра сдвига $|S_0|$ по отношению к вращению $|\Omega_0|$, частота $\tilde{\omega}_0$ сначала возрастает до локального максимума, а далее падает до нуля. Такое поведение говорит о том, что между эллиптической точкой и сепаратрисой возникает траектория с максимальной частотой.

Далее, на основе сравнения собственных частот колебаний вихрей и жидкой частицы, проанализируем появляющуюся нерегулярную динамику. Из уравнения (5.96) следует, что собственная частота колебаний вихрей, которая является частотой возмущения для движения жидких частиц, обращается в нуль при $S_0\to 0$ и $S_0\to\Omega_0$. Поэтому, для текущих значений интенсивностей, кривая частоты возмущения имеет один максимум. То есть, возможно создание возмущения любой частоты от нуля до этого максимума за счет изменения параметра S_0, $0<|S_0|<|\Omega_0|$. На рис. 5.25 изображено асимптотическое значение собственной частоты колебаний в зависимости от сдвига S_0.

Отношение собственных частот колебаний вихрей и жидкой частицы важно для определения положения нелинейных резонансов и, соответствующих им островов устойчивости, в возмущенном фазовом пространстве [173, 391, 392, 526, 527]. Как видно из рис. 5.24, в системе существует 4 типа эллиптических точек. Рассмотрим эллиптические точки, возникающие непосредственно над точечными вихрями из нижнего слоя, т.е. $R_i^{(0)} << 1$ в уравнении (5.98). Максимальная частота собственных колебаний частиц всегда значительно превосходит собственную частоту колебаний вихрей так как функция Бесселя K_0 имеет большие значения при малых аргументах. Отсюда следует, что резонансы появляются только в очень узкой окрестности сепаратрисной области, и, следовательно, появляется только очень узкий стохастический слой.

Теперь рассмотрим динамику жидких частиц в окрестности центральной особой точки. Из уравнения (5.99) следует, что собственная частота колебаний жидкой частицы стремится к нулю при $S_0 \to \Omega_0$ и в некоторой точке на интервале $0 < |S_0| < |\Omega_0|$. При $S_0 \sim \Omega_0$ существует интервал, на котором собственная частота колебаний жидких частиц больше собственной частоты колебаний вихрей, как следствие, возможно появление любого типа нелинейного резонанса. При уменьшении $|S_0|$ собственная частота колебаний жидких частиц становится меньше, чем собственная частота колебаний вихрей, поэтому хаотическая динамика определяется резонансом $1:2$, который появляется на половинной частоте собственных колебаний вихрей.

Далее проанализируем эффективность появляющейся хаотической динамики, используя теорию перекрытия резонансов Чирикова [267] (см. так же [172, 173, 227]).

5.7.3. Глобальная неустойчивость движения жидких частиц

В баротропном случае, рассмотренном ранее, для того, чтобы получить эффективную хаотизацию возмущенной системы необходимо выбрать параметры близкие к появлению пересоединения сепаратрис в стационарной системе. В результате слияния сепаратрисных стохастических слоев, мера хаоса в системе значительно возрастает. Однако, хаотизация в окрестностях самих точечных вихрей невозможна из-за слишком высоких скоростей оборота частиц в непосредственной окрестности сингулярного вихря. В рассматриваемой задаче в верхнем слое не возникает сингулярностей, поэтому можно ожидать хаотизации всего фазового пространства.

После смещения вихрей из положений равновесия, движение жидких частиц начинает испытывать периодические возмущения, что приводит к хаотизации некоторых областей. Для того, чтобы значительная часть траекторий стала хаотическими необходимо специально подобрать частоту возмущения, которая бы соответствовала наиболее глубокому пересечению резонансов в фазовом пространстве. В рассматриваемой задача, частота возмущения

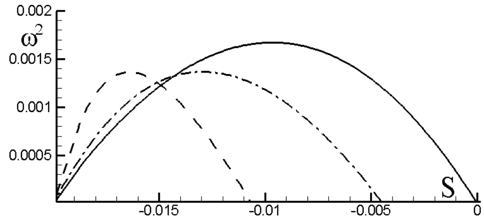

Рис. 5.25. Зависимости квадратов собственных частот, (5.96), (5.98), (5.99), от сдвига S_0 при $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$, $\Omega = -0,02$: частота собственных колебаний вихрей, ω_δ^2, – сплошная линия, частота собственных колебаний жидких частиц вокруг центральной особой точки, $\tilde{\omega}_0^2$, – пунктирная линия, частота собственных колебаний жидких частиц вокруг боковых особых точек, ω_0^2 – штрих-пунктирная линия.

появляется естественным образом и может принимать строго ограниченные значения. Причем при увеличении оклонения начального положения вихрей от их положений равновесия, частота меняется очень слабо, приобретая вид плато (см. рис. 5.4b).

На рис. 5.25 изображены зависимости квадрата собственной частоты колебаний жидких частиц, выражения (5.96), (5.98), (5.99) от сдвига S_0 для интенсивностей $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$ и вращения $\Omega_0 = -0,02$. Из рисунка видно, что при $S_0 = \Omega_0$, частоты падают до нуля. При увеличении $|S_0|$ частоты растут до максимума. Частота возмущения ω_δ значительно меньше, чем собственная частота колебаний жидких частиц в центральной эллиптической точке $\tilde{\omega}_0$, и немного меньше, чем частота собственных колебаний жидких частиц вокруг боковых особых точек ω_0. Собственная частота колебаний жидких частиц непосредственно над точечными вихрями значительно больше частоты возмущения, что приводит к существенной регуляризации данной области. Далее рассмотрим совместное влияние данных частот на интенсивность хаотизации фазового пространства. На рис. 5.26–5.29 изображены собственные частоты колебаний жидких частиц и соответствующие сечения Пуанкаре для конкретных значений сдвига S_0 и фиксированных $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$, $\Omega = -0,02$. Для построения всех сечений используется частота колебаний вихрей при их отклонении на $\delta = 0,5$ от их положений равновесия вдоль оси y.

При $S_0 = -0,019$, на рис. 5.26 видно, что частотное плато для боковых особых точек достаточно широкое, что приводит к тому, что траектории с частотами близкими к частоте возмущения и ее половине находятся рядом с сепаратрисой. В результате, тонкий стохастичский слой образуется за счет резонансов $1:1$ и $1:2$. Эффект хорошо виден на рис. 5.26b. Этот случай соответствует минимальной хаотизации фазового пространства.

При $S_0 = -0,016$, на рис. 5.27 изображен случай максимальной собственной частоты

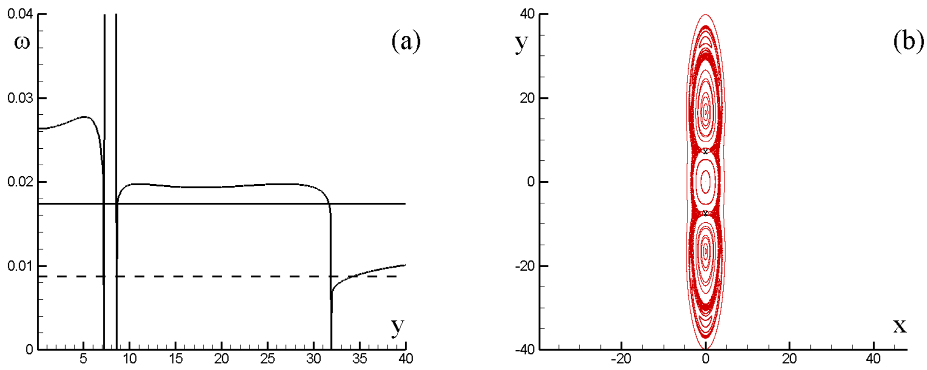

Рис. 5.26. $S_0 = -0.019$. (a) собственная частота колебаний жидких частиц в зависимости от y. Только положительная область $y > 0$. Сплошная и пунктирная прямые указывают частоту возмущения и ее половину. (b) соответствующее сечение Пуанкаре для жидких частиц верхнего слоя. Начальные положения вихрей, располагающихся в нижнем слое, обозначены крестами.

колебаний жидких частиц вокруг центральной особой точки. Частотное плато в центральной области сужается, что приводит к тому, что резонанс отодвигается от сепаратрисной области. При этом приближается резонанс 1 : 1, который обеспечивает эффективную хаотизацию.

С дальнейшим уменьшением сдвига $|S_0|$ частота возмущения превосходит собственную частоту колебаний жидких частиц как в центральной, так и в боковых особых точках. В результате, в системе не появляется резонанс 1 : 1 (см. рис. 5.28), при этом резонанс 1 : 2 приближается к сепаратрисной области. В результате эффективность хаотизации определяется положением и размером резонанса 1 : 2 во внешней области.

На рис. 5.29 представлен случай, соответствующий гиперболической центральной особой точке в стационарном случае. Сдвиг в данном случае $S_0 = -0,01$. Из-за гиперболичности, хаотизация в центре легко достигается.

При дальнейшем уменьшении $|S_0|$, собственная частота колебаний жидких частиц так же уменьшается, что приводит к тому, что внешние резонансы приближаются к сепаратрисной области. При $S_0 = -0,0035$ на рис. 5.30 изображен фазовый портрет, соответствующий рис. 5.24c. При этом наборе параметров наблюдается наиболее эффективная хаотизация.

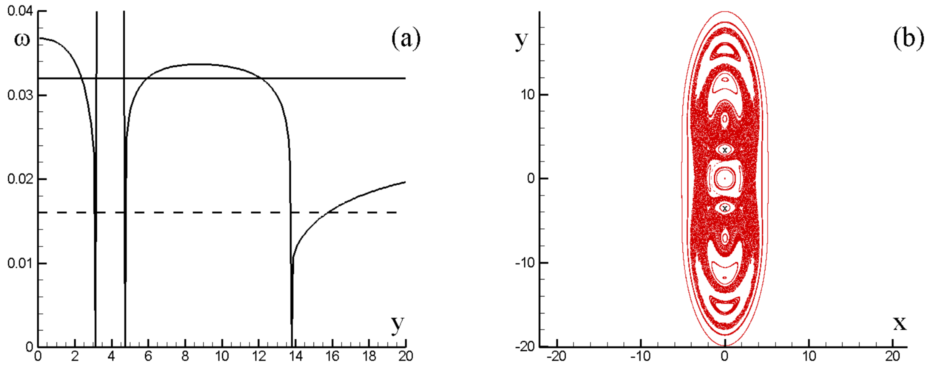

Рис. 5.27. $S_0 = -0.016$. (a) то же, что и на рис. 5.26a. (b) сечение Пуанкаре с развитым хаотическим морем.

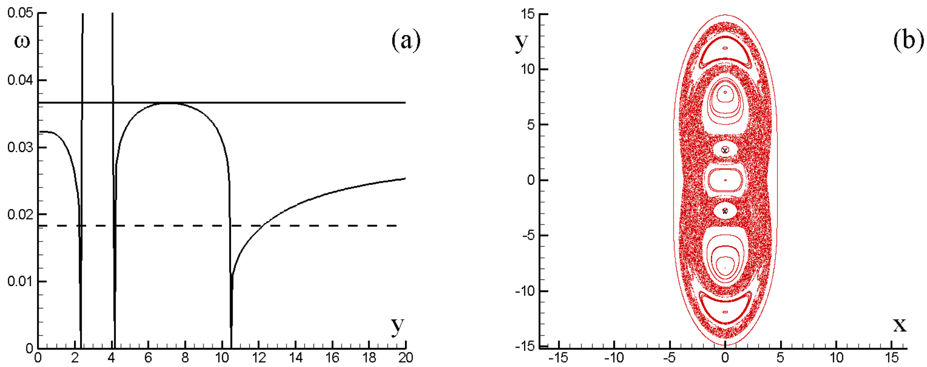

Рис. 5.28. $S_0 = -0,014$. (a) то же, что и на рис. 5.26a. (b) сечение Пуанкаре с развитым хаотическим морем без резонанса 1 : 1 в окрестности центральной эллиптической точки.

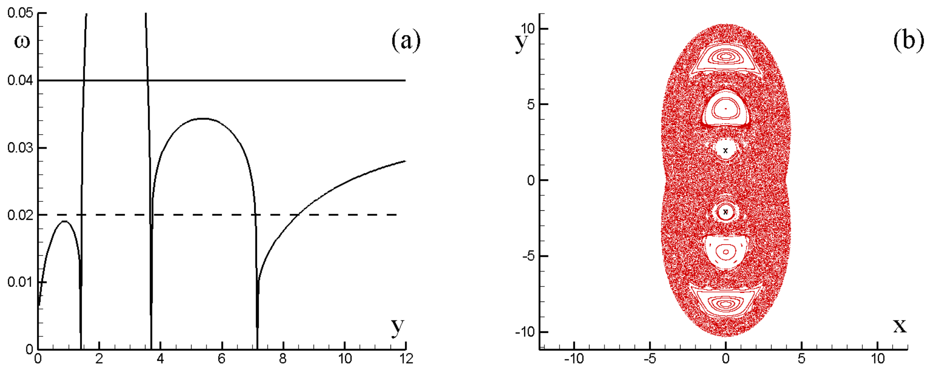

Рис. 5.29. $S_0 = -0,01$. (a) то же, что и на рис. 5.26a. (b) сечение Пуанкаре с развитым хаотическим морем в центральной гиперболической области.

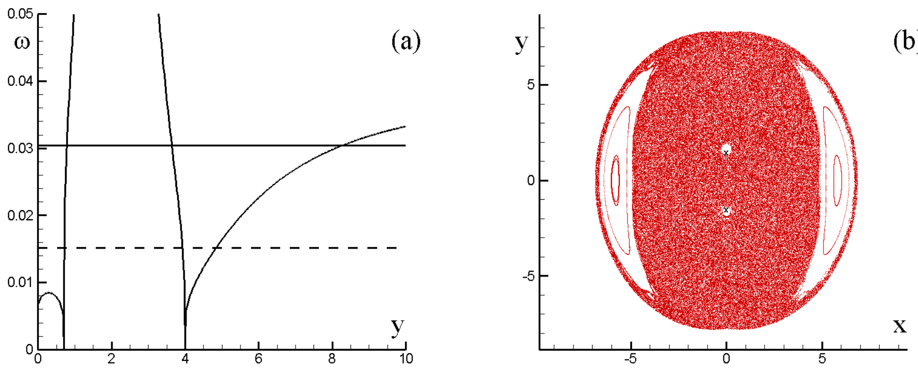

Рис. 5.30. $S_0 = -0,0035$. (a) то же, что и на рис. 5.26а. (b) сечение Пуанкаре с развитым хаотическим морем в центральной гиперболической области, которое уже поглотило все заметные острова устойчивости.

5.8. Хаотизация движения жидких частиц в вихревой атмосфере самораспространяющейся вихревой пары в трехслойном переменном сдвиговом потоке

В заключительной части данной главы рассмотрим особенный режим двух-вихревой системы – самодвижущуюся вихревую пару. Такая структура представляет собой два вихря одинаковых интенсивностей, но противоположного направления вращения. В отсутствии каких-либо ограничений, такая структура перемещается равномерно и прямолинейно на неограниченные расстояния. Важной особенностью такой структуры является то, что в процессе движения, вся жидкость, находящаяся в непосредственной близости от центров вихрей, переносится вместе с вихрями на значительные расстояния. За счет такого переноса, вода с определенными характеристиками может быть перенесена в области с совершенно другими. В океанографической литературе такие вихревые пары так же называют грибовидными течениями [528–535]. Множественные экспериментальные данные указывают на эффективные транспортные свойства и высокую устойчивость таких структур [417, 432, 536–541]. Так же существует большое количество моделей вихревых пар в приложении к геофизической гидродинамике [542–547].

В отсутствии возмущений жидкие частицы, находящиеся внутри вихревой атмосферы, остаются в ней постоянно, так же как и частицы во внешней области всегда остаются во внешней области. Однако при наложении на такой диполь внешнего периодического сдвигового потока, будет наблюдаться перенос жидких частиц из области вихря во внешнюю область и наоборот за счет хаотического переноса [173, 350, 352, 548, 549].

Благодаря хаотического переносу, вихревая атмосфера постоянно обновляется за счет проникновения частиц внешней области внутрь атмосферы и обратно [173, 339]. Общие принципы хаотической адвекции достаточно хорошо изучены, как в случае малых возмущений [2, 169, 351, 395, 550], так и при конечных возмущениях [5, 171–173]. В этих работах для оценки размеров области, подверженной хаотическому переносу, используются методы, в которых в качестве нулевого приближения рассматривается стационарное состояние системы. Таким образом, нестационарное (возмущенное) состояние представляется в виде суперпозиции соответствующего стационарного состояния и нестационарных колебаний [353, 354].

В рассматриваемой задаче, как будет показано далее, однако, не удается ввести такую суперпозицию. Это проявляется в значительном изменении скорости движения и, как следствие, в значительном изменении размера вихревой атмосферы возмущенного диполя в зависимости от параметров пульсирующего сдвигового потока (амплитуды и частоты). В результате, для анализа свойств хаотического переноса в качестве нулевого приближения необходимо выявить квазистационарное состояние системы, соответствующее данному нестационарному. Поиску такого квазистационарного состояния посвящен данный параграф.

5.8.1. Уравнения движения

Рассмотрим невязкий несжимаемый геофизический поток в квазигеострофическом приближении трехслойного океана, аналогичном рассмотренному в работах [121, 337]. В среднем слое движется вихревой диполь, представляющий собой пару сингулярных вихрей с интенсивностями $\mu_1 = -\mu_2$. Каждый сингулярный вихрь в диполе является зеркальным отражением другого относительно оси абсцисс, то есть координаты центров вихрей $x_1 = x_2 = x_0$, $y_1 = -y_2 = y_0$.

Каждый сингулярный вихрь в диполе является зеркальным отражением другого относительно оси абсцисс. Тогда безразмерные уравнения движения центра этого вихря в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -\left.\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0} = -V_2\left(2y_0\right), \\ \dot{y}_0 &= \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right|_{x=x_0, y=y_0} = 0, \end{aligned} \tag{5.100}$$

где $V_2\left(\xi\right) = \frac{(\beta_1-\alpha_1)}{\gamma}\frac{1}{\xi} + \alpha_2\frac{(1-\beta_1)}{\gamma}K_1\left(\xi\right) + \beta_2\frac{(\alpha_1-1)}{\gamma}\sqrt{\frac{\beta_2-1}{\alpha_2-1}}K_1\left(\sqrt{\frac{\beta_2-1}{\alpha_2-1}}\xi\right)$, а все коэффициенты совпадают с аналогичными из Главы 3.

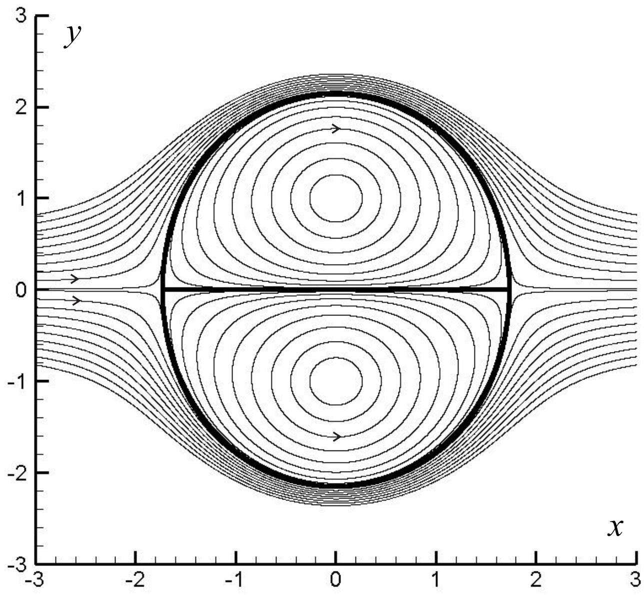

Рис. 5.31. Линии тока жидких частиц невозмущенного диполя, в связанной с ним подвижной системе координат. Жирная линия - сепаратриса, отделяющая вихревую область от внешней области.

Решение для (5.100) имеет вид

$$x_0 = x_0(0) - V_2(2y_0(0))\,t,$$
$$y_0 = y_0(0)\,. \tag{5.101}$$

В соответствии с (5.101) вихревая пара движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$W_0 = -V_2(2y_0(0))\,. \tag{5.102}$$

На рис. 5.31 приведены линии тока жидких частиц в системе координат, движущейся вместе с вихревой парой. Жирной линией обозначено положение сепаратрисы, отделяющей вихревую область (вихревую атмосферу) от внешней области. Траектории частиц в каждый момент времени совпадают с данными линиями тока.

Теперь рассмотрим динамику жидких частиц в окрестности такой структуры при наложении пульсирующего сдвигового потока

$$\psi_E(x,y,t) = -\tilde{W}_0 y + W_1(t)\,xy, \tag{5.103}$$

где $W_1 = \tilde{W}_0 \varepsilon \sin(\nu t)$ и ε, ν амплитуда и частота осциллирующего сдвигового потока. Средняя скорость движения диполя в таком потоке $\left\langle \tilde{W} \right\rangle_t \equiv \tilde{W}_0$ отличается от скорости равномерного прямолинейного движения невозмущенного диполя (5.102) [351, 395, 550].

Ниже представлен анализ изменения характеристик системы в зависимости от величины средней скорости, определяемой параметрами возмущения. Уравнение координат центра вихревой пары в системе координат, движущейся со скоростью $\tilde{W}_0$, в таком случае имеют вид:

$$\dot{x}_0 = \tilde{W}_0 - W_1(t)\, x_0 - V_2(2y_0)\,,$$
$$\dot{y}_0 = W_1(t)\, y_0. \tag{5.104}$$

Интегрируя (5.104), получаем

$$x_0 = x_0(0) + e^{\frac{\varepsilon}{\nu}\cos(\nu t)} \int\limits_0^t \frac{\left(\tilde{W}_0 - V_2\left(2e^{\frac{\varepsilon}{\nu}(1-\cos(\nu\tau))}\right)\right)}{e^{\frac{\varepsilon}{\nu}\cos(\nu\tau)}} d\tau,$$
$$y_0 = y_0(0)\, e^{\frac{\varepsilon}{\nu}(1-\cos(\nu t))}. \tag{5.105}$$

Средняя скорость движения $\tilde{W}_0$ подвижной системы координат при таком виде возмущения вычисляется из условия равенства нулю среднего значения $x-$ компоненты скорости движения центра вихря [351, 395]. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi/\nu} \frac{\left(\tilde{W}_0 - V_2\left(2y_0(0)\, e^{\frac{\varepsilon}{\nu}(1-\cos(\nu\tau))}\right)\right)}{e^{\frac{\varepsilon}{\nu}\cos(\nu\tau)}} d\tau = 0,$$

$$\frac{\pi\tilde{W}_0}{\nu} I_0\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right) = \int\limits_0^{\pi/\nu} \frac{V_2\left(2y_0(0)\, e^{\frac{\varepsilon}{\nu}(1-\cos(\nu\tau))}\right)}{e^{\frac{\varepsilon}{\nu}\cos(\nu\tau)}} d\tau,$$

$$\tilde{W}_0 = \frac{\nu}{\pi I_0\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)} \int\limits_0^{\pi/\nu} \frac{V_2\left(2y_0(0)\, e^{\frac{\varepsilon}{\nu}(1-\cos(\nu\tau))}\right)}{e^{\frac{\varepsilon}{\nu}\cos(\nu\tau)}} d\tau, \tag{5.106}$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя.

Из выражения (5.106), видно, что средняя скорость потока определяется параметрами возмущения: амплитудой ε и частотой ν. Пусть $x_0(0) = 0$ и $y_0(0) = 1$. На рис. 5.32a представлены зависимости $\tilde{W}_0$ от частоты сдвигового потока при фиксированных значениях амплитуды.

Из рисунка видно, что при наложении такого потока диполь движется значительно медленнее, чем в невозмущенном случае (штриховая линия), вплоть до полной остановки. Более того при определенных параметрах пульсирующий сдвиговой поток может направить диполь в противоположную по сравнению с невозмущенным случаем сторону. Причем максимальная скорость движения диполя в противоположную сторону достигается при $\frac{\varepsilon}{\nu} = 1$ и равняется $\widetilde{W}_{\max} \approx -1,750433 \cdot 10^{-2}$. Аналогичный эффект замедления вихревых пар показан в работах [551, 552].

С целью показать, что изменение скорости движения диполя в пульсирующем сдвиговом потоке не является следствием бароклинности модели, на рис. 5.32b представлено такое изменение скорости диполя в баротропной модели геофизического потока. Такую баротропную

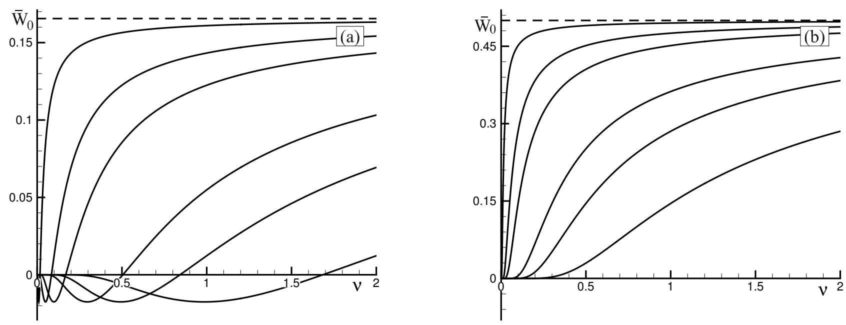

Рис. 5.32. a) $\tilde{W}_0$ в зависимости от частоты сдвигового потока ν при фиксированных значениях амплитуд $0,01$, $0,05$, $0,1$, $0,3$, $0,5$, 1. Штриховая линия - скорость невозмущенного движения диполя (5.102), b) аналогичная зависимость для баротропной модели.

модель проще всего получить, устремив к нулю скачки плотности в радиусах деформации k_1, k_3, k_{21}, k_{22}. В результате обезразмеренное выражение для баротропной функции тока диполя в пульсирующем сдвиговом потоке примет стандартный вид

$$\psi_b = \psi_E + log\frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2}. \tag{5.107}$$

Средняя скорость распространения вихревой пары равна $\tilde{W}_0 = \frac{e^{-\varepsilon/\nu}}{2I_0\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)}$.

На рис. 5.32b приведены аналогичные изменения в скорости для баротропного потока. То есть такое изменение скорости диполя является исключительно следствием наложения пульсирующего сдвигового потока. Однако также наблюдаются и некоторые отличия между баротропной и рассматриваемой трехслойной моделью. Как видно из рисунка в трехслойной модели возможно движение в обратном направлении, в то время как в баротропной модели скорость диполя изменяется, но она никогда не меняет знак.

Вследствие изменения скорости движения диполя относительно невозмущенного случая изменяется размер области, в которой диполь индуцирует поле скорости. Эта область, называемая вихревой атмосферой, переносится вместе с диполем на некоторое расстояние, при этом осуществляется обмен жидкостью между этой атмосферой и внешней областью посредством хаотического переноса. Изменение размера вихревой атмосферы будет продемонстрировано далее.

5.8.2. Изменение размеров вихревой атмосферы в возмущенном случае

Уравнения движения жидкой частицы в подвижной системе координат имеют вид:

$$\dot{x} = \tilde{W}_0 - W_1(t)\,x - \left\{ \frac{(y-y_0)}{r_1} V_2(r_1) - \frac{(y+y_0)}{r_2} V_2(r_2) \right\},$$
$$\dot{y} = W_1(t)\,y + (x-x_0) \left\{ \frac{V_2(r_1)}{r_1} - \frac{V_2(r_2)}{r_2} \right\}. \tag{5.108}$$

Численно интегрируя данную систему уравнений, получаем сечения Пуанкаре, приведенные на рис. 5.33 для рассмотренных выше значений амплитуды и частоты. Сечение Пуанкаре 5.33a показывает, что существуют значения амплитуды и частоты возмущенная, при которых возмущенная и невозмущенная вихревые атмосферы диполя равны по размеру. В таком случае для оценки хаотического переноса в системе возможно использовать оценки, полученные с помощью канонической теории возмущений [173, 353, 354, 395].

Однако, из рис. 5.33b,c, видно, что, все еще находясь в пределах малых возмущений $\varepsilon = 0,1$, такие оценки использовать нельзя, так как в среднем возмущение перестает быть пренебрежимо мало, что выражается в значительном замедлении диполя, и, как следствие, увеличении его вихревой атмосферы.

С увеличением амплитуды размер возмущенной вихревой атмосферы может увеличиться в несколько раз (см. рис. 5.33d,e,f,g). Таким образом, в сдвиговом пульсирующем потоке диполь может переносить объем жидкости в разы превосходящий объем, переносимый самодвижущимся невозмущенным диполем. Причем жидкость, переносимая возмущенным диполем, сильно перемешана всюду, кроме устойчивой окрестности сингулярного вихря [3, 5] о чем также можно судить по представленным сечениям Пуанкаре.

Как уже было сказано, в невозмущенном случае самораспространяющийся диполь переносит вместе с собой объем жидкости, содержащийся в его вихревой атмосфере, бесконечное время. Причем сепаратриса, отделяющая вихревую атмосферу от внешней области, является непроницаемым барьером. То есть частицы из внешней области не могут попасть в вихревую, и наоборот. В случае же наложения пульсирующего сдвигового потока на такой диполь динамика частиц в системе значительно меняется. Становится возможной ситуация, при которой частица, изначально находившаяся в вихревой области, через конечное время покинет ее. Такое поведение является следствием неинтегрируемости уравнений движения, что является признаком детерминированного хаоса. Под хаосом понимается экспоненциальная расходимость изначально близких траекторий за конечное время. В результате сепаратриса, играющая роль барьера для переноса частиц, разрушается, и становится возможным обмен жидкими частицами между вихревой атмосферой и внешней областью.

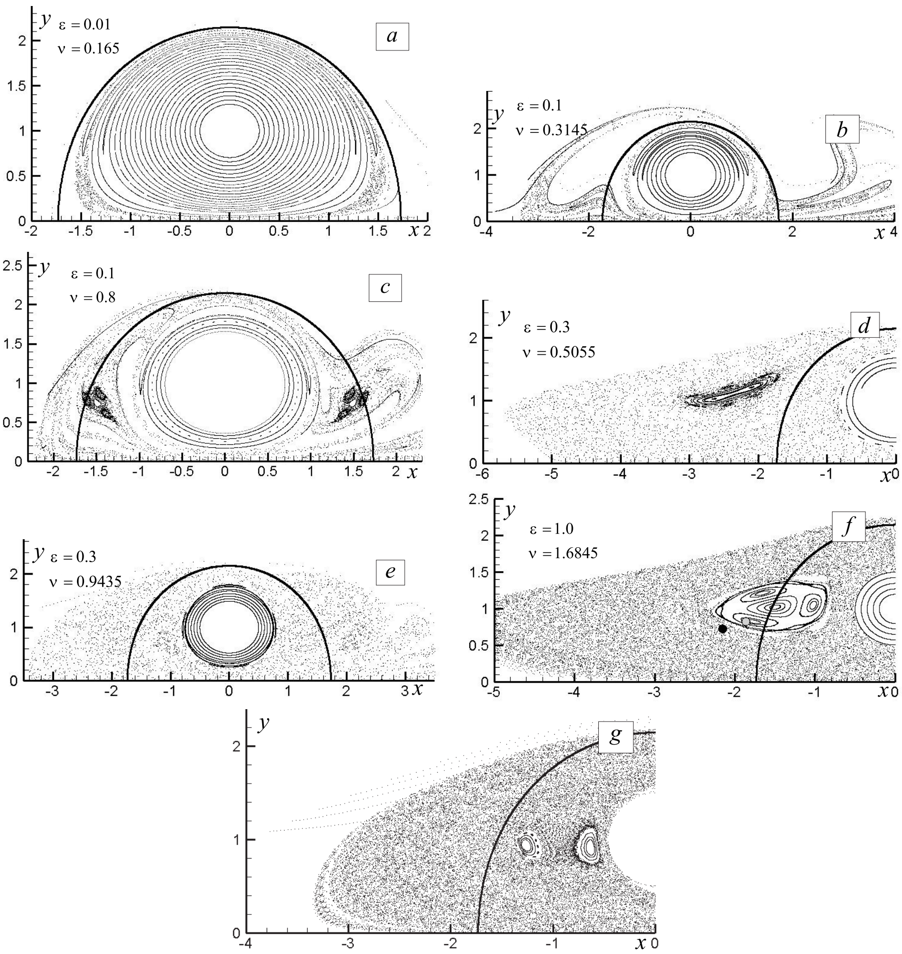

Рис. 5.33. Сечения Пуанкаре при ε, ν : a) $0,01,\ 0,165$, b) $0,1,\ 0,3145$, c) $0,1,\ 0,8$, d) $0,3,\ 0,5055$, e) $0,3,\ 0,9435$, f) $1,\ 1,6845$, g) $1,\ 3,144$. Сплошная кривая – сепаратриса невозмущенной системы.

Как видно из рис. 5.33, диполь в пульсирующем сдвиговом потоке переносит значительно больший объем жидкости, по сравнению с простым самораспространяющимся диполем. Причем некоторые жидкие частицы переносятся на конечных временах, значение которых зависит от начальных положений частиц. Это явление принято называть хаотическим переносом [350, 352].

Оценим эффективность хаотического переноса методом, использовавшимся в [3, 5, 171, 172, 339]. Метод предполагает численный расчет количества жидких частиц, покидающих вихревую область за конечное время. Причем в качестве начального распределения этих частиц принимается область, ограниченная невозмущенной сепаратрисой. Однако в данном случае в связи с тем, что пульсирующий сдвиговый поток меняет структуру вихревой атмосферы, для выявления эффективности хаотического транспорта нельзя использовать невозмущенную сепаратрису, изображенную на 5.31. Поэтому в качестве начальной области распределения жидких частиц выбирается некая квазисепаратриса, огибающая возмущенную вихревую атмосферу. Эта возмущенная вихревая атмосфера отчетливо видна на сечениях Пуанкаре -– область, заполненная неупорядоченными точками. Данная область изначально заполняется порядка 10^4 маркерами, далее отслеживаются траектории этих маркеров до тех пор, пока они не покинут вихревую атмосферу. Посчитав долю таких вымытых маркеров относительно количества маркеров начального заполнения области, имеем величину, характеризующую эффективность хаотического переноса. Итак, вычисляется следующая характеристика

$$\eta = \frac{N_i}{N_v}, \tag{5.109}$$

где N_i – число маркеров, изначально равномерно распределенных внутри квази-сепаратрисы и N_v – чисо маркеров, покидающих данную область за конечное время.

Таким образом, на рис. 5.34 приведены графики зависимости доли вымытых жидких частиц η от частоты возмущения.

Все зависимости рис. 5.34 имеют одну существенную особенность — ярко выраженный пик при низких частотах. Наличие такого пика связано со значительным замедлением распространения диполя, и, как следствие, со значительным увеличением размеров вихревой атмосферы по сравнению с невозмущенным случаем. Причем значительная доля частиц в этой вихревой атмосфере движутся хаотически. С увеличением частоты размер вихревой атмосферы диполя приближается к размеру невозмущенного диполя, и кривые зависимостей доли вымытых маркеров приобретают вид, характерный для сингулярных моделей вихрей [3, 5, 169]. На этих кривых видно достаточно широкое плато оптимальных для хаотического

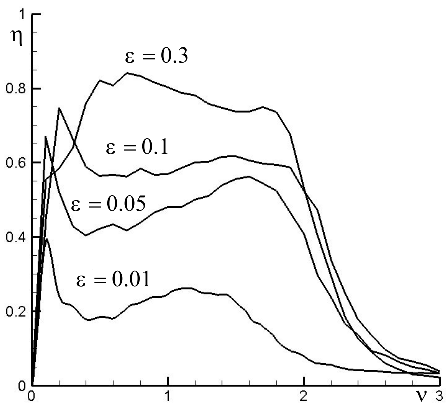

Рис. 5.34. η в зависимости от частоты возмущения при фиксированной амплитуде.

переноса частот [3, 5, 103, 172, 398]. С дальнейшим увеличением частоты доля вымытых маркеров сокращается, то есть наблюдается регуляризация вихревой атмосферы диполя.

Несмотря на то, что все модели, рассмотренные в данной главе являются очень упрощенными, полученные результаты можно интерпретировать для реальных потоков. Главный вывод из данного анализа заключается в том, что многие эффекты, наблюдаемые на поверхности океана, например, с помощью спутников могут быть индуцированы исключительно процессам происходящими в глубине.

Результаты данной главы опубликованы в работах [8, 9, 11, 12, 18, 22, 26].

Глава 6

Модели эллиптических и эллипсоидальных вихрей в баротропном и линейно-стратифицированном бароклинном деформационных потоках

Все предыдущие главы, за исключением одной, были посвящены исследованию нелинейной динамики взаимодействия сингулярных вихрей между собой и с внешними потоками. Используя теорию таких вихрей, формулировались различные динамически-согласованные модели, отождествляемые с мезомасштабной вихревой динамикой океана. Модели сингулярных вихрей очень удобны для описания взаимодействия таких вихрей, при условии, если можно пренебречь изменением формы вихрей при их эволюции. Это допустимо, если вихри достаточно изолированны друг от друга, чтобы не начать сливаться между собой. Так же необходимым условием является высокая степень устойчивости каждого из вихрей, чтобы можно было не обращать внимание на возмущения формы вихря, которые во многих случаях могут приводить к нарушению его когерентности.

Чтобы учесть изменения формы границы, но при этом рассматривать модель со все еще небольшим числом степеней свободы, используется модель эллиптического вихря в баротропном случае [203]. Такой вихрь является обобщением классического вихря Кирхгофа на случай наличия сдвиговой компоненты во внешнем фоновом потоке. Обобщением двумерного эллиптического вихря является эллипсоидальный вихрь, помещенный в бароклинную жидкость с постоянной частотой плавучести, т.е. линейно стратифицированную жидкость [452–454, 474, 553]. Чтобы учесть влияние внешних факторов на эволюцию таких вихрей, в данные модели добавлен внешний деформационный поток, аналогичный рассмотренному в предыдущей главе. В результате обе модели допускают 4 типа эволюции вихрей – вихри могут быть в стационарном состоянии, т.е. не менять свою форму и ориентацию с течением времени. Так же существуют два периодических режима: первый – колебания вокруг оси сдвига скорости, задаваемой внешним потоком, второй – вращение вихря вокруг центра деформации. Последний тип движения – апериодический – бесконечное вытягивание вихря вдоль оси сдвига скорости. Все нестационарные режимы движения вихрей приводят к изменению характеристик вихрей, эксцентриситета и ориентации, во времени.

Множество авторов рассматривали проблему устойчивости таких вихрей по отношению к возмущениям эллиптической или эллипсоидальной формы. Так в работах [189, 199–202] показано, что при наличии двух или трехмерного возмущения эллиптической формы вихря, он становится неустойчивым в случае $a/b > 3$, где a и b – длины полуосей эллипса. В то же время, эллипсоидальный вихрь является более устойчивой структурой [213] с условием устойчивости $a/b > 7$ при постоянном значении вертикальной полуоси, где a и b -– длины горизонтальных полуосей эллипсоида. Важным следствием данных результатов является то, что такие вихри сохраняют очень похожие свойства даже в значительно более сложных моделях, учитывающих диффузионные и турбулентные воздействия на вихревую границу. В таких усложнённых численных моделях очень часто появляется эффект филоментации когерентного вихря. Мелкие области завихренности отрываются от вихря, уменьшая его завихренность, тем самым ослабляя его устойчивость. Даже несмотря на появление таких мелкомасштабных возмущений, условие устойчивости сохраняется практически без изменений. Как только вихрь приближается к пороговому значению отношения длин полуосей, он теряет устойчивость и разрушается на конечное число более мелких устойчивых вихрей [554–556].

Основное внимание исследователей было сосредоточенно на оценке устойчивости таких вихрей к малым возмущениям формы вихрей при наличии постоянного внешнего деформационного потока. В то же время, вопрос эволюции вихревой структуры в переменном внешнем потоке остается слабо изученным. Важное отличие от случая возмущения формы при постоянном внешнем потоке, при котором динамика вихря всегда остается регулярной, состоит в том, что в нестационарном внешнем потоке вихрь начинает эволюционировать нерегулярно. Нерегулярная динамика в данном случае означает, что вихрь начинает переходить из одного динамического режима в другой хаотическим образом [503, 557]. То есть, несмотря на отсутствие каких-либо случайных величин в задаче, фазовые траектории динамики вихря могут экспоненциально расходиться. Анализу этого эффекта посвящена данная глава.

В первом параграфе данной главы будет рассмотрена модель эллиптического вихря. В последующих параграфах будет проанализирована модель эллипсоидального вихря.

6.1. Параметрическая неустойчивость эволюции эллиптического вихря в баротропном деформационном потоке

Модель эллиптических вихрей, помещенных в поток с линейной деформацией является базовой моделью для оценки устойчивости вихревых структур, наблюдаемых в природе. Большое количество работ посвящены анализу влияния пространственных возмущений на форму такого вихря при условии постоянного внешнего потока [189, 199–202, 437–439, 441, 442, 444]. Важнейший результат анализа заключается в том, что эллиптический вихрь становится неустойчивым по отношению к линейным возмущениям его эллиптической формы, если удовлетворяется условие $a/b \leq 3$, где a и b – длина полуосей вихря.

Интерес представляет вопрос динамики эллиптического вихря, помещенного в переменный деформационный поток. В этом случае, эллиптическая форма самого вихря остается неизменной, однако его ориентация и эксцентриситет могут меняться непредсказуемым образом. В случае малых амплитуд возмущения деформационного потока, можно построить функцию Мельникова для оценки области нерегулярной динамики [204–206, 213]. В случае медленно изменяющейся частоты возмущения будет наблюдаться эффект авторезонанса [208]. В работе [205] показано, что при зависимом от времени внешнем потоке, эллиптический вихрь может выходить из своего стационарного положения, как в колебательный, так и во вращательный режим. В данном параграфе будет продемонстрировано, что, в случае малых амплитуд возмущения, такой вихрь выходит из стационарного состояния посредством линейного параметрического резонанса. В случае же конечных амплитуд возмущения, динамика вихря в окрестности стационарной конфигурации определяется пересечением серий нелинейных резонансов.

В данном параграфе будет рассматриваться динамика только самого эллиптического вихря. Для геофизических приложений, возможно, больший интерес представляет каким образом такой вихрь воздействует на окружающую его жидкость [214–216]. Эти вопросы будут рассмотрены в следующих параграфах для бароклинной модели эллипсоидального вихря.

Как и прежде будем рассматривать невязкую несжимаемую двумерную жидкость. В жидкости эволюционирует эллиптическое пятно с постоянной потенциальной завихренностью g, на которое действует нестационарный сдвиг скорости $e(t)$ и внешнее вращение $\gamma(t)$. Пятно сохраняет свою начальную эллиптичность с полуосями a и b, $\varepsilon = a/b$ и φ – угол между главной полуосью a и осью абсцисс декартовой системы координат. Уравнения движения для переменных ε и φ имеют вид [203]:

$$\dot{\varepsilon} = 2e\varepsilon\cos 2\varphi, \quad \dot{\varphi} = \gamma + \frac{g\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2} - e\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2-1}\sin 2\varphi. \tag{6.1}$$

Интересно отметить, что положение центра вихря (x_0, y_0) определятся с помощью адвекционных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= u_0 + e\left(x_0 - x_d\right) - \gamma\left(y_0 - y_d\right), \\ \frac{dy_0}{dt} &= v_0 - e\left(y_0 - y_d\right) + \gamma\left(x_0 - x_d\right), \end{aligned} \tag{6.2}$$

где u_0, v_0 – компоненты скорости произвольного однородного внешнего потока, x_d, y_d – координаты постоянного центра деформации. Уравнения (6.2) в точности совпадают с уравнениями, описывающими динамику центра завихренности множества точечных вихрей 5.34. Таким образом, при условии нестационарных отличающихся сдвига и вращения внешнего потока, центр вихря может испытывать параметрическую неустойчивость, которая приведет к неограниченному движению вихря от центра деформации. Данный эффект повлияет только на положение вихря, в то же время относительная динамика формы вихря не изменится.

Далее, без потери общности, положим $g = 1$. Выражения (6.1), таким образом, представляют собой динамическую систему с полутора степенями свободы [353, 354], если $e(t)$ и $\gamma(t)$ явно зависят от времени. Если эти условия выполняются, то эволюция вихря может проявлять черты нерегулярной динамики, которая будет выражаться в непредсказуемой смене режимов движения вихря. Для начала, рассмотрим стационарную систему $e(t) \equiv e_0 = const$, $\gamma(t) \equiv \gamma_0 = const$. Особые точки системы получаются из выражений [201, 203]

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{4}, \\ &{\varepsilon_0}^3 + {\varepsilon_0}^2\frac{(\gamma_0 - e_0\sin 2\varphi_0 + 1)}{(\gamma_0 - e_0\sin 2\varphi_0)} - \varepsilon_0\frac{(\gamma_0 + e_0\sin 2\varphi_0 + 1)}{(\gamma_0 - e_0\sin 2\varphi_0)} - \frac{(\gamma_0 + e_0\sin 2\varphi_0)}{(\gamma_0 - e_0\sin 2\varphi_0)} = 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Существует несколько качественно различных типов фазовых портретов с различным количеством и типом особых точек [201]. Часть фазовых портретов имеет эллиптическую стационарную точку, которая соответствует неподвижному вихрю. Нас будут интересовать именно такие конфигурации. На рис. 6.1 приведен фазовый портрет для параметров $e_0 = 0,15$, $\gamma_0 = 0,02$. Гомоклиническая сепаратриса разделяет начальные положения на области колебания эллипса и его бесконечного вытягивания.

Эллиптическая точка, изображенная на рис. 6.1, соответствует случаю, когда эллиптический вихрь находится в неподвижном состоянии. Если вихрь будет отклонен от этого положения, то он сначала начнет совершать колебательные движения вдоль оси внешнего сдвига. При выходе отклонения за пределы сепаратрисы, вихрь начнет бесконечно вытягиваться.

6.1.1. Динамика возмущенной системы в окрестности стационарной эллиптической точки

Рассмотрим динамику вихря в случае малых периодических возмущений внешнего потока вида

$$e(t) = e_0 + e'(t) = e_0 + e_0\delta cos\nu t,\ \gamma(t) = \gamma_0 + \gamma'(t) = \gamma_0 + \gamma_0\delta cos\nu t. \tag{6.4}$$

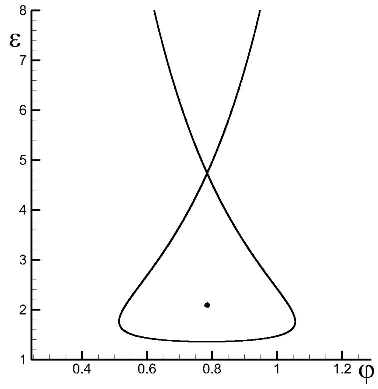

Рис. 6.1. Фазовый портрет стационарной системы (6.1) в случае наличия одной эллиптической особой точки при параметрах $e = 0,15$, $\gamma = 0,02$.

Разложим выражения (6.1) вплоть до линейных членов

$$\varepsilon\left(t\right) \approx \varepsilon_0 + \varepsilon'\left(t\right), \quad \varphi\left(t\right) \approx \varphi_0 + \varphi'\left(t\right) = \pm\frac{\pi}{4} + \varphi'\left(t\right), \tag{6.5}$$

где ε_0, φ_0 получаются из (6.3), $\varepsilon'\left(t\right), \varphi'\left(t\right)$ – малые нестационарные отклонения. Тогда получаем для отклонений

$$\begin{aligned} &\frac{d\varepsilon'}{d\tau} = -4e\left(t\right)\varepsilon_0\varphi'\sin 2\varphi_0, \\ &\frac{d\varphi'}{d\tau} = \left[\gamma\left(t\right) - e\left(t\right)\frac{{\varepsilon_0}^2+1}{{\varepsilon_0}^2-1}\sin 2\varphi_0\right] - \varepsilon'\left[\frac{\left(\varepsilon_0-1\right)}{\left(\varepsilon_0+1\right)^3} - 4e\left(t\right)\frac{\varepsilon_0}{\left({\varepsilon_0}^2-1\right)^2}\sin 2\varphi_0\right]. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Линейная система (6.6) является неоднородной. Для определения устойчива ли динамика в окрестности эллиптической точки достаточно, как и прежде рассмотреть соответствующую однородную систему

$$\begin{aligned} &\frac{d\varepsilon'}{d\tau} = -4e\left(t\right)\varepsilon_0\varphi'\sin 2\varphi_0, \\ &\frac{d\varphi'}{d\tau} = -\varepsilon'\left[\frac{\left(\varepsilon_0-1\right)}{\left(\varepsilon_0+1\right)^3} - 4e\left(t\right)\frac{\varepsilon_0}{\left({\varepsilon_0}^2-1\right)^2}\sin 2\varphi_0\right]. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Примечательно, что член с фоновым вращением γ исчезает из однородной системы. Отсюда следует вывод, что устойчивость динамики в окрестности эллиптической точки зависит только от сдвига фонового потока.

Сводя систему (6.7) к уравнению второго порядка, получим уравнение Хилла [470]. Отсюда следует возможность параметрического резонанса в окрестности невозмущенного положения вихря. Другими словами, для специально подобранных параметров колебаний сдвига, фазовые траектории в окрестности стационарной эллиптической точки неограниченно растут в линейном приближении. Параметры, приводящие к параметрической неустойчивости, определяются с помощью теории Флоке. С помощью метода усреднения по быстрым осцилляциям можно получить грубую аналитическую оценку. Перепишем систему (6.7) в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varepsilon'}{dt} = -4e\left(t\right)\varepsilon_0\varphi'\sin 2\varphi_0,\\
&\frac{d\varphi'}{dt} = \left(\frac{k^2}{4e_0\varepsilon_0\sin 2\varphi_0} + 4\frac{\varepsilon_0\sin 2\varphi_0}{\left(\varepsilon_0^2-1\right)^2}\delta\cos\nu t\right)\varepsilon',
\end{aligned} \tag{6.8}$$

где $k^2 = -\frac{4e_0\varepsilon_0\sin 2\varphi_0}{(\varepsilon_0+1)^2}\left[\frac{(\varepsilon_0-1)}{(\varepsilon_0+1)} - 4\frac{e_0\varepsilon_0}{(\varepsilon_0-1)^2}\sin 2\varphi_0\right]$.

Введем новую переменную, $\rho = -\left(1 + i\frac{4e_0\varepsilon_0\sin 2\varphi_0}{k}\frac{\varphi'}{\varepsilon'}\right)e^{-i\nu\tau}$. Тогда вместо (6.8), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt} = i\left(2k\left[1 + \frac{\delta\left(e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}\right)}{2e_0}\right] - \nu\right)\rho\\
&-ik\left[\frac{16}{k^2}\frac{{e_0}^2{\varepsilon_0}^2}{\left(\varepsilon_0^2-1\right)^2} - 1\right]\frac{\delta\left(1+e^{-2i\nu t}\right)}{2e_0} + ik\left[e^{i\nu t} + \frac{\delta\left(e^{2i\nu t}+1\right)}{2e_0}\right]\rho^2.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Отбрасывая быстро-осциллирующие члены, получаем для усредненного $\bar{\rho}$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{\rho}}{dt} = ik\frac{\delta}{2e_0}\bar{\rho}^2 + i\left(2k-\nu\right)\bar{\rho} - ik\left[\frac{16}{k^2}\frac{{e_0}^2{\varepsilon_0}^2}{\left(\varepsilon_0^2-1\right)^2} - 1\right]\frac{\delta}{2e_0},\\
&\bar{\rho}\left(0\right) = 0.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Решение (6.10) имеет вид

$$\frac{\left(\bar{\rho} + \frac{e_0}{\delta k}\left(2k-\nu\right) - D\right)}{\left(\bar{\rho} + \frac{e_0}{\delta k}\left(2k-\nu\right) + D\right)} = \exp\left\{ik\frac{D\delta}{e_0}\right\}, \tag{6.11}$$

где $D^2 = \left(\frac{e_0}{\delta k}\left(2k-\nu\right)\right)^2 - \left[\frac{16}{k^2}\frac{{e_0}^2{\varepsilon_0}^2}{(\varepsilon_0+1)^2(\varepsilon_0-1)^2} - 1\right]$.

Решение (6.11) растет неограниченно тогда, когда показатель в правой части уравнения действительный. Отсюда получаем аналитическую оценку

$$\left(2k-\nu\right) = \pm 2\delta\sqrt{\frac{\sin 2\varphi_0}{e_0}\frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_0-1\right)}{\left(\varepsilon_0+1\right)^3}}. \tag{6.12}$$

На рис. 6.2 приведены точно вычисленные зоны параметрической неустойчивости (темные области) и аналитическая оценка (пунктирные линии) в области параметров (ν, δ). Каждому набору параметров из темных областей соответствует спиралеобразная неограниченная траектория в линейной системе (6.7). Параметры, взятые вне темных областей, приводят к появлению только ограниченных траекторий.

6.1.2. Нелинейное подавление роста решений, вызванных линейной параметрической неустойчивостью

Обсудим возможные последствия параметрической неустойчивости, характерной для линейной системы (6.7), которая описывает динамику в непосредственной близости от эллиптической точки, на исходную нелинейную систему.

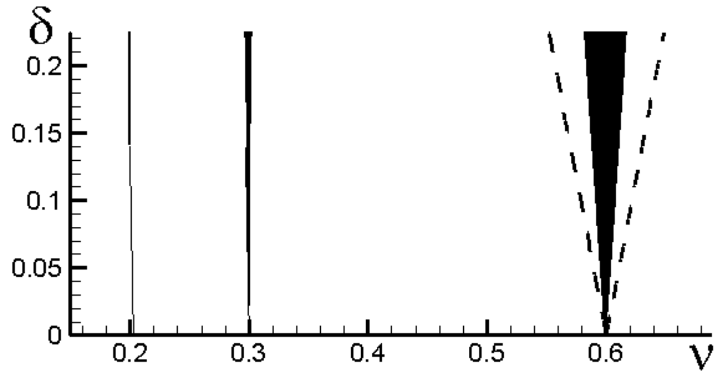

Рис. 6.2. Зоны параметрической неустойчивости в параметрической области (ν, δ). Темные области соответствуют неограниченной динамике линейной системы (6.7). Пунктирная линия соответствует аналитической оценке (6.12).

Во-первых, в случае параметрической неустойчивости, траектории, начинающиеся в окрестности стационарной эллиптической точки, двигаются неограниченно только до сепаратрисной области, в которой нелинейные эффекты подавляют линейный рост. Такой сценарий, в свою очередь, реализуется только в том случае, если уже в самом начале движения траектории не испытывают сильного нелинейного влияния. Этот эффект наблюдается, например, в случае выбора параметров, соответствующих главной зоне параметрической неустойчивости с рис. 6.2. В этом случае вид возмущенного фазового портрета существенно отличается от невозмущенного. Сечение Пуанкаре, приведенное на рис. 6.3a подтверждает данное наблюдение. При этих параметрах, динамика в окрестности стационарной эллиптической точки определяется положением нелинейного резонанса с числом вращения 1 : 2. Фазовые траектории, начинающиеся в окрестности стационарной эллиптической особой точки не демонстрируют рост, связанный с линейным параметрическим резонансом. На рис. 6.3b представлен пример такой траектории, которая очевидно ограниченна положением островов устойчивости, связанных с нелинейным резонансом. Следовательно, линейная система (6.7) не может применяться для описания динамики в данном случае.

Тем не менее, соответствующая линейная система может служить хорошим приближением для исходной нелинейной при некоторых значениях параметров возмущения. Например, если рассмотреть вторую зону параметрической неустойчивости, то видно, что возмущенный фазовый портрет не имеет областей сильной нелинейности в окрестности стационарной эллиптической точки (см. сечение Пуанкаре на рис. 6.4a). Поэтому, для качественного описания динамики в окрестности стационарной эллиптической точки можно использовать линеаризованную систему (6.7). И, действительно, фазовая траектория, начинающаяся в окрест-

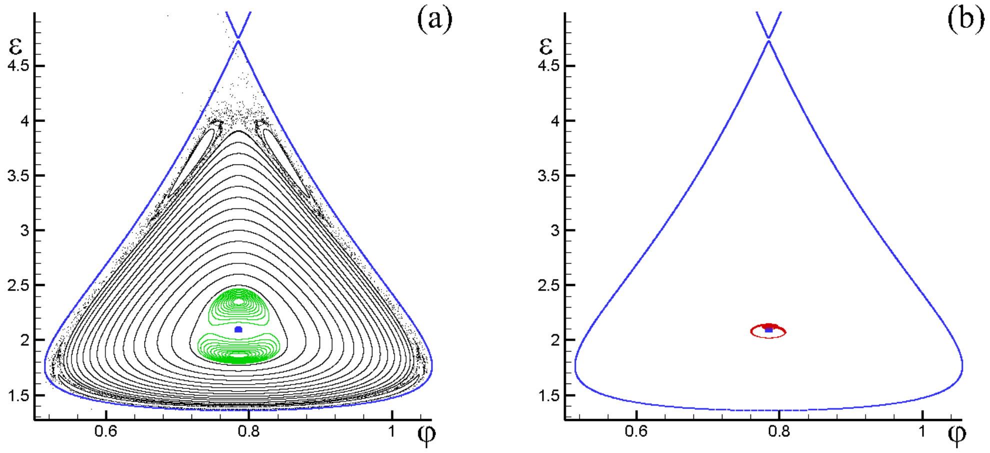

Рис. 6.3. Динамика возмущенной системы для главной зоны параметрической неустойчивости линеаризованной системы (6.7) при $\delta = 0,01$, $\nu = 0,6$. Жирными линиями обозначена сепаратриса для невозмущенного фазового портрета. Жирной точкой обозначена эллиптическая особая точка невозмущенной системы. (a) сечение Пуанкаре, иллюстрирующее появление области сильной нелинейности в окрестности стационарной эллиптической точки. Нелинейные резонансы подавляют параметрическую неустойчивость; (b) фазовая траектория в области, ограниченной нелинейным резонансом.

ности стационарной эллиптической точки, экспоненциально растет, демонстрируя действие параметрической неустойчивости (см. рис. 6.4b). Отметим, что в случае параметрической неустойчивости эллиптический вихрь может начать вытягиваться за пределы критического отношения осей. В этом случае в реальности будет наблюдаться разрушение вихря на более мелкие (в рассматриваемой модели такой возможности нет).

6.2. Совместное влияние хаотического и диффузионного переноса и перемешивания жидких частиц в окрестности эллипсоидального вихря

В предыдущем параграфе было показано, что динамика эволюции эллиптического и аналогично эллипсоидального вихря может быть хаотической при наличии нестационарного возмущения внешнего сдвигового потока. Хаотическая динамика в данном случае выражается в сильной чувствительности поведении вихря к малым возмущениям. Если в стационарном случае, вихрь может быть неподвижным, совершать колебания, вращаться или бесконечно вытягиваться, то в возмущенном состоянии, все эти режимы могут сменять друг друга.

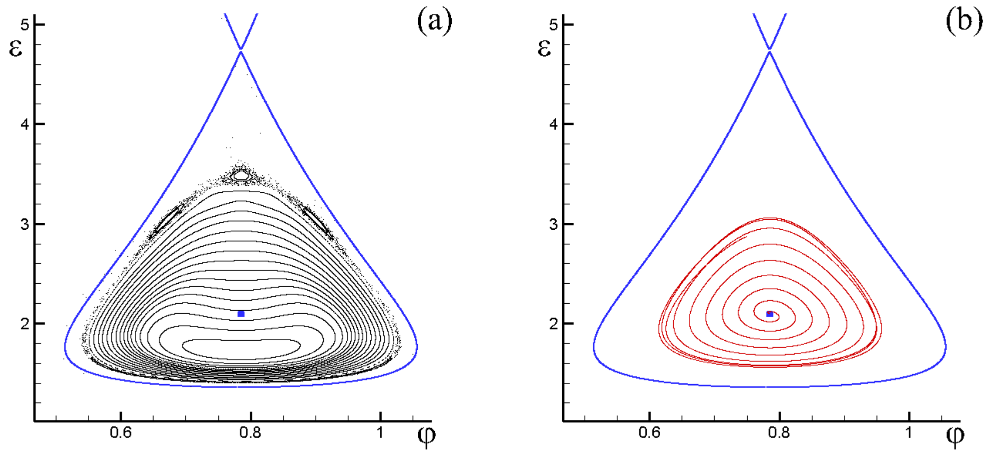

Рис. 6.4. Тоже, что и на рис. 6.4 за исключением частоты $\nu = 0,3$. (a) сечение Пуанкаре, демонстрирующее, что, в возмущенном случае, фазовый портрет в окрестности стационарной эллиптической точки остается аналогичным фазовому портрету линеаризованной системе; (b) неограниченная фазовая траектория, демонстрирующая действие параметрической неустойчивости.

Помимо динамики самого вихря, интерес представляет адвекция жидкости, индуцируемая колебаниями формы вихря в стационарном внешнем потоке. Так как эти колебания являются нестационарными, то жидкие частицы из непосредственной окрестности вихря будут испытывать нестационарное возмущение. В результате, часть из них будет подвержена хаотическому переносу. Демонстрация такого нерегулярного поведения жидких частиц из непосредственной окрестности эллиптического вихря была приведена в работе [214]. Данная работа, по-видимому, является одной из первых, в которой указывается на важную роль хаотической адвекции в моделях реальных геофизических потоков. В том же году, данную модель применили для описания эволюции устойчивого вихря в атмосфере Нептуна [215].

Важность данной концепции заключается в том, что когерентные вихри, содержащие в себе жидкость с отличными характеристиками, могут не только переносить эту жидкость на значительные расстояния, но и размешивать жидкость из своей непосредственной окрестности, но имеющую уже характеристики, совпадающими с фоновыми. В результате, размер области, подверженной влиянию вихря может увеличиваться в разы. При этом ядро вихря, отличающееся значением завихренности от фонового, может оставаться неизменной формы и размера.

Помимо двумерной модели эллиптического вихря, можно сформулировать аналогичную модель эллипсоидального вихря, эволюционирующего в бароклинной линейно-стратифицированной среде [451–454]. Модель будет удовлетворять условиям квази-геострофики. В рамках модели были рассмотрены различные задачи эволюции самого вихря и взаимодействия между такими вихрями [451–454, 474, 476, 558–562]. Здесь же будет рассматриваться перенос жидких частиц, индуцируемый эволюцией вихря.

Основное преимущество модели эллипсоидального вихря заключается в том, что форма границы вихря не меняется, все время оставаясь эллипсоидальной. Следовательно, чтобы рассчитать эволюцию такой формы, достаточно знать ориентацию вихря и отношение длин полуосей. Таким образом, в системе остается всего несколько степеней свободы вместо бесконечного числа, в случае полного учета динамики изменения формы границы. Такое упрощение приводит к тому, что множество процессов, заметно влияющих на эволюцию вихрей в океане, остаются за пределами рассмотрения. Одно из главных ограничений модели – невозможность жидким частицам пересечь границу вихря. То есть, жидкие частицы внутри ядра не перемешиваются с частицами из внешней области. А граница вихря, в таком случае, является непроницаемым барьером для переноса жидкости между ядром и внешним потоком [490, 563, 564]. Наличие таких непроницаемых барьеров в природе маловероятно, более того большинство барьеров не только проницаемые, но и изменяющиеся в пространстве и времени. Множество работ посвящено изучению эволюции барьеров в океане и атмосфере [38, 40, 41, 96, 548, 565, 566]. Однако в этих работах рассматриваются сложные поля скорости, полученные из реальных данных или из моделей циркуляции водоемов. Как следствие, становится очень сложно выделить конкретные процессы адвекции жидких частиц и диффузии для отдельного изучения. В этом случае на помощь приходят упрощенные модели когерентных вихрей, в которых влияние адвекции и диффузии можно контролировать.

В данном параграфе предлагается учесть мелкомасштабную диффузию в качестве процесса, который будет индуцировать перенос жидких частиц из ядра вихря во внешний поток и обратно. В результате, вихрь будет постепенно терять завихренную жидкость, что будет приводить к изменению его динамики. Однако в нашем случае планируется рассмотреть медленное изменение завихренности вихря без существенного изменения его динамики. Такая постановка интересна тем, что мезомасштабный вихрь в океане может существовать длительное время, при этом перемещаясь на значительные расстояния. Однако многие вихри в процессе движения разрушаются по причине потери некоторого количества завихренности [567, 568]. Данное наблюдение может означать, что поток завихренной жидкости из ядра вихря через границу не компенсируется потоком в обратном направлении. Примером мелкомасштабного процесса, приводящего к быстрому разрушению вихря является конвективная интрузия, которая может приводить к 15 процентному ускорению процесса распада когерентного вихря [569]. Влияние мелкомасштабных случайных возмущений на систему точечных вихрей рассматривается в работе [239].

Детальный вывод модели эллипсоидального вихря можно найти в работе [476]. Выпишем только основные выражение, которые понадобятся для дальнейшего изложения. Модель формируется со следующими приближениями – рассматривается бесконечно-глубокий неограниченный объем жидкости на f – плоскости с постоянной частотой плавучести $N = const$. Все рассматриваемые выражение уже выписаны в обезразмеренном виде, с использованием масштаба длины L^*, глубины H^*, масштаба скорости, U^*, масштаб частоты плавучести, N^*, масштаб времени, $T^* = \frac{L^*}{U^*}$ и масштаб функции тока $\Psi^* = U^* L^*$. Отсюда имеем закон сохранения потенциальной завихренности [314],

$$\frac{d_h}{dt} q = 0, \tag{6.13}$$

где $q = \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}$ – потенциальная завихренность, $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный лапласиан, $\frac{d_h}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$ – полная производная. Горизонтальные скорости u, v удовлетворяют геострофическим соотношениям

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{6.14}$$

ψ – геострофическая функция тока [314].

В данной упрощенной постановке потенциальная завихренность q является лагранжевым инвариантом, т.е. может рассматриваться в качестве пассивного скаляра. Тогда, можно ограничить некоторый объем жидкости с отличной завихренностью и исследовать эволюцию только этого объема. При наличии линейного горизонтального сдвига скорости, эллипсоид, как и эллипс в двумерной постановке, сохраняет свою форму. Пусть a, b, c – полуоси эллипсоида, φ – угол между полуосью a и осью абсцисс. Эллипсоид эволюционирует в горизонтальном линейном постоянном сдвиговом потоке, где e и γ – компоненты растяжение и вращение внешнего потока. Тогда эволюция полуосей и угла ориентации эллипсоида описывается уравнениями [454],

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= ae\cos(2\varphi), \quad \frac{db}{dt} = -be\cos(2\varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \Omega + \gamma - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} e \sin(2\varphi), \end{aligned} \tag{6.15}$$

где

$$\Omega = \sigma ab\tilde{c} \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)\sqrt{\xi(\mu)}} \tag{6.16}$$

является частотой собственного вращения без внешнего потока, $\tilde{c} = \frac{N}{f} c$, $\xi(\mu) = (a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)$, $N = const$ – частота плавучести, $f = const$ – параметр Кориолиса, $\sigma = g - \gamma$, $g = const \neq 0$ – постоянная завихренность внутри эллипсоида.

Как и в случае эллиптического вихря, эллипсоид может быть неподвижным, колебаться вокруг оси сдвига, вращаться и бесконечно вытягиваться [453]. Далее будем рассматривать только периодическое вращение и его влияние на перенос жидких частиц, индуцируемый изменением длины осей вихря и его ориентации. Режим, в котором, характеристики вихря меняются в колебательном режиме, с точки зрения влияния диффузии аналогичен.

Система уравнений, описывающая динамику жидких частиц имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= ex - \gamma y + \cos\varphi \tilde{v} + \sin\varphi \tilde{u}, \\ v &= \gamma x - ey + \sin\varphi \tilde{v} - \cos\varphi \tilde{u}, \end{aligned} \tag{6.17}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -\sigma ab\tilde{c} \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{\tilde{y} d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{\xi(\mu)}}, \\ \tilde{v} &= \sigma ab\tilde{c} \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{\tilde{x} d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{\xi(\mu)}}, \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ \tilde{y} &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Параметр λ определяет находится ли жидкая частица внутри вихря или снаружи. Для частиц внутри вихря $\lambda = 0$, для частиц из окрестности выбирают положительный корень $\lambda > 0$ уравнения $\frac{\tilde{x}^2}{a^2+\lambda} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2+\lambda} + \frac{\left(\frac{N}{f}z\right)^2}{\tilde{c}^2+\lambda} = 1$.

С помощью (6.17) и (6.15) определяются траектории жидких частиц внутри и вне эллипсоида. Так как длины осей вихря меняются периодически (при этом форма эллипсоида не нарушается), то эти периодические изменения возмущают движение жидких частиц снаружи вихря.

Система динамических уравнений (6.17) обладает полутора степенями свободы [353, 354], где дополнительные полстепени вносятся в систему за счет периодических колебаний полуосей эллипсоида. В результате, данное возмущение приводит к тому, что часть траекторий жидких частиц из окрестности вихря становятся хаотическими. В данной главе будем рассматривать перенос жидких частиц только на поверхности жидкости $z = 0$. Выберем следующие значения параметров для системы (6.17) $e = 0,1$, $\tilde{c} = 1$, $\gamma = 0$. На рис. 6.5 представлен типичный портрет линий тока стационарной системы (т.е., длины полуосей и ориентация вихря не меняются) (6.17).

Система (6.17) стационарна в том случае, когда вихрь остается неподвижным, и, как следствие, не меняет длин полуосей и ориентации. Начальные значения отношения длин

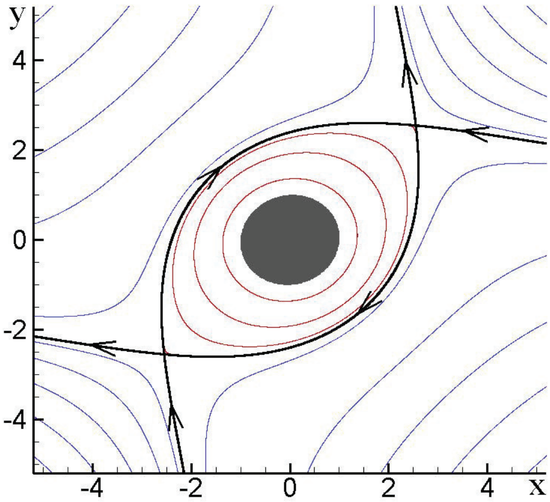

Рис. 6.5. Фазовый портрет стационарной системы (6.17) при $e = 0.1$, $\gamma = 0$, $\frac{a(0)}{b(0)} = 1.0551$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$. Черная жирная кривая – сепаратриса, отделяющая область рециркуляции и внешнее гиперболическое течение

полуосей и угла ориентации в этом случае равны $\frac{a(0)}{b(0)} = 1.0551$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$. Когда $e > \gamma$, внешний поток является гиперболическим (рис. 6.5), но в непосредственной окрестности вихря появляется зона рециркуляции, ограниченная сепаратрисой(рис. 6.5). Когда $e < \gamma$ и знаки завихренности потока и вихря не совпадают, то возникает более сложная структура стационарного течения [7].

Динамика системы (6.17) остается регулярной, т.е. траектории жидких частиц совпадают с линиями тока с рис. 6.5, только если вихрь неподвижен. Это достигается только для единственного набора начальных условий $a(0)$, $b(0)$, $\varphi(0)$. В общем же случае для произвольных начальных условий, вихрь либо колеблется, либо вращается, либо вытягивается. Далее будем рассматривать периодические режимы, при которых появляется периодическое возмущение движения жидких частиц.

На рис. 6.6 изображено сечение Пуанкаре возмущенной системы (6.17) при $\frac{a(0)}{b(0)} = 2$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$, остальные параметры такие же, как и для рис. 6.5. Для построения сечения Пуанкаре, необходимо определить период возмущения. В данном случае период возмущения – это период вращения или колебания вихря. Для данных начальных значений период возмущения равен $T = 1.89166$. Далее, данный период будет рассматриваться в качестве характерного масштаба времени при эволюции вихря. Данный случай будем называть – возмущенным, в отличии от невозмущенного, изображенного на рис. 6.5 .

На сечениях Пуанкаре, как и раньше, области, занятые замкнутыми орбитами, явля-

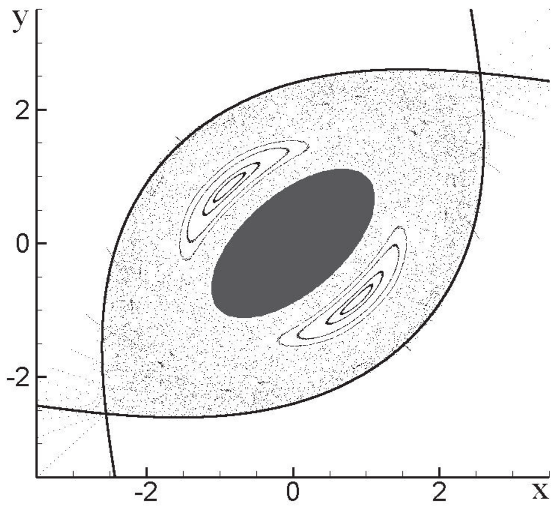

Рис. 6.6. Сечение Пуанкаре системы (6.17) при $\frac{a(0)}{b(0)} = 2$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$ для параметров с рис. 6.5. Жирная линия соответствует сепаратрисе невозмущенной системы.

ются областями регулярного движения жидких частиц, области, занятые беспорядочными точками, соответствуют областям с нерегулярным (хаотическим) поведением. На рисунке хорошо видны две области регулярного движения по бокам вихря, соответствующие появлению нелинейных резонансов [172, 173, 549].

Следует отметить, что траектории жидких частиц внутри самого вихря (серая область на рисунках) всегда остаются регулярными и не могут пересекать границу вихря. Для того, чтобы такие пересечения имели место далее добавим мелкомасштабную диффузию в систему. Проанализируем влияние диффузии на динамику жидких частиц в невозмущенном и возмущенном случаях.

6.2.1. Влияние горизонтальных компонент диффузии на скорость выноса жидких частиц из ядра эллипсоидального вихря

Введем в систему мелкомасштабную диффузию. Для этого рассмотрим движение пассивного скаляра в заданном поле скорости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) q(\mathbf{r}, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} q(\mathbf{r}, t), \\ &q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{6.20}$$

где $q(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ – скалярное поле концентрации пассивных частиц и κ – коэффициент диффузии. Выражения (6.20) записаны в безразмерной форме.

Введем вспомогательное скалярное поле $\tilde{q}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$, которое описывается следующим стохастическим уравнением,

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}(\mathbf{r},\mathbf{t})\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\tilde{q}(\mathbf{r},\mathbf{t})=-\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{r},\mathbf{t}),
$$
$$
\tilde{q}(\mathbf{r},\mathbf{0})=\mathbf{q_0}(\mathbf{r}), \qquad (6.21)
$$

где $\boldsymbol{\alpha}(t)$ – дельта-коррелированный векторный случай гауссов процесс, не зависимый от $\mathbf{U}(\mathbf{r},\mathbf{t})$ с параметрами

$$
\langle\boldsymbol{\alpha}(t)\rangle=\mathbf{0},\ \ \langle\alpha_i(t)\alpha_j(t')\rangle=2\kappa\delta_{ij}\delta(t-t'),\ \ i,j=1,2, \qquad (6.22)
$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\delta\left(t\right)$ – дельта-функция Дирака и t,t' – два последовательных момента времени.

Решение (6.20) соответствует усредненному решению [570, 571] (6.21) по ансамблю реализаций $\boldsymbol{\alpha}\left(t\right)$, так что

$$
q(\mathbf{r},t)=\langle\tilde{q}(\mathbf{r},t)\rangle_{\boldsymbol{\alpha}}. \qquad (6.23)
$$

Выражение (6.23) представляет собой решение уравнения (6.20) в форме континуального интеграла [570, 572, 573]. Отсюда следует, что в усредненном смысле решение уравнения (6.21) эквиваленты решениям уравнения (6.20). С учетом (6.21), получаем

$$
\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\mathbf{U}(\mathbf{r}(t),t)+\boldsymbol{\alpha}(t),\ \ \mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0,
$$
$$
\frac{d}{dt}\tilde{q}(\mathbf{r}(t),t)=0,\ \ \tilde{q}(0)=q_0(\mathbf{r}_0). \qquad (6.24)
$$

Выражения (6.24) соответствуют выражениям (6.17), причем $\mathbf{U}\left(\mathbf{r}\left(\mathbf{t}\right),\ \mathbf{t}\right)$ – член в правой части уравнения (6.17) и $\boldsymbol{\alpha}\left(t\right)$ – диффузионный член. Далее, с помощью метода Монте-Карло, учтем диффузионный процесс вдоль каждой траектории жидкой частицы внутри и вне эллипсоидального вихря.

6.2.2. Горизонтальный перенос, индуцированный диффузией

Рассмотрим сначала стационарную систему, т.е. длины полуосей и ориентация вихря не меняются. Распределим равномерно внутри вихря $\sim 10^3$ пассивных скаляров и дальше 10^3 раз проследим за эволюцией ансамбля частиц для реализаций случайного процесса $\boldsymbol{\alpha}\left(t\right)$. На рис. 6.7 представлены поля концентрации для указанных времен для коэффициента диффузии $\kappa=10^{-2}$ и параметров модели, как на рис. 6.5. Жирная линия – граница стационарного вихря. Видно, что концентрация скаляров переносится через границу вихря за счет диффузии (см. рис. 6.7а для времени $T/4$, где $T=1,89166$ – характерный масштаб вращения внутри вихря). Поле концентрации внутри вихря испытывает незначительные изменения

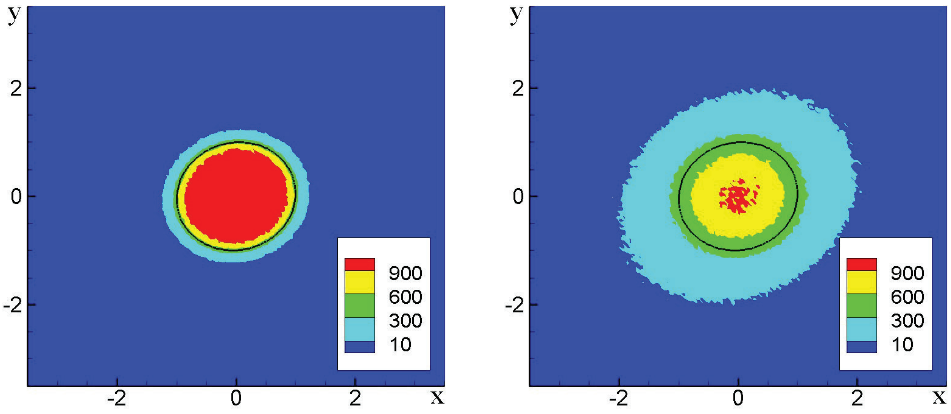

Рис. 6.7. Поле концентрации скаляров указанное время для $\kappa = 10^{-2}$ и параметров, как на рис. 6.5. Жирная кривая – граница вихря, соответствующая начальному распределению скаляров. Цвет показывает концентрацию маркеров. Слева направо: $T/4$, $5 \cdot T$.

из-за диффузии, практически сохраняя начальную концентрацию. Так как в системе нет стоков и источников, то концентрация медленно падает внутри вихря, а скаляры переносятся во внешнюю область (6.7b для времени $5 \cdot T$). Следовательно, в стационарном случае, концентрация скаляров подчиняется нормальному закону.

На рис. 6.8 приведены кривые плотности вероятности, как функции от значений длины полуоси a, через которые задаются эллиптические области равной площади. Другими словами, на рис. 6.8 приведены значения доли скаляров, находящихся внутри эллиптических колец равной площади ΔS в конкретный момент. Каждое из колец является представителем семейства эллипсов с отношением полуосей $\frac{a(0)}{b(0)} = 1,0551$. Число маркеров на кривых нормализованно на общее количество маркеров $\sim 10^6$ и на постоянную площадь эллиптических колец $\Delta S = 0,15$. Кривые указывают на то, что распространение маркеров происходит в соответствии с нормальным законом распределения, как внутри, так и вне самого вихря. Для подтверждения того, что моделируемый стохастический процесс не зависит от численных ошибок, посчитаем аналогичные распределения для шага интегрирования 10^{-4}. Относительная ошибка при этом равняется $0,00488$, т.е. численные ошибки не вносят существенных особенностей.

Теперь рассмотрим возмущенный случай, когда граница вихря изменяет свое положение в пространстве, что приводит к нерегулярному переносу жидких частиц в окрестности вихря.

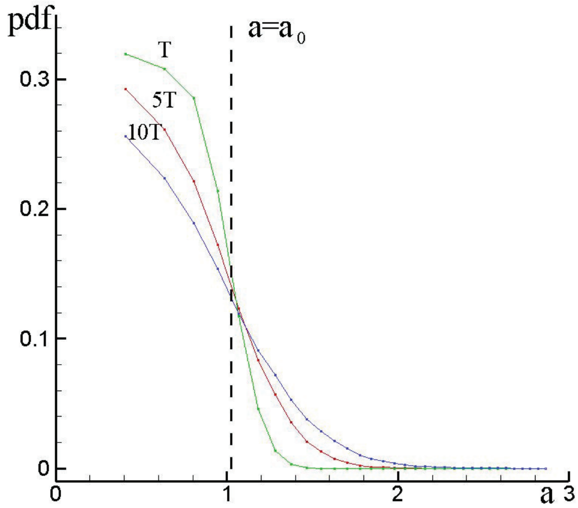

Рис. 6.8. Плотность вероятности, как функция длины главной полуоси эллипсов a в стационарном случае. Кривые соответствует плотности вероятности для разных временных интервалов. Вертикальная пунктирная линия соответствует границе вихря.

6.2.3. Перемешивание жидких частиц, индуцируемое диффузией в возмущенном случае

В данном параграфе рассмотрим влияние диффузии на перемешивание жидких частиц в возмущенном случае, т.е. тогда, когда изменение длин полуосей вихря приводит к экспоненциальной расходимости траекторий жидких частиц в его окрестности. В качестве начальных условий выберем $\frac{a(0)}{b(0)} = 2$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$ (как на рис. 6.6). Для этих начальных положений вихрь вращается при этом периодически изменяются длины его полуосей. В отличии от стационарного случая, динамика жидких частиц возмущается и становится хаотической. В то же время, внутри вихря жидкие частицы так же, как и в стационарном случае, двигаются регулярно.

На рис. 6.9a,b,c,d приведены поля концентрации для моментов времени:$(T/4)$, $5/4 \cdot T$, $2 \cdot T$, $5 \cdot T$, где T – период вращения вихря.

Укажем на некоторые особенности, видные на рис. 6.9. Во-первых, так как движение внутри вихря всегда регулярно, то и маркеры под воздействием диффузии распространяются по нормальному распределению, так же, как и в стационарном случае. Однако вне области вихря закон распределения отличается от нормального из-за нерегулярного переноса. Для подтверждения результата на рис. 6.10 приведены плотности вероятности для эллиптических колец при $\frac{a(0)}{b(0)} = 2$. В соответствии с рис. 6.10 внутри вихря получаем нормальное распределение (слева от пунктирной вертикальной линии), но вне вихря закон распределения перестает

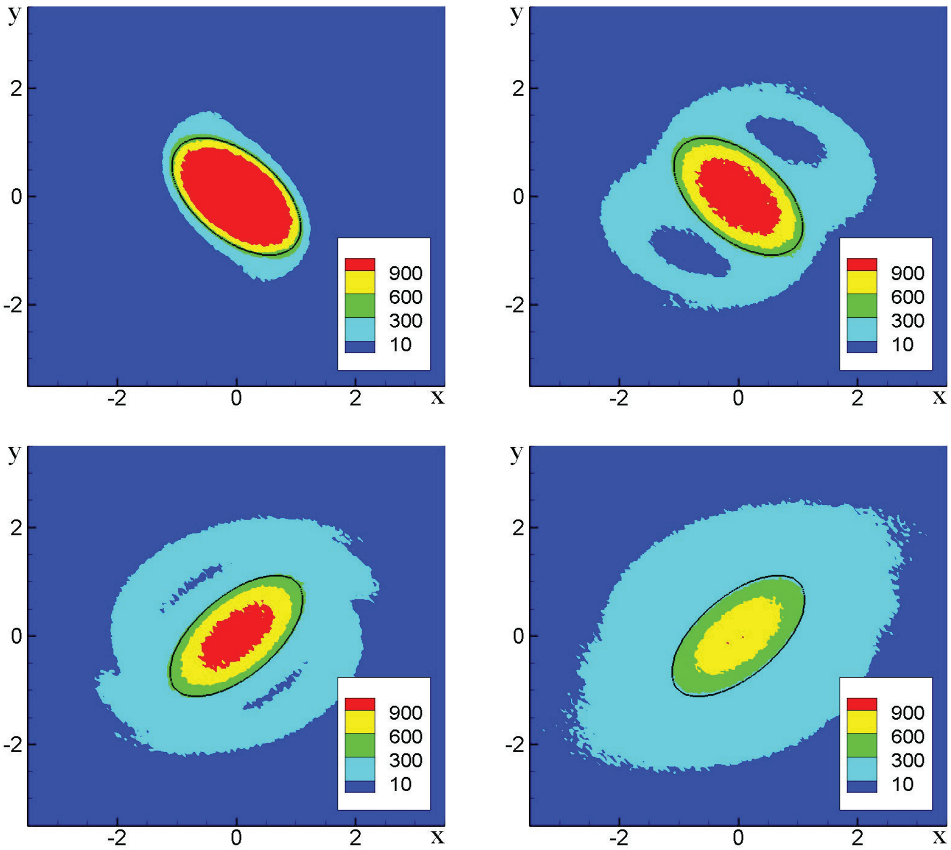

Рис. 6.9. Поле концентрации скаляров для $\kappa = 10^{-2}$ для параметров, как на рис. 6.6a. Жирная линия – граница вихря, соответствующая начальному распределению маркеров. Концентрация маркеров обозначена цветом. Слева направо: $T/4$, $5/4 \cdot T$, $2 \cdot T$, $5 \cdot T$.

быть нормальным.

По-видимому, закон распределения вне вихря должен быть степенным [574, 575]. Разница между возмущенным и невозмущенным случаем, грубо говоря, заключается в следующем. В стационарном случае вероятность перехода жидкой частицы с одной траектории на другую за счет диффузии равна вероятности совершить обратный переход. Так как близкие траектории остаются близкими все время. В возмущенном случае, за счет экспоненциальной расходимости, близкие траектории могут расходится на значительные расстояния, и, поэтому, вероятность перейти с одной траектории на другую не равна вероятности совершить обратный переход.

Сравнивая рис. 6.7b и рис. 6.9d, которые соответствуют одинаковому времени интегрирования, видно, что в возмущенном случае распространение маркеров осуществляется быстрее. В возмущенном случае концентрация внутри вихря намного меньше, чем в невозмущенном. Учитывая, что длина границы вихря является постоянной величиной в обоих случаях, пропускная способность границы так же одинакова. Можно сделать вывод, что разница в скоро-

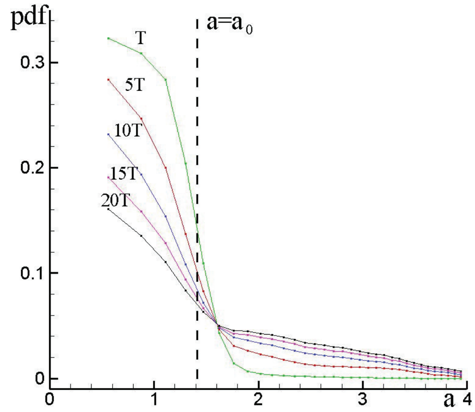

Рис. 6.10. Плотность вероятности, как функция от длины полуоси a в возмущенном случае. Кривые соответствуют разным моментам времени. Вертикальная пунктирная линия указывает на границу вихря.

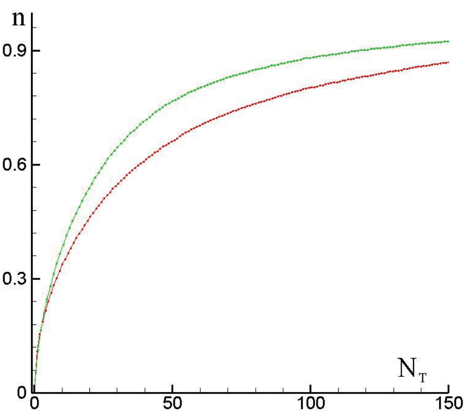

Рис. 6.11. Доля маркеров, находящихся вне области вихря во время $N_T \cdot T$. Зеленая и красная кривая соответствуют возмущенному и невозмущенному случаю.

сти переноса скаляров из вихря в его окрестность обусловлена исключительно хаотической динамикой в возмущенном случае. То есть, в стационарном случае, если маркер покидает область вихря, то он имеет ту же вероятность вернуться обратно в следующий момент времени, однако, в возмущенном случае, вероятность маркеру покинуть вихрь выше, чем вероятность вернуться в него обратно. На рис. 6.11 приведена доля маркеров, находящихся вне вихря во время N_T. Зеленая и красная кривая соответствуют возмущенному и невозмущенному случаю. Видно, что потеря маркеров вихрем происходит значительно быстрее в возмущенном случае. Отметим работу [288], в которой также указывается на значительное усиление дисперсии пассивных частиц в кинематической модели цепочки вихрей, при одновременном воздействии молекулярной диффузии и хаотической адвекции.

В завершение параграфа рассмотрим применимость модельных оценок к реальным океаническим потокам. В реальных условиях существует значительная проблема определения коэффициента диффузии K [576–578], тем не менее, грубые оценки показывают, что $K(l) \sim l^{4/3}$, где l – соответствующий масштаб диффузионного влияния. Безразмерный параметр κ соответствует размерному K следующим образом $K \sim U^* L^* \kappa$, где U^* и L^* – характерные скоростные и пространственные масштабы явления. Так как динамические уравнения для эллипсоидального вихря построены в рамках квази-геострофики, но такая модель может быть применима для анализа мезомасштабных вихрей. Тогда, выберем характерные значения частоты плавучести, параметра Кориолиса, полной глубины $N = 2 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$, $f = 10^{-4}$ с$^{-1}$, $H = 4 \cdot 10^4$ м, скорости $U^* = 0.1$ м/с, линейного масштаба $L^* = 10^5$ м и $\kappa = 10^{-2}$. Получим оценку $K \sim 10^2$ м^2/с, что в соответствии с [579] характеризует диффузионный масштаб $l \sim 10^3$ м.

6.3. Учет вертикальной компоненты диффузии

В предыдущем параграфе в модель эллипсоидального вихря была введена горизонтальная диффузия, за счет которой осуществлялся перенос жидких частиц через границу вихря [15]. В данном параграфе развивается данная модель за счет добавления вертикальной компоненты диффузии, что приведет к появлению вертикального перемешивания. Далее, анализируется совместное влияние компонент диффузии и горизонтальной адвекции [575, 580–583].

Без диффузии в модели запрещены вертикальные движения, частицы все время находятся на одном и том же горизонте. За счет наличия вертикальной компоненты диффузии, можно индуцировать переход частиц с одного горизонта на другой, что в свою очередь повлияет на горизонтальное перемешивание в модели.

Так как учитываются горизонтальные и вертикальная компоненты диффузии, необходимо задать соотношение между этими компонентами в связи с тем, что вертикальный масштаб скорости, как минимум, на порядок меньше горизонтального. Пусть N – частота плавучести и f – параметр Кориолиса. Горизонтальный масштаб больше вертикально в N/f раз. Далее примем значение 20, что будет соответствовать средним широтам [576, 579] (в зависимости от региона и принятых допущений, значение коэффициента диффузии может изменяться в очень широких пределах от 10^{-6} до 10^{-1}). Отсюда нормализуем вертикальный коэффициент диффузии $\kappa_z = 10^{-1}\frac{N}{f}\kappa = 2\kappa$, где κ – коэффициент горизонтальной диффузии. Другими словами, несмотря на то, что вертикальная компонента диффузии на порядки меньше горизонтальной, ее влияние на перемешивание может оказаться сравнимым с горизонтальной

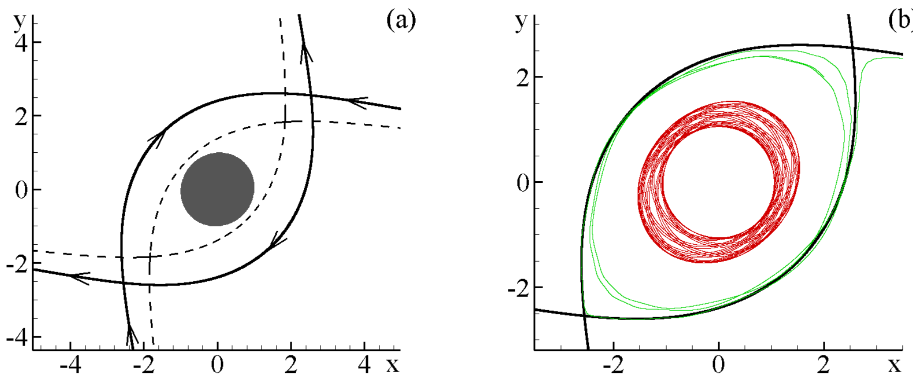

Рис. 6.12. (a) линии тока на поверхности, ограниченные сепаратрисой (жирная линия). Пунктирная линия – сепаратриса на глубине $z = 1,5$. (b) две траектории возмущенной системы. Квазипериодическая траектория в окретсности вихря – регулярная. Незамкнутая траектория около стационарной сепаратрисы – хаотическая.

компонентой. Действительно, с учетом того, что вертикальные размеры вихрей так же, минимум на порядок, меньше горизонтальных, жидкая частица за счет диффузии может покинуть область вихря даже быстрее в вертикальном направлении, чем в горизонтальном.

Стационарная конфигурация, как и прежде, достигается для начальных условий $\frac{a(0)}{b(0)} = 1,0551$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$. На рис. 6.12a приведены линии тока на поверхности, ограниченные сепаратрисой (жирная линия). Пунктирная линия – сепаратриса на глубине $z = 1,5$ показывает, что замкнутая область рециркуляции распространяется на глубины, значительно большие, чем вертикальная полуось эллипсоида ($c = 1$).

На рис. 6.12b представлены две траектории жидких частиц в нестационарном случае при $\frac{a(0)}{b(0)} = 2$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$. Траектория, которая находится возле вихря – регулярна и совершает квази-периодические колебания в ограниченной области. Траектория, которая двигается в окрестности стационарной сепаратрисы – хаотическая и после нескольких оборотов вокруг вихря выходит во внешнюю гиперболическую область. Траектория, стартовавшая в хаотической области, так же может совершать и большое количество оборотов вокруг вихря, однако она всегда выйдет во внешнюю гиперболическую область со временем.

На рис. 6.13 изображены сечения Пуанкаре, выводимые через период колебаний вихря, на поверхности $z = 0$ (рис. 6.13a) и на горизонте $z = 1,5$ (рис. 6.13b). Видно, что структура возмущенного фазового портрета значительно изменяется с глубиной. Причиной этого служит то, что на каждом горизонте возмущение от колебаний вихря изменяется. В результате различные параметры возмущения приводят к различным возмущенным конфигурациям. В

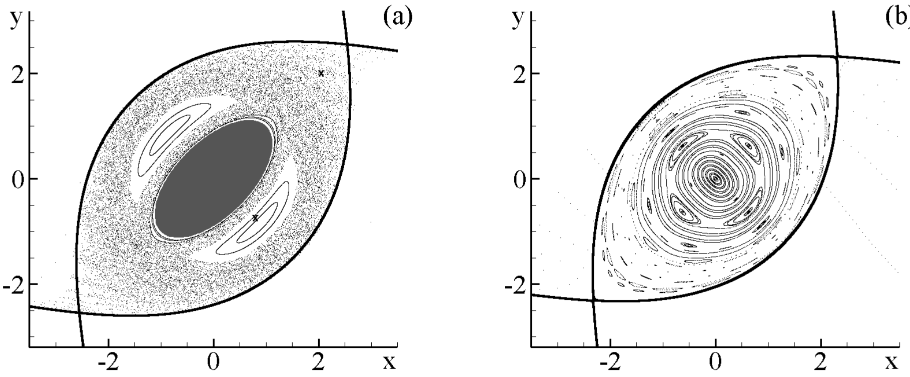

Рис. 6.13. сечения Пуанкаре возмущенной системы. (a) $z = 0$, (b) $z = 1.5$. Жирные линии – сепаратрисы невозмущенного фазового портрета с рис. 6.12a. Крестами обозначены начальные положения траекторий с рис. 6.12b.

то же время структура возмущенной конфигурации меняется непрерывно с глубиной. Данное наблюдение демонстрирует рис. 6.14. Рисунки 6.14a,b,c соответствуют горизонтам $z = 0,95$, $z = 1$, $z = 1,05$, соответственно.

Далее добавим диффузионное влияние так же, как и в предыдущем параграфе. Тогда уравнения движения жидких частиц, подверженных влиянию вихря и диффузии, имеют вид

$$\begin{aligned} u &= ex - \gamma y + \tilde{u}\cos\theta - \tilde{v}\sin\theta + \alpha_x, \\ v &= \gamma x - ey + \tilde{u}\sin\theta + \tilde{v}\cos\theta + \alpha_y, \\ w &= \alpha_z, \end{aligned} \tag{6.25}$$

где α_x, α_y соответствуют горизонтальному коэффициенту диффузии κ, а α_z соответствует вертикальному компоненту диффузии κ_z.

6.3.1. Дисперсия скаляров, индуцируемая диффузией

Распределим $\sim 6 \cdot 10^3$ маркеров внутри эллипсоида следующим образом. Рассмотрим 7 вертикальных слоев, в каждом из которых маркеры распределены равномерно. Далее, будем отслеживать траектории маркеров на протяжении ~ 20 периодов оборота эллипсоида с включенными горизонтальной и вертикальной компонентой диффузии. Проводим данную процедуру $6 \cdot 10^3$ реализаций для случайного процесса $\boldsymbol{\alpha}(t)$, чтобы сгладить результирующее поле скаляров. Далее сравниваем полученные результаты с результатами прошлого параграфа, где учтена только горизонтальная компонента диффузии.

Сначала рассмотрим стационарный случай, т.е. эллипсоид не меняет своего положения

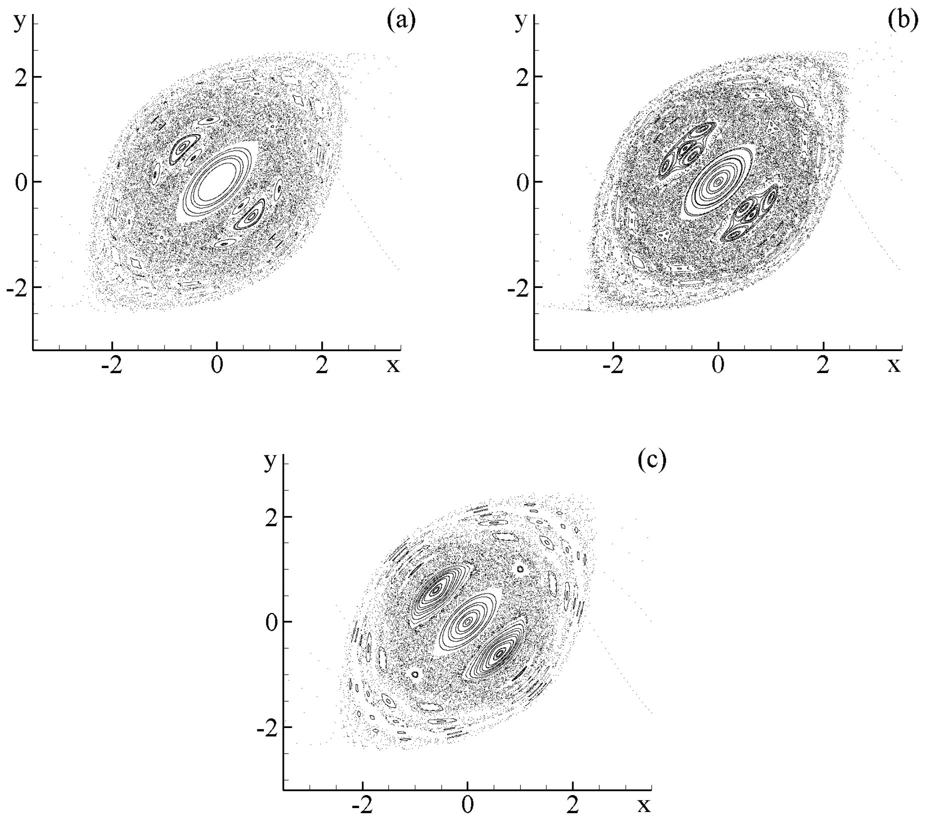

Рис. 6.14. Непрерывное изменение структуры сечений Пуанкаре с глубиной. (a) $z = 0,95$, (b) $z = \tilde{c} = 1$ – крайняя точка эллипсоида в вертикальном направлении, (c) $z = 1,05$.

(рис. 6.12a при $a(0)/b(0) = 1,0551$, $\varphi(0) = \pi/4$). В данном случае, нет возмущения динамики жидких частиц и они двигаются строго по линиям тока. За счет добавления диффузии, частицы получают возможность переходить с одной линии тока на другую.

На рис. 6.15 изображено поле концентрации после 40 временных интервалов, когда коэффициент горизонтальной диффузии $\kappa = 0.01$, а вертикальной $\kappa_z = 2\kappa$. Начальная концентрация совпадает с количеством реализаций случайного процесса и равна $6 \cdot 10^3$. На рис. 6.15a изображен поверхностный слой $z = 0$, на рис. 6.15b изображен слой, содержащий в себе крайнюю точку эллипсоида $z = \tilde{c} = 1$. Из-за наличия вертикальной компоненты диффузии, максимальное значение концентрации изменяется со временем по глубине. Большая концентрация наблюдается вне вихря (рис. 6.15b) по сравнению с концентрацией на поверхности (рис. 6.15a).

На рис. 6.15c,d изображены аналогичные поля концентрации маркеров при отключенной вертикальной компоненте диффузии, т.е. $\kappa_z = 0$. На рис. 6.15c изображен поверхностный слой $z = 0$, на рис. 6.15d – слой, содержащий крайнюю точку эллипсоида. Так как частицы теперь двигаются только в горизонтальном направлении, количество маркеров в поверхностном слое значительно больше (1150), чем в слое, содержащем крайнюю точку эллипсоида(216).

Теперь перейдем к рассмотрению возмущенной конфигурации, т.е. у эллипсоида меняется длина горизонтальных полуосей и ориентация. Из-за изменяющейся длины горизонтальных полуосей, жидкие частицы хаотически переносятся в окрестности вихря. На рис. 6.13 приведен пример возмущенной конфигурации при $a(0)/b(0) = 2$, $\varphi(0) = \pi/4$. По мере вращения эллипсоида, фазовое пространство периодически сжимается и растягивается. Поэтому, будем рассматривать эволюцию маркеров только в моменты одинаковой фазы. Эллипсоид возвращается в свое исходное положение за время $T_r = 1,89165$. Тогда 40 временных интервалов равно $21 \cdot T_r$. На рис. 6.16 приведены поля концентрации через данный интервал. Последовательность рисунков такая же, как и на рис. 6.15.

Как видно из рисунков, возмущенный случай приводит к значительному увеличению дисперсии поля концентрации, так как наряду с диффузией в системе появляется хаотический перенос. Как и в стационарном случае, максимум концентрации сдвигается в вертикальном направлении.

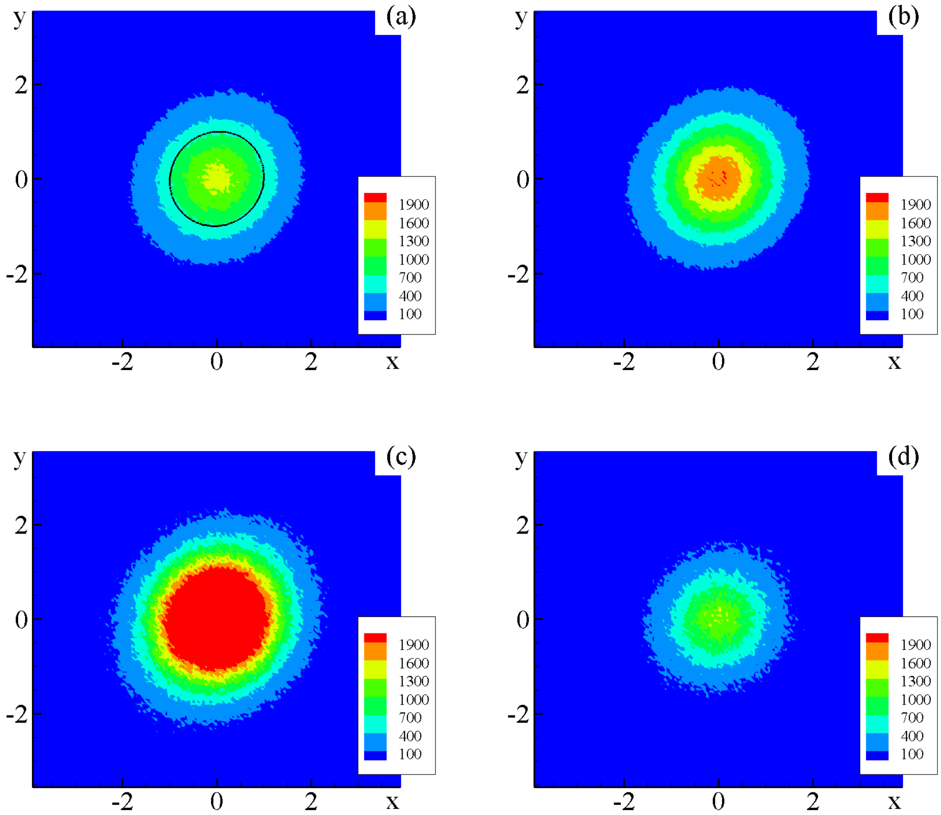

Рис. 6.15. Стационарный случай при $a(0)/b(0) = 1,0551$, $\varphi(0) = \pi/4$. Распределение маркеров после 40 временных интервалов с начальной концентрацией $6 \cdot 10^3$ в каждом узле, горизонтальный коэффициент диффузии $\kappa = 0,01$. (a) $\kappa_z = 2\kappa$ – поверхностный слой $z = 0$, жирной кривой обозначена граница вихря, (b) $\kappa_z = 2\kappa$ – слой, содержащий крайнюю точку вихря, т.е. $z = \tilde{c} = 1$; (c),(d) – то же, что и на (a),(b), но без вертикальной диффузии, $\kappa_z = 0$.

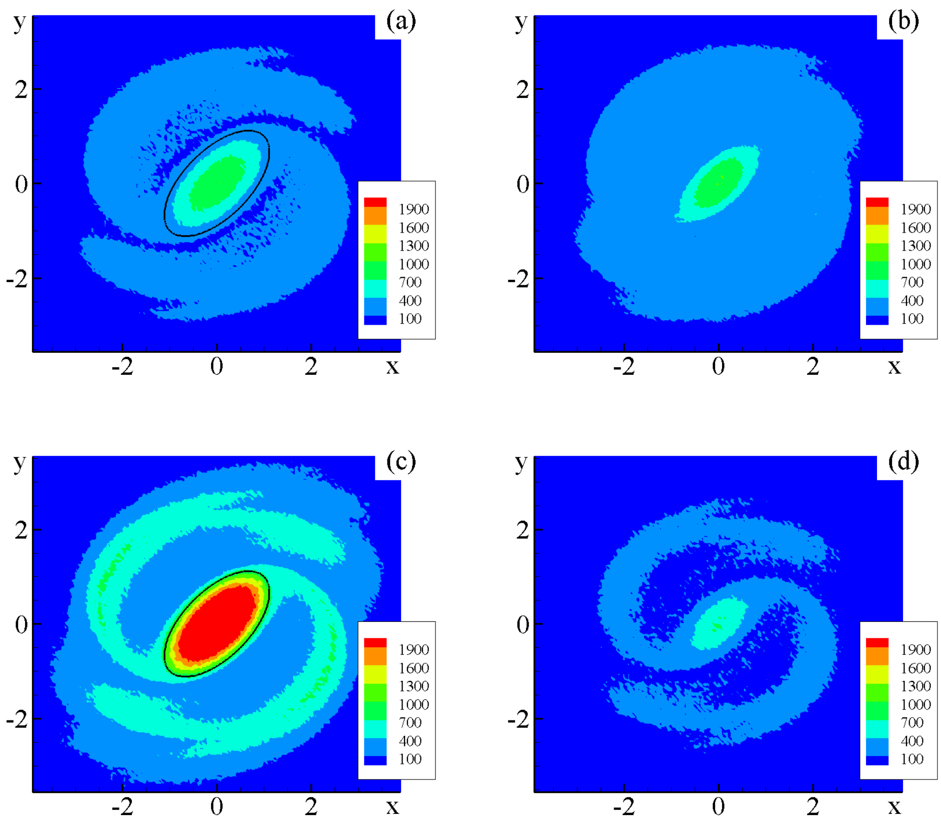

Рис. 6.16. Возмущенный случай при $a(0)/b(0) = 2$, $\varphi(0) = \pi/4$. Распределение маркеров после 40 временных интервалов с начальной концентрацией $6 \cdot 10^6$ в каждом узле, $\kappa = 0,01$. (a) $\kappa_z = 2\kappa$ – поверхностный слой при $z = 0$, жирная линия указывает на положение границы вихря, (b) $\kappa_z = 2\kappa$ – слой, содержащий крайнюю точку вихря при $z = \tilde{c} = 1$; (c),(d) – то же, что и на (a),(b), но без вертикальной диффузии, $\kappa_z = 0$.

6.3.2. Плотность вероятности и дисперсия

Проанализируем подробно эволюцию поля концентрации в пространстве и времени. Будем использовать следующую численную характеристику. Разделим наше пространство на эллипсоидальные кольца равного объема и одинаковой эллиптичности ($1,0551$ в стационарном случае и 2 в возмущенном) и далее будем рассчитывать количество маркеров, попадающих в данные кольца. В результате получим аналог непрерывной плотности вероятности, показывающий изменение концентрации в пространстве. Дискретный аналог плотности вероятности будет иметь вид:

$$p = \frac{N_{\Delta V}}{N}, \tag{6.26}$$

где $N_{\Delta V}$ – количество маркеров в эллипсоидальном кольце объема ΔV, N – полное количество маркеров в объеме V. Масштабирование величины (6.26) зависит от объема ΔV, но, в то же время, не влияет на форму кривых плотности вероятности. Поэтому далее не учитывается. Выбираем достаточно малую величину ΔV, чтобы получить искомый эффект. Изменение ΔV приводит исключительно к масштабированию кривых вдоль оси ординат, в то же время все особенности будут сохраняться. Изначально внутри эллипсоида мы имеем $p = 0,2$, так как ΔV равна $1/5$ от начального объема, и $p = 0$ вне эллипсоида.

На рис. 6.17 изображены полученные кривые плотности вероятности. Рисунки 6.17a,b соответствуют стационарному случаю при наличии вертикального компонента диффузии и без него, соответственно. Аналогично, рис. 6.17c,d соответствуют возмущенному случаю с вертикальной компонентой диффузии и без нее. Каждый рисунок содержит 4 кривых, соответствующих 10, 20, 30, 40 временным интервалам. На рисунках, соответствующих стационарной конфигурации отчетливо виден нормальный закон распределения, тогда как на рисунках, соответствующих возмущенному случаю, кривые имеют иную форму.

И в возмущенном и в невозмущенном случаях учет вертикальной компоненты диффузии приводит к интенсификации переноса жидких частиц через границу вихря, и насыщению внешнего потока. В возмущенному случае, наряду с диффузией появляется хаотический перенос, который способствует увеличению потока через границу вихря и приводит к отличному от нормального распределению концентрации маркеров в области, где появляется хаотический перенос. Помимо интенсификации в вертикальном направлении за счет диффузии, появляется дополнительный эффект. Так как каждое горизонтальное сечение эллипсоида уменьшается в площади с глубиной, маркер, стартовавший внутри эллипсоида может погрузиться глубже сразу же во внешний поток, где он будет подвержен хаотическому переносу. Это приводит к уменьшению вероятности возвращения маркера внутрь области начального

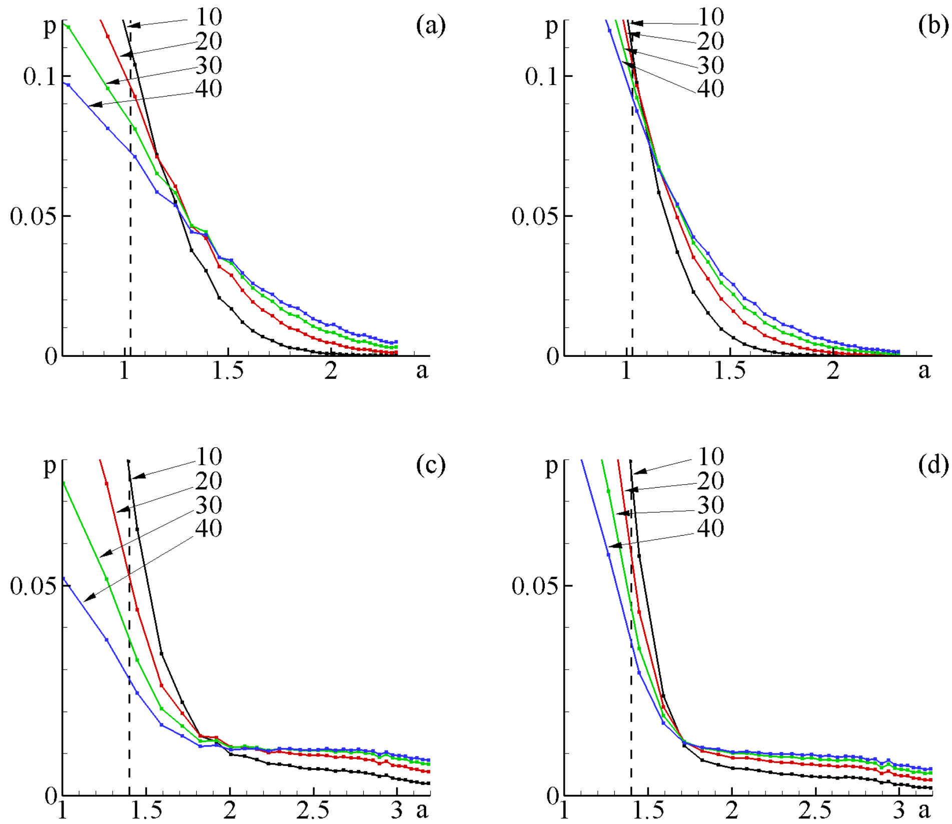

Рис. 6.17. Плотность вероятности p как функция длины главной полуоси эллипсоида a. Изначально $p = 0,2$ внутри эллипсоида, и $p = 0$ вне эллипсоида. Вертикальная линия указывает на границу вихря. 4 кривых на каждом рисунке соответствуют указанным временным интервалам. (a) стационарный случай с горизонтальной и вертикальной компонентами диффузии; (b) стационарный случай с горизонтальной, но без вертикальной компонент диффузии; (c) возмущенный случай с горизонтальной и вертикальной компонентами диффузии; (d) возмущенный случай с горизонтальной, но без вертикальной компонент диффузии.

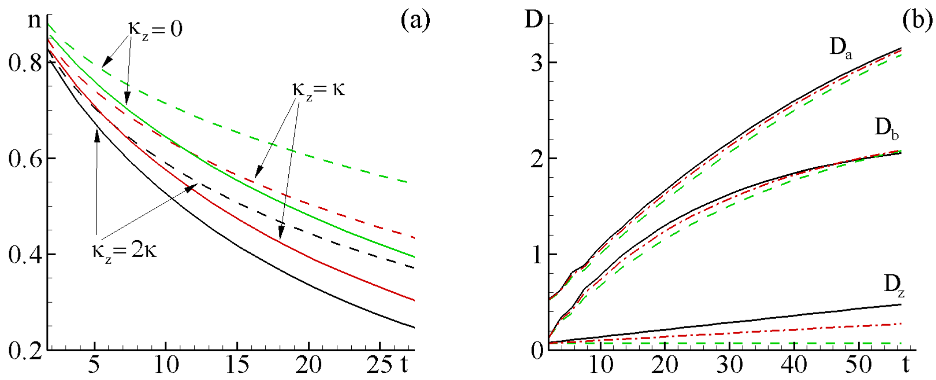

Рис. 6.18. (a) доля маркеров внутри эллипсоида в зависимости о времени. Пунктирная линия соответствует стационарному случаю, сплошная – возмущенный случай. (b) компоненты дисперсии вдоль оси эллипсоида a. Сплошная линия – $\kappa_z = 2\kappa$, штрихпунктирная – $\kappa_z = \kappa$, пунктирная – без вертикальной компоненты диффузии $\kappa_z = 0$.

распределения маркеров, что увеличивает горизонтальную дисперсию частиц. На рис. 6.18a изображена доля маркеров, находящихся внутри вихря, от времени.

Кривые, соответствующие наличию только горизонтального компонента диффузии, т.е. $\kappa_z = 0$, подобны в стационарном случае (пунктирные линии) и в возмущенном случае (сплошные линии). Кривые для случая наличия и горизонтальной, и вертикальной компонент так же подобны, но вне вихря наблюдается более эффективный разброс маркеров. На рис. 6.18a так же изображены аналогичные кривые для случая $\kappa_z = \kappa$. Кривые показывают, что изменение значения вертикального коэффициента диффузии приводит только к увеличению или уменьшению интенсивности выноса жидких частиц из области начального распределения, но не приводит к каким-либо качественным изменениям.

Можно ввести дополнительную характеристику для оценки деформации эллипсоида – дисперсию маркеров, изначально находящихся внутри вихря. Дисперсия, в данном случае, представляет собой меру разбегания маркеров в направлении осей эллипсоида в пространстве.

$$\begin{aligned} D_a &= \left\langle x_a(t)^2 \right\rangle, \\ D_b &= \left\langle y_b(t)^2 \right\rangle, \\ D_z &= \left\langle z(t)^2 \right\rangle - \left\langle z\left(t\right)\right\rangle^2, \end{aligned} \tag{6.27}$$

где $\langle\cdot\rangle$ – усреднение по пространству, D_a, D_b – компоненты дисперсии вдоль горизонтальных осей эллипсоида, D_z – дисперсия вдоль вертикальной оси эллипсоида, x_a, y_b – проекции положения маркеров на полуоси a и b, соответственно.

В стационарном случае, т.е. в отсутствии хаотического переноса, компоненты дисперсии растут линейно в соответствии с нормальным законом распределения, который является решением стационарного уравнения адвекции. На рис. 6.18b приведены компоненты дисперсии вдоль осей эллипсоида в зависимости от времени. Стационарный случай не представлен на рисунках, так как он соответствует прямым растущим линиям, получаемым из выражения

$$\begin{aligned} &\left\langle x_a(t)^2 \right\rangle = \left\langle y_b(t)^2 \right\rangle = 4\kappa t, \\ &\left\langle z(t)^2 \right\rangle - \left\langle z\left(t\right) \right\rangle^2 = 4\kappa_z t. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Из рис. 6.18b видно, что данные выражение верны для вертикальной компоненты D_z в возмущенном случае, так как вертикальное движение осуществляется исключительно за счет диффузии. Аналогичные линейные зависимости имеют место для всех компонент в стационарном случае. Однако горизонтальные компоненты дисперсии не соответствуют нормальному распределению, что отчетливо видно на рис. 6.17c,d.

В отличии от стационарного случая, в возмущенном случае горизонтальные компоненты дисперсии имеют заметные особенности. Во-первых, скорость потери эллипсоидом частиц заметно выше, во-вторых, эта скорость уменьшается нелинейно во времени. Учет вертикальной компоненты диффузии (сплошные линии – $\kappa_z = 2\kappa$ и штрихпунктирные – $\kappa_z = \kappa$ на рис. 6.18b) приводит к более явному эффекту насыщения. После нескольких десятков оборотов вихря, кривые горизонтальной дисперсии перестают отличаться от полученных в отсутствии вертикальной диффузии. Отсюда можно сделать вывод, что с самого начала возможность разрушения вихря (в смысле потери им значительного числа завихренных частиц) определяется адвекцией частиц, уже перешедших через границу вихря во внешний поток за счет диффузии. После того, как область в непосредственной окрестности вихря вплоть до стационарной сепаратрисы становится насыщенной завихренными частицами, дальнейший перенос частиц во внешний гиперболический поток осуществляется за счет хаотического переноса. Этот процесс проходит со значительно меньшими скоростями. Таким образом, частицы, только что покинувшие вихрь, быстро распространяются внутри сепаратрисной области благодаря хаотическому переносу, но дальнейший перенос в гиперболическую область существенно замедляется и осуществляется только благодаря диффузии.

Еще одно наблюдение заключается в том, что несмотря на то, что вихрь теряет свои завихренные частицы, они остаются долгое время в его окрестности. Таким образом, область, содержащая вихрь и его окрестность, сохраняет изначальную завихренность долгое время.

Заключение

Следует отметить, что, несмотря на существенный прогресс в вычислительных мощностях, которые позволяют разрешать мезомасштаб в моделях океанической циркуляции [584–586], а также в системах спутникого мониторинга океанических масс, которые также позволяют оценить интенсивность мезомасштабной динамики [38, 61, 63, 66, 67, 76, 77, 587–589], многие вопросы, касающиеся динамики эволюции ансамблей мезомасштабных вихрей, могут решаться только с помощью привлечения подходящих упрощенных динамических моделей. Это связано, в первую очередь, с практической невозможностью выделить интересующие динамические процессы из данных, полученных с помощью численных моделей циркуляции и данных наблюдений, в связи с тем, что эти данные содержат в себе отпечатки всех масштабов и процессов, одновременно действующих в океанических потоках [590–595]. В тоже время, динамические модели изолированных вихрей предоставляют возможность рассмотреть эволюцию ансамбля вихревых структур и изучать только вихревые взаимодействия. Дополнительным стимулом для разработки динамических моделей изолированных процессов служит тот факт, что анализ многомерных данных, полученных с помощью спутникового мониторинга или моделей океанической циркуляции, все меньше опирается на статистические методы линейной статистики (EOF-анализ, регрессионные методы [596, 597]) и все больше требует новых подходов, основой которых является предположение о существенной нелинейности взаимодействия когерентных структур. Таким образом, существенная нелинейность рассмотренных в диссертации моделей индуцирует многие типичные пространственно-временные характеристики взаимодействия малого количества изолированных вихревых структур.

В качестве заключения приведем основные результаты работы:

1. Во второй главе рассматривается задача генерации тороидальных вихревых структур в окрестности изолированных симметричных подводных преград. Показано, что тороидальный топографический вихрь может появляться в неограниченной баротропной жидкости в окрестности топографической преграды произвольного кусочно-постоянного профиля. В таком вихре, жидкие частицы двигаются по поверхности правильного тора, периодически опускаясь и всплывая в вертикальном направлении. Интересной особенностью задачи является то, что физически допустимые значения числа Экмана могут приводить к появлению множественных тороидальных вихрей в окрестности изолированных топографических преград.

2. В третьей главе анализируется поведение самодвижущихся вихревых структур - вихре-

вых диполей в баротропной и бароклинной слоистой постановках. Показано, что баротропная самодвижущаяся вихревая структура (вихревой диполь) при взаимодействии с топорафической преградой в неограниченной жидкости без фоновых потоков может совершать два типа движения. Первое, нелокализованная динамика, при которой диполь продолжает свое направленное движение после взаимодействия с топографической преградой, при этом траектория движения диполя может быть сильно изменена за счет взаимодействия с преградой. Второе, локализованная динамика, при которой диполь начинает колебаться вокруг топографической преграды, при этом диполь периодически разрушается на два изолированных вихря, а потом снова воссоединяется в самодвижущуюся структуру. Бароклинный самодвижущийся диполь (хетон) имеет аналогичные типы движения: локализованное и нелокализованное. Однако движение хетона более сложное, в общем случае переход между локализованным и нелокализованным режимами происходит хаотическим образом. То есть, захваченный хетон может совершать непредсказуемое количество оборотов вокруг топографической преграды, в то время как захват баротроного диполя является регулярным.

3. Четвертая глава посвящена анализу регулярной нерегулярной динамики изолированного вихря при его взаимодействии с прямолинейной границей с особенностью в виде сектора окружности и наличии фонового потока. Показано, что изолированный вихрь может быть захвачен округлой выемкой, при этом совершая в ней периодические колебания. При периодическом возмущении внешнего течения, движение вихря в окрестности выемки усложняется, начинают появляться нерегулярные траектории движения вихря. То есть, вихрь может долгое время колебаться в окрестности выемки, после чего быть вынесенным во внешний поток и продолжить движение вдоль прямолинейной границы. Также, в простейшей модели динамики двух вихрей за округлой преградой, показано, что при смещении с их положений равновесия, вихри начинают периодически колебаться. Такое периодическое движение вихрей играет роль периодического возмущения для жидких частиц в их окрестности, в результате жидкие частицы хаотически перемешиваются и переносятся в потоке. Показано, что эффективность перемешивания определяется частотами оборота жидких частиц в стационарной конфигурации и частотой колебания вихрей относительно их положений равновесия.

4. В пятой главе рассматривается эффективность перехода к хаотическому движению жидких частиц в окрестности двух точечных вихрей произвольных интенсивностей, помещенных в линейный сдвиговый поток в баротропной жидкости на f–плоскости.

В случае, если компоненты линейного сдвигового потока и внешнего вращения гармонически меняются с разными амплитудами, показана возможность параметрической неустойчивости, приводящей к смене типа движения такой двух-вихревой конфигурации. В то время как в невозмущенном состоянии, центр завихренности может двигаться только по эллиптическим (локализованное движение) и гиперболическим (нелокализованное движение) траекториям, параметрическая неустойчивость приводит к спиралевидному движению центра завихренности.

5. Шестая глава посвящена рассмотрению эволюции эллипсоидального вихря в бароклинной жидкости с линейным профилем частоты плавучести, помещенного в линейный деформационный поток. Анализируется совместное влияние детерминированной нерегулярной динамики и турбулентной диффузии. Показано, что нерегулярная детерминированная динамика усиливает поток жидких частиц из ядра вихря во внешнюю область, что способствует более быстрой потере завихренности вихревой структурой.Показано, что вынос жидких частиц из ядра вихря происходит неравномерно по пространству с выделенными направлениями вдоль оси сдвига. Показано, что при наличии вертикальной компоненты диффузии (которая на порядки слабее по сравнению с горизонтальными компонентами), ее влияние сравнимо с влиянием горизонтальных компонент, так как отношение коэффициента вертикальной диффузии к вертикальному линейному масштабу имеет тот же порядок, что и отношение коэффициента горизонтальной диффузии к горизонтальному линейному масштабу.

Список литературы

1. Рыжов Е. А., Кошель К. В., Степанов Д. В. Об оценке толщины слоя хаотизации в модели двухслойного топографического вихря // Письма в ЖТФ. 2008. Vol. 34. Pp. 74–81.
2. Ryzhov E., Koshel K., Stepanov D. Background current concept and chaotic advection in an oceanic vortex flow // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. Pp. 59–64.
3. Рыжов Е. А., Кошель К. В. Хаотический перенос и перемешивание пассивной примеси вихревыми потоками за препятствиями // Изв. РАН. ФАО. 2010. Vol. 46. Pp. 204–211.
4. Рыжов Е. А., Кошель К. В. Эффекты хаотической адвекции в трехслойной модели океана // Изв. РАН. ФАО. 2011. Vol. 47. Pp. 263–274.
5. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Estimating the size of the regular region of a topographically trapped vortex // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2011. Vol. 105. Pp. 536–551.
6. Рыжов Е. А., Кошель К. В. Вентилирование области топографического вихря захваченным свободным вихрем // Изв. РАН. ФАО. 2011. Vol. 47. Pp. 845–857.
7. Zhmur V. V., Ryzhov E. A., Koshel K. V. Ellipsoidal vortex in a nonuniform flow: Dynamics and chaotic advections // J. Mar. Res. 2011. Vol. 69. Pp. 435–461.
8. Ryzhov E. A. On changing the size of the atmosphere of a vortex pair embedded in a periodic external shear flow // Phys. Lett. A. 2011. Vol. 375. Pp. 3884–3889.
9. Рыжов Е. А. Интегрируемое и неинтегрируемое движение вихревой пары в несимметричном деформационном потоке // Нелинейная динамика. 2011. Vol. 7. Pp. 283–293.
10. Ryzhov E. A. Fluid particle advection in the vicinity of the Föppl vortex system // Phys. Lett. A. 2012. Vol. 376. Pp. 3208–3212.
11. Koshel K. V., Ryzhov E. A. Parametric resonance with a point-vortex pair in a nonstationary deformation flow // Phys. Lett. A. 2012. Vol. 376. Pp. 744–747.
12. Ryzhov E. A., Koshel K. V., Carton X. J. Passive scalar advection in the vicinity of two point vortices in a deformation flow // Eur. J. Mech. B- Fluid. 2012. Vol. 34. Pp. 121–130.
13. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Dynamics of a vortex pair interacting with a fixed point vortex // EPL. 2013. Vol. 102. P. 44004.
14. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Interaction of a monopole vortex with an isolated topographic feature in a three-layer geophysical flow // Nonlin. Processes Geophys. 2013. Vol. 20. Pp. 107–119.
15. Koshel K. V., Ryzhov E. A., Zhmur V. V. Diffusion-affected passive scalar transport in an

ellipsoidal vortex in a shear flow // Nonlin. Processes Geophys. 2013. Vol. 20. Pp. 437–444.

16. Зырянов В. Н., Рыжов Е. А., Кошель К. В. Вихревые торы над возмущениями дна во вращающейся жидкости // Доклады академии наук. 2013. Vol. 450. Pp. 171–175.
17. Ryzhov E. A. Irregular mixing due to a vortex pair interacting with a fixed vortex // Phys. Lett. A. 2014. Vol. 378. Pp. 3301–3307.
18. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Two-point-vortex evolution in an oscillatory shear flow with rotation // EPL. 2014. Vol. 108. P. 24002.
19. Koshel K. V., Ryzhov E. A., Zyryanov V. N. Toroidal vortices over isolated topography in geophysical flows // Fluid Dyn. Res. 2014. Vol. 46. P. 031405.
20. Koshel K. V., Ryzhov E. A., Zyryanov V. N. A modification of the invariant imbedding method for a singular boundary value problem // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2014. Vol. 19. Pp. 459–470.
21. Рыжов Е. А., Израильсикий Ю. Г., Кошель К. В. Вихревая динамика жидкости вблизи границы с округлой выемкой // Изв. РАН. ФАО. 2014. Vol. 50. Pp. 477–483.
22. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Global chaotization of fluid particle trajectories in a sheared two-layer two-vortex flow // Chaos. 2015. Vol. 25. P. 103108.
23. Koshel K. V., Ryzhov E. A., Zhmur V. V. Effect of the vertical component of diffusion on passive scalar transport in an isolated vortex model // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. P. 053021.
24. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Steady and perturbed motion of a point vortex along a boundary with a circular cavity // Phys. Lett. A. 2016. Vol. 380. Pp. 892–902.
25. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Parametric instability of a many point-vortex system in a multi-layer flow under linear deformation // Regul. Chaotic Dyn. 2016. Vol. 21. Pp. 254–266.
26. Koshel K. V., Ryzhov E. A. Local parametric instability near elliptic points in vortex flows under shear deformation // Chaos. 2016. Vol. 26. P. 083111.
27. Ryzhov E. A., Sokolovskiy M. A. Interaction of a two-layer vortex pair with a submerged cylindrical obstacle in a two layer rotating fluid // Phys. Fluids. 2016. Vol. 28. P. 056602.
28. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Resonance phenomena in a two-layer two-vortex shear flow // Chaos. 2016. Vol. 26. P. 113116.
29. Koshel K. V., Ryzhov E. A. Parametric resonance in the dynamics of an elliptic vortex in a periodically strained environment // Nonlin. Processes Geophys. 2017. Vol. 24. Pp. 1–8.
30. Ryzhov E. A. Nonlinear dynamics of an elliptic vortex embedded in an oscillatory shear flow // Chaos. 2017. Vol. 27. P. 113101.
31. Koshel K. V., Reinaud J. N., Riccardi G., Ryzhov E. A. Dynamics of a vortex pair interacting with a fixed point vortex revisited. Part I: Point vortices // Phys. Fluids. 2018. Vol. 30.

P. 096603.

32. Reinaud J. N., Koshel K. V., Ryzhov E. A. Dynamics of a vortex pair interacting with a fixed point vortex revisited. Part II: Finite size vortices // Phys. Fluids. 2018. Vol. 30. P. 096604.
33. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Advection of passive scalars induced by a bay-trapped nonstationary vortex // Ocean Dynamics. 2018. Vol. 68. Pp. 411–422.
34. Ryzhov E. A., Koshel K. V., Sokolovskiy M. A., Carton X. J. Interaction of an along-shore propagating vortex with a vortex enclosed in a circular bay // Phys. Fluids. 2018. Vol. 30. P. 016602.
35. Boffetta G., Lacorata G., Redaelli G., Vulpiani A. Detecting barriers to transport: a review of different techniques // Physica D. 2001. Vol. 159. Pp. 58–70.
36. Mancho A. M., Small D., Wiggins S. A tutorial on dynamical systems concepts applied to Lagrangian transport in oceanic flows defined as finite time data sets: Theoretical and computational issues // Phys. Rep. 2006. Vol. 437. Pp. 55–124.
37. Branicki M., Wiggins S. Finite-time Lagrangian transport analysis: stable and unstable manifolds of hyperbolic trajectories and finite-time Lyapunov exponents // Nonlin. Processes Geophys. 2010. Vol. 17. Pp. 1–36.
38. Prants S. V. Dynamical systems theory methods to study mixing and transport in the ocean // Phys. Scr. 2013. Vol. 87. P. 038115.
39. Samelson R. M. Lagrangian Motion, Coherent Structures, and Lines of Persistent Material Strain // Annu. Rev. Mar. Sci. 2013. Vol. 5. Pp. 137–163.
40. Haller G. Lagrangian coherent structures // Annuv. Rev. Fluid Mech. 2015. Vol. 47. Pp. 137–162.
41. Allshouse M. R., Peacock T. Lagrangian based methods for coherent structure detection // Chaos. 2015. Vol. 25. P. 097617.
42. Balasuriya S., Kalampattel R., Ouellette N. T. Hyperbolic neighbourhoods as organizers of finite-time exponential stretching // J. Fluid Mech. 2016.
43. Balasuriya S. Local Stable and Unstable Manifolds and Their Control in Nonautonomous Finite-Time Flows // J. Nonlinear Sci. 2016.
44. Osborne A. R., Kirwan A. D., Provenzale A., Bergmasco. A search for chaotic behavior in large and mesoscale motions in the Pacific ocean // Physica D. 1986. Vol. 23. Pp. 75–83.
45. Olascoaga M. J., Beron-Vera F. J., Haller G. et al. Drifter motion in the Gulf of Mexico constrained by altimetric Lagrangian coherent structures // Geophys. Res. Lett. 2013. Vol. 40. Pp. 6171–6175.
46. Mariano A. J., Ryan E. H., Huntley H. S. et al. Statistical properties of the surface velocity

field in the northern Gulf of Mexico sampled by GLAD drifters // J. Geophys. Res.: Oceans. 2016. Vol. 121. Pp. 51–3–5216.

47. Olascoaga M. J., Haller G. Forecasting sudden changes in environmental pollution patterns // Proc. Nat. Acad. Sci. 2012. Vol. 109. Pp. 4738–4743.
48. Froyland G., Horenkamp C., Rossi V., van Sebille E. Studying an Agulhas ring's long-term pathway and decay with finite-time coherent sets // Chaos. 2015. Vol. 25. P. 083119.
49. Kersalé M., Petrenko A. A., Doglioli A. M. et al. Physical characteristics and dynamics of the coastal Latex09 Eddy derived from in situ data and numerical modeling // J. Geophys. Res. 2013. Vol. 118. Pp. 399–409.
50. Campbell R., Diaz F., Hua Z. et al. Nutrients and plankton spatial distributions induced by a coastal eddy in the Gulf of Lion. Insights from a numerical model // Prog. Oceanogr. 2013. Vol. 109. Pp. 47–69.
51. Bouffard J., Nencioli F., Escudier R. et al. Lagrangian analysis of satellite-derived currents: application to the North Western Mediterranean coastal dynamics // Adv. Space. Res. 2014. Vol. 53. Pp. 788–801.
52. Barrier N., Petrenko A. A., Ourmiéres Y. Strong intrusions of the Northern Mediterranean Current on the eastern Gulf of Lion: insights from in-situ observations and high resolution numerical modelling // Ocean Dynamics. 2016. Vol. 66. Pp. 313–327.
53. Petrenko A. A., Doglioli A. M., Nencioli F. et al. A review of the LATEX project: mesoscale to submesoscale processes in a coastal environment // Ocean Dynamics. 2017.
54. Buesseler K. O., Jayne S. R., Fisher N. S. et al. Fukushima-derived radionuclides in the ocean and biota off Japan // Proc. Nat. Acad. Sci. 2012. Vol. 109. Pp. 5984–5988.
55. Rypina I. I., Jayne S. R., Yoshida S. et al. Drifter-based estimate of the 5 year dispersal of Fukushima-derived radionuclides // J. Geophys. Res.: Oceans. 2014. Vol. 119. Pp. 8177–8193.
56. Prants S. V., Budyansky M. V., Uleysky M. Y. Lagrangian study of surface transport in the Kuroshio Extension area based on simulation of propagation of Fukushima-derived radionuclides // Nonlin. Processes Geophys. 2014. Vol. 21. Pp. 279–289.
57. Shadden S. C., Lekien J. D., F. Paduan, Chavez F. P., Marsden J. E. The correlation between surface drifters and coherent structures based on high-frequency radar data in Monterey Bay // Deep Sea Res. II. 2009. Vol. 56. Pp. 161–172.
58. Rypina I. I., Kirincich A. R., Limeburner R., Udovydchenkov I. A. Eulerian and Lagrangian Correspondence of High-Frequency Radar and Surface Drifter Data: Effects of Radar Resolution and Flow Components // J. Atmos. Oceanic Technol. 2014. Vol. 31. Pp. 945–966.
59. Berta M., Bellomo L., Magaldi M. G. et al. Estimating Lagrangian transport blending drifters

with HF radar data and models: Results from the TOSCA experiment in the Ligurian Current (North Western Mediterranean Sea) // Prog. Oceanogr. 2014. Vol. 128. Pp. 15–29.

60. Lumpkin R., Özgökmen T. M., Centurioni L. Advances in the application of surface drifters // Annu. Rev. Mar. Sci. 2016. Vol. in print.
61. Chelton D. B., Schlax M. G., Samelson R. M., de Szoeke R. A. Global observations of large oceanic eddies // Geophys. Res. Lett. 2007. Vol. 34. P. L15606.
62. Isern-Fontanet J., Garcia-Ladona E., Font J. Identification of marine eddies from altimetric maps // J. Atmos. Oceanic Technol. 2003. Vol. 20. Pp. 772–778.
63. Chelton D. B., Schlax M. G., Samelson R. M. Global observations of nonlinear mesoscale eddies // Prog. Oceanogr. 2011. Vol. 91, no. 2. Pp. 167–216.
64. Chelton D. B., Gaube P., Schlax M. G. et al. The Influence of Nonlinear Mesoscale Eddies on Near-Surface Oceanic Chlorophyll // Science. 2011. Vol. 334. Pp. 328–332.
65. Bashmachnikov I., Carton X. Surface signature of Mediterranean water eddies in the North-eastern Atlantic: effect of the upper ocean stratification // Ocean Sci. 2012. Vol. 8. Pp. 931–943.
66. Zhang Z., Wang W., Qiu B. Oceanic Mass Transport by Mesoscale Eddies // Science. 2014. Vol. 345. Pp. 322–324.
67. Dong C., McWilliams J. C., Liu Y., Chen D. Global heat and salt transports by eddy movement // Nat. Commun. 2014. Vol. 5. P. 3294.
68. Frenger I., Münnich M., Gruber N., Knutti R. Southern Ocean eddy phenomenology // J. Geophys. Res.: Oceans. 2015. Vol. 120. Pp. 7413–7449.
69. Isern-Fontanet J. E., Font J., Garcia-Ladona E. et al. Spatial structure of anticyclonic eddies in the Algerian basin (Mediterranean Sea) analyzed using the Okubo–Weiss parameter // Deep-Sea Res. 2004. Vol. 51. Pp. 3009–3028.
70. Palacios D. M., Bograd S. J. A census of Tehuantepec and Papagayo eddies in the northeastern tropical Pacific // Geophys. Res. Lett. 2005. Vol. 32. P. L23606.
71. Isern-Fontanet J., Garcia-Ladona E., Font J. Vortices of the Mediterranean Sea: an altimetric perspective // J. Phys. Oceanogr. 2006. Vol. 36. Pp. 87–103.
72. Isern-Fontanet J., Garcia-Ladona E., Font J., Garcia-Olivares A. Non-Gaussian velocity probability density functions: an altimetric perspective of the Mediterranean Sea // J. Phys. Oceanogr. 2006. Vol. 36. Pp. 2153–2164.
73. Schlax M. G., Chelton D. B. The influence of mesoscale eddies on the detection of quasi-zonal jets in the ocean // Geophys. Res. Lett. 2008. Vol. 35. P. L24602.
74. Conti D., Orfila A., Mason E. et al. An eddy tracking algorithm based on dynamical systems

theory // Ocean Dynamics. 2016. Vol. First Online: 27 September 2016. Pp. 1–13.

75. Prants S. V., Andreev A. G., Budyansky M. V., Uleysky M. Y. Impact of mesoscale eddies on surface flow between the Pacific Ocean and the Bering Sea across the Near Strait // Ocean Model. 2013. Vol. 72. Pp. 15–27143–152.
76. Budyansky M. V., Goryachev V. A., Kaplunenko D. D. et al. Role of mesoscale eddies in transport of Fukushima-derived cesium isotopes in the ocean // Deep Sea Res. 2015. Vol. 96. Pp. 15–27.
77. Prants S. V., Lobanov V. B., Budyansky M. V., Uleysky M. Y. Lagrangian analysis of formation, structure, evolution and splitting of anticyclonic Kuril eddies // Deep Sea Res. 2016. Vol. 109. Pp. 61–75.
78. Wang J., Flierl G. R., LaCasce J. H. et al. Reconstructing the Ocean's Interior from Surface Data // J. Phys. Oceanogr. 2013. Vol. 43. Pp. 1611–1626.
79. Nycander J., Döös K., Coward A. C. Chaotic and regular trajectories in the Antarctic Circumpolar Current // Tellus. 2002. Vol. 54A. Pp. 99–106.
80. Kurian J., Colas F., Capet X. et al. Eddy properties in the California Current System // J. Geophys. Res. 2011. Vol. 116. P. C08027.
81. Shchepetkin A., McWilliams J. C. The regional oceanic modeling system (ROMS): A split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate ocean model // Ocean Model. 2008. Vol. 9. Pp. 347–404.
82. Schaeffer A., Molcard A., Forget P. et al. Generation mechanisms for mesoscale eddies in the Gulf of Lions: radar observation and modeling // Ocean Dynamics. 2011. Vol. 61. Pp. 1587–1609.
83. Lazure P., Dumas F. An external-internal mode coupling for a 3D hydrodynamical model for applications at regional scale (MARS) // Adv. Water Resour. 2008. Vol. 31. Pp. 233–250.
84. Дианский Н. А., Гусев А. В., Фомин В. В. Особенности распространения загрязнений в северо-западной части Тихого океана // Изв. РАН. ФАО. 2012. Vol. 48. Pp. 247–266.
85. Дианский Н. А., Фомин В. В., Жохова Н. В., Коршенко А. Н. Расчет течений и распространения загрязнения в прибрежных водах Большого Сочи // Изв. РАН. ФАО. 2013. Vol. 49. Pp. 664–675.
86. Barbosa Aguiar A. C., Peliz A., Carton X. A census of Meddies in a long-term high-resolution simulation // Prog. Oceanogr. 2013. Vol. 116. Pp. 80–94.
87. Пранц С. В., Пономарев В. И., Будянский М. В. et al. Лагранжев анализ перемешивания и переноса вод в морских заливах // Изв. РАН. ФАО. 2013. Vol. 49. Pp. 91–106.
88. Griffa A., Piterbarg L. I., Özgökmen T. M. Predictability of Lagrangian particle trajectories:

Effects of smoothing of the underlying Eulerian flow // J. Mar. Res. 2004. Vol. 62. Pp. 1–35.

89. Piterbarg L. I. Short term prediction of Lagrangian trajectories // J. Atmos. Ocean. Tech. 2001. Vol. 18. Pp. 1398–1410.
90. Piterbarg L. I. The top Lyapunov exponent for a stochastic flow modeling the upper ocean turbulence // SIAM J. Appl. Math. 2001. Vol. 62. Pp. 777–800.
91. Marshall J., Adcroft L. P. A., Hill C., Heisey C. A finite-volume, incompressible Navier Stokes model for studies of the ocean on parallel computers // J. Geophys. Res. 1997. Vol. 102. Pp. 5753–5766.
92. Mukiibi D., Badin G., Serra N. Three-Dimensional Chaotic Advection by Mixed Layer Baroclinic Instabilities // J. Phys. Oceanogr. 2016. Vol. 46. Pp. 1509–1529.
93. Danabasoglu G., McWilliams J. C., Gent P. R. The Role of Mesoscale Tracer Transports in the Global Ocean Circulation // Science. 1994. Vol. 264. Pp. 1123–1126.
94. Haller G., Poje A. Finite time transport in aperiodic flows // Physica D. 1998. Vol. 119. Pp. 352–380.
95. Poje A. C., Haller G. Geometry of Cross-Stream Mixing in a Double-Gyre Ocean Model // J. Phys. Oceanogr. 1999. Vol. 29. Pp. 1649–1665.
96. Haller G., Yuan G. Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence // Physica D. 2000. Vol. 147. Pp. 352–370.
97. Liu Z., Yang H. The intergyre chaotic transport // J. Phys. Oceanogr. 1994. Vol. 24. Pp. 1768–1782.
98. Koshlyakov M. N., Monin A. S. Synoptic eddies in the ocean // Ann. Rev. Earth Sci. 1978. Vol. 6. Pp. 495–523.
99. Flierl G. R. Isolated eddy models in geophysics // Annu. Rev. Fluid Mech. 1987. Vol. 19. Pp. 493–530.
100. Монин А. С., Жихарев Г. М. Океанические вихри // УФН. 1990. Vol. 160. Pp. 1–47.
101. Korotaev G. K. Radiating vortices in geophysical fluid dynamics // Surv. Geophys. 1997. Vol. 18. Pp. 567–619.
102. McDonald N. R. The motion of geophysical vortices // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1999. Vol. 357. Pp. 3427–3444.
103. Кошель К. В., Пранц С. В. Хаотическая адвекция в океане // УФН. 2006. Т. 176. С. 1177–1206.
104. Gryanik V. M., Sokolovskiy M. A., Verron J. Dynamics of heton-like vortices // Regul. Chaotic Dyn. 2006. Vol. 11. Pp. 383–434.
105. Резник Г. М. Динамика локализованных вихрей на бета-плоскости // Изв. РАН. ФАО.

2010. Vol. 46. Pp. 846–860.

106. Nof D. On the beta-induced movement of isolated baroclinic eddies // J. Phys. Oceanogr. 1981. Vol. 11. Pp. 1662–1672.
107. Ларичев В. Д., Резник Г. М. О двумерных уединенных волнах Россби // ДАН СССР. 1976. Vol. 231. Pp. 1077–1079.
108. Резник Г. М. Точечные вихри на β – плоскости и уединенные волны Россби // Океанология. 1986. Vol. 26. Pp. 165–173.
109. Гряник В. М. Сингулярные геострофические вихри на β плоскости как модель синоптических вихрей // Океанология. 1986. Т. 26. С. 174–179.
110. Кляцкин К. В., Резник Г. М. О точечных вихрях на вращающейся сфере // Океанология. 1989. Vol. 29. Pp. 21–27.
111. Резник Г. М. Сингулярные вихри на β – плоскости // Изв. РАН. ФАО. 1992. Vol. 28. Pp. 398–405.
112. Reznik G. M. Dynamics of singular vortices on a beta-plane // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 240. Pp. 405–432.
113. Llewellyn Smith S. G. The motion of a non-isolated vortex on the β-plane // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 346. Pp. 149–179.
114. Korotaev G. K., Fedotov A. B. Dynamics of an isolated barotropic eddy on a beta-plane // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 264. Pp. 277–301.
115. Коротаев Г. К. Геострофические вихри на β - плоскости. Их динамика и взаимодействие // Изв. РАН. ФАО. 1993. Vol. 29. Pp. 755–763.
116. Коротаев Г. К., Дорофеев В. Л. Взаимодействие изолированного вихря с плоской волной Россби // Изв. РАН. ФАО. 1997. Vol. 33. Pp. 258–265.
117. Bajer K., Bassom A. P., Gilbert A. D. Vortex motion in a weak background shear flow // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 509. Pp. 281–304.
118. Соколовский М. А., Веррон Ж. Динамика вихревых структур в стратифицированной вращающейся жидкости. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.
119. Sokolovskiy M. A., Verron J. Dynamics of vortex structures in a stratified rotating fluid. Springer, Switzerland, 2014.
120. Гряник В. М. Динамика сингулярных геострофических вихрей в двухуровенной модели атмосферы (океана) // Изв. АН СССР. ФАО. 1983. Т. 19. С. 227–240.
121. Гряник В. М., Тевс М. В. Динамика сингулярных геострофических вихрей в N-слойной модели атмосферы (океана) // Изв. АН СССР. ФАО. 1989. Т. 25. С. 243–256.
122. Sutyrin G. G., Morel Y. G. Intense vortex motion in a stratified fluid on the beta-plane: an

analytical theory and its validation // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 336. Pp. 203–220.

123. Sutyrin G., Radko T. Stabilization of Isolated Vortices in a Rotating Stratified Fluid // Fluids. 2016. Vol. 1. P. 26.

124. Marshall J. S. Chaotic oscillations and breakup of quasigeostrophic vortices in the N-layer approximation // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. P. 983.

125. McDonald N. R. The interaction of two baroclinic geostrophic vortices on the β -plane // Proc. R. Soc. Lond. A. 2000. Vol. 456. Pp. 1029–1049.

126. Hogg N. G., Stommel H. M. The Heton, an Elementary Interaction Between Discrete Baroclinic Geostrophic Vortices, and Its Implications Concerning Eddy Heat-Flow // Proc. R. Soc. Lond. A. 1985. Vol. 397. Pp. 1–20.

127. Hogg N., Stommel H. Hetonic explosions: the break-up and spread of warm pools as explained by baroclinic point vortices // J. Atmos. Sci. 1985. Vol. 42. Pp. 1465–1476.

128. Young W. Some interactions between a small number of baroclinic, geostrophic vortices // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1985. Vol. 33. Pp. 35–61.

129. Соколовский М. А. О встречном столкновении распределенных хетонов // Докл. АН СССР. 1989. Vol. 306. Pp. 198–202.

130. Polvani L. M. Two-layer geostrophic vortex dynamics. Part 2. Alignment and two-layer V-states // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 225. Pp. 241–270.

131. Valcke S., Verron J. On Interactions Between 2 Finite-core Hetons // Phys. Fluids. 1993. Vol. 5. Pp. 2058–2060.

132. Reznik G., Grimshaw R., Sriskandarajah K. On basic mechanisms governing two-layer vortices on a beta-plane // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1997. Vol. 86. Pp. 1–42.

133. Cabral H. E., Schmidt D. S. Stability of relative equilibria in the problem on N + 1 vortices // SIAM J. Math. Anal. 1999. Vol. 31. Pp. 231–250.

134. Gryanik V. M., Doronina T. N., Olbers D. J., Warncke T. H. The theory of three-dimensional hetons and vortex-dominated spreading in localized turbulent convection in a fast rotating stratified fluid // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 423. Pp. 71–125.

135. Sokolovskiy M. A., Verron J. Finite-core hetons: stability and interactions // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 423. Pp. 127–154.

136. Kizner Z., Berson D., Khvoles R. Baroclinic modon equilibria on the beta-plane: stability and transitions // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 468. Pp. 239–260.

137. Benilov E. S. Stability of a two-layer quasigeostrophic vortex over axisymmetric localized topography // J. Phys. Oceanogr. 2005. Vol. 35. Pp. 123–130.

138. Kizner Z. Stability and transitions of hetonic quartets and baroclinic modons // Phys. Fluids.

2006. Vol. 18. P. 056601.

139. Reznik G., Kizner Z. Two-layer quasi-geostrophic singular vortices embedded in a regular flow. Part 1. Invariants of motion and stability of vortex pairs // J. Fluid Mech. 2007. Vol. 584. Pp. 185–202.
140. Reznik G., Kizner Z. Two-layer quasi-geostrophic singular vortices embedded in a regular flow. Part 2. Steady and unsteady drift of individual vortices on a beta-plane // J. Fluid Mech. 2007. Vol. 584. Pp. 185–202.
141. Reinaud J. N., Carton X. The stability and the nonlinear evolution of quasi-geostrophic hetons // J. Fluid Mech. 2009. Vol. 636. Pp. 109–135.
142. Viudez A. Vertical Splitting of Vortices in Geophysical Dipoles // J. Phys. Oceanogr. 2010. Vol. 40. Pp. 2170–2179.
143. Carton X., Flierl G. R., Perrot X. et al. Explosive instability of geostrophic vortices. Part 1: baroclinic instability // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. Pp. 125–130.
144. Carton X., Meunier T., Flierl G. R. et al. Explosive instability of geostrophic vortices. Part 2: parametric instability // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. Pp. 131–135.
145. Sokolovskiy M. A., Carton X. J. Baroclinic multipole formation from heton interaction // Fluid Dyn. Res. 2010. Vol. 42. P. 045501.
146. Sokolovskiy M., Verron J., Carton X., Gryanik V. On instability of elliptical hetons // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. Pp. 117–123.
147. Makarov V. G., Sokolovskiy M. A., Kizner Z. Doubly symmetric finite-core heton equilibria // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 708. Pp. 397–417.
148. Reinaud J. N., Carton X. Head-on collisions between two quasi-geostrophic hetons in a continuously stratified fluid // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 779. Pp. 144–180.
149. Reinaud J. N. On the stability of continuously stratified quasi-geostrophic hetons // Fluid Dyn. Res. 2015. Vol. 47. P. 035510.
150. Reinaud J., Carton X. The interaction between two oppositely travelling, horizontally offset, antisymmetric quasi-geostrophic hetons // J. Fluid Mech. 2016. Vol. 794. Pp. 409–443.
151. Shteinbuch-Fridman B., Makarov V., Kizner Z. Transitions and oscillatory regimes in two-layer geostrophic hetons and tripoles // J. Fluid Mech. 2017. Vol. 810. Pp. 535–553.
152. Legg S., Marshall J. A heton model of the spreading phase of open-ocean deep convection // J. Phys. Oceanogr. 1993. Vol. 23. Pp. 1040–1056.
153. Legg S. Y., Jones H., Visbeck M. A heton perspective of baroclinic eddy transfer in localized open ocean convection // J. Phys. Oceanogr. 1996. Vol. 26. Pp. 2251–2266.
154. Lim C. C., Majda A. J. Point vortex dynamics for coupled surface/interior QG and prop-

agating heton clusters in models for ocean convection // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2001. Vol. 94. Pp. 177–220.

155. Danilov S. D., Gryanik V. M., Olbers D. J. Equilibration and lateral spreading of a strip-shaped convective region // J. Phys. Oceanogr. 2001. Vol. 31. Pp. 1075–1087.
156. Sutyrin G. Why compensated cold-core rings look stable // Geophys. Res. Lett. 2015. Vol. 42. Pp. 5395–5402.
157. Sutyrin G. On sharp vorticity gradients in elongating baroclinic eddies and their stabilization with a solid-body rotation // Geophys. Res. Lett. 2016. Vol. 43. Pp. 5802–5811.
158. Sutyrin G., Rowe G. D., Rothstein L. M., Ginis I. Baroclinic Eddy Interactions with Continental Slopes and Shelves // J. Phys. Oceanogr. 2003. Vol. 33. Pp. 283–291.
159. Kizner Z., Berson D., Reznik G., Sutyrin G. The theory of the beta-plane baroclinic topographic modons // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2003. Vol. 97. Pp. 175–211.
160. Khvoles R., McWilliams J. C., Kizner Z. Noncoincidence of separatrices in two-layer modons // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19. P. 056602.
161. Stern M. E. Minimal properties of planetary eddies // J. Mar. Res. 1975. Vol. 33. Pp. 1–13.
162. Sutyrin G., Carton X. Vortex interaction with a zonal Rossby wave in a Quasi-Geostrophic model // Dyn. Atmos. Oceans. 2006. Vol. 41. Pp. 85–102.
163. Гряник В. М., Доронина Т. Н. Адвективный перенос динамически пассивных примесей бароклинными сингулярными геострофическими вихрями в атмосфере (океане) // Изв. АН СССР. ФАО. 1990. Vol. 26. Pp. 1011–1026.
164. Гряник В. М., Доронина Т. Н. Взаимодействие интенсивных бароклинных квазигеострофических вихрей в потоках с вертикальными и горизонтальными сдвигами скорости // Изв. АН СССР. ФАО. 1997. Vol. 33. Pp. 171–183.
165. Walsh D., Pratt L. J. The interaction of a pair of point potential vortices in uniform shear // Dyn. Atmos. Oceans. 1995. Vol. 22. Pp. 135–160.
166. Будянский М. В., Улейский М. Ю., Пранц С. В. Фракталы и динамические ловушки в простейшей модели хаотической адвекции // Доклады АН. 2002. Т. 386. С. 686–689.
167. Будянский М. В., Улейский М. Ю., Пранц С. В. Хаотическое рассеяние и фракталы в простом гидродинамическом потоке // ЖЭТФ. 2004. Т. 126. С. 1167–1179.
168. Koshel K. V., Stepanov D. V. Some specific features of chaotization and transport in pulsating barotropic flow over a topographic point vortex near boundary // Regul. Chaotic Dyn. 2004. Vol. 9. Pp. 439–449.
169. Козлов В. Ф., Кошель К. В., Степанов Д. В. Влияние границы на хаотическую адвекцию в простейшей модели топографического вихря // Изв. РАН. ФАО. 2005. Т. 41.

С. 242–252.

170. Кошель К. В., Степанов Д. В. Влияние границы на перемешивание и транспорт пассивной примеси в нестационарном потоке // Письма в ЖТФ. 2005. Vol. 31. Pp. 6–12.
171. Кошель К. В., Степанов Д. В. О хаотической адвекции, индуцированной топографическим вихрем бароклинного океана // Доклады АН. 2006. Т. 407. С. 773–776.
172. Izrailsky Y. G., Koshel K. V., Stepanov D. V. Determination of optimal excitation frequency range in background flows // Chaos. 2008. Vol. 18, no. 1. P. 013107.
173. Koshel K. V., Sokolovskiy M. A., Davies P. A. Chaotic advection and nonlinear resonances in an oceanic flow above submerged obstacle // Fluid Dyn. Res. 2008. Vol. 40. Pp. 695–736.
174. Данилов С. Д., Довженко В. А., Карпилова О. И., Якушкин И. Г. Перенос пассивной примеси в нестационарной четырехвихревой гидродинамической системе // Изв. РАН. ФАО. 1999. Vol. 35. Pp. 810–820.
175. Данилов С. Д., Довженко В. А., Якушкин И. Г. Перенос пассивного скаляра и лагранжев хаос в гамильтоновой гидродинамической модели // ЖЭТФ. 2000. Vol. 118. Pp. 483–494.
176. Kostrykin S. V., Khapaev A. A., Ponomarev V. M., Yakushkin I. G. Lagrangian structures in time-periodic vortical flows // Nonlin. Processes Geophys. 2006. Vol. 13. Pp. 621–628.
177. Southwick O. R., Johnson E. R., McDonald N. R. A point vortex model for the formation of ocean eddies by flow separation // Phys. Fluids. 2015. Vol. 27. P. 016604.
178. Southwick O. R., Johnson E. R., McDonald N. R. A simple model for sheddies: Ocean eddies formed from shed vorticity // J. Phys. Oceanogr. 2016. Vol. 46. Pp. 2961–2979.
179. Nilawar R., Johnson E., McDonald N. Finite Rossby radius effects on vortex motion near a gap // Phys. Fluids. 2012. Vol. 24. P. 066601.
180. Stern M. E., Flierl G. R. On the Interaction of a Vortex With a Shear Flow // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92. Pp. 10733–10744.
181. Nelson R. B., McDonald N. R. Vortex-wave interaction on the surface of a sphere // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2011. Vol. 105. Pp. 23–47.
182. Crowdy D., Nelson R. B. Steady interaction of a vortex street with a shear flow // Phys. Fluids. 2010. Vol. 22. P. 096601.
183. Atassi O. V., Bernoff A. J., Lichter S. The interaction of a point vortex with a wall-bounded vortex layer // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 343. Pp. 169–195.
184. Atassi O. V. Analytical and numerical study of the nonlinear interaction between a point vortex and a wall-bounded shear layer // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 373. Pp. 155–192.
185. Nof D. The translation of isolated cold eddies on a sloping bottom // Deep Sea Res. 1983. Vol. 30. Pp. 171–182.

186. Nof D. Oscillatory drift of deep cold eddies // Deep Sea Res. 1984. Vol. 31. Pp. 1395–1414.

187. Swaters G. E., Flierl G. R. Dynamics of ventilated coherent cold eddies on a sloping bottom // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 223. Pp. 565–587.

188. Gent P. R., McWilliams J. C. The instability of barotropic circular vortices // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1986. Vol. 35. Pp. 209–233.

189. Miyazaki T., Hanazaki H. Baroclinic instability of Kirchhoff's elliptic vortex // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 261. Pp. 253–271.

190. Miyazaki T., Imai T., Fukumoto Y. 3-dimensional instability of Kirchhoff elliptic vortex // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. Pp. 195–202.

191. Le Dizès S. Non-axisymmetric vortices in two-dimensional flows // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 406. Pp. 175–198.

192. Balmforth N. J., Llewellyn Smith S. G., Young W. R. Disturbing vortices // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 426. Pp. 95–133.

193. Eloy C., Le Dizès S. Stability of the Rankine vortex in a multipolar strain field // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13. P. 660.

194. Le Dizès S., Laporte F. Theoretical predictions for the elliptical instability in a two-vortex flow // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 471. Pp. 169–201.

195. Harvey B. J., Ambaum M. H. P. Perturbed Rankine vortices in surface quasi-geostrophic dynamics // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2011. Vol. 105. Pp. 377–391.

196. Lacaze L., Birbaud A. L., Le Dizès S. Elliptic instability in a Rankine vortex with axial flow // Phys. Fluids. 2005. Vol. 17. P. 017101.

197. Perrot X., Carton X. Instability of a two-step Rankine vortex in a reduced gravity QG model // Fluid Dyn. Res. 2014. Vol. 46. P. 031417.

198. Protas B., Elcrat A. Linear stability of Hill's vortex to axisymmetric perturbations // J. Fluid Mech. 2016. Vol. 799. Pp. 579–602.

199. Neu J. C. The dynamics of a columnar vortex in an imposed strain // Phys. Fluids. 1984. Vol. 27. Pp. 2397–2402.

200. Dritschel D. G. The stability of elliptical vortices in an external straining flow // J. Fluid Mech. 1990. Vol. 210. Pp. 223–261.

201. Bayly B. J., Holm D. D., Lifschitz A. Three-dimensional stability of elliptical vortex columns in external strain flows // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1996. Vol. 354. Pp. 895–926.

202. Mitchell T. B., Rossi L. F. The evolution of Kirchhoff elliptic vortices // Phys. Fluids. 2008. Vol. 20. P. 054103.

203. Kida S. Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow // J. Phys. Soc. Jpn. 1981.

Vol. 50. Pp. 3517–3520.

204. Bertozzi A. L. Heteroclinic orbits and chaotic dynamics in planar fluid flows // SIAM J. Math. Anal. 1988. Vol. 19. Pp. 1271–1294.

205. Dhanak M. R., Marshall M. P. Motion of an elliptic vortex under applied periodic strain // Phys. Fluids. 1993. Vol. 5. Pp. 1224–1230.

206. Ide K., Wiggins S. The dynamics of elliptically shaped regions of uniform vorticity in time-periodic, linear external velocity fields // Fluid Dyn. Res. 1995. Vol. 15. Pp. 205–235.

207. Riccardi G., Piva R. Motion of an elliptical vortex under rotating strain: conditions for asymmetric merging // Fluid Dyn. Res. 1998. Vol. 23. Pp. 63–88.

208. Friedland L. Control of Kirchhoff vortices by a resonant strain // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59. P. 4106.

209. Lebedev V. G. Qualitative Analysis of a Joint Dynamics of Kirchhoff and a Point Vortices // Regul. Chaotic Dyn. 1999. Vol. 4. Pp. 70–81.

210. Riccardi G., Piva R. The interaction of an elliptical patch with a point vortex // Fluid Dyn. Res. 2000. Vol. 27. Pp. 269–289.

211. Riccardi G. Motion of an elliptical uniform vortex outside a circular cylinder // Regul. Chaotic Dyn. 2004. Vol. 9. Pp. 399–415.

212. Borisov A. V., Mamaev I. S. Interaction between Kirchhoff Vortices and Point Vortices in an Ideal Fluid // Regul. Chaotic Dyn. 2007. Vol. 12. Pp. 68–80.

213. Goldman D., McCann R. J. Chaotic response of the 2D semi-geostrophic and 3D quasi-geostrophic equations to gentle periodic forcing // Nonlinearity. 2008. Vol. 21. Pp. 1455–1470.

214. Polvani L. M., Wisdom J. Chaotic Lagrangian trajectories around an elliptical vortex patch embedded in a constant and uniform background shear flow // Phys. Fluids A. 1990. Vol. 2. Pp. 123–126.

215. Polvani L. M., Wisdom J., DeJong E., Ingersoll A. P. Simple Dynamical Models of Neptune's Great Dark Spot // Science. 1990. Vol. 249. Pp. 1393–1398.

216. Dahleh M. D. Exterior flow of the Kida ellipse // Phys. Fluids A. 1992. Vol. 4. Pp. 1979–1985.

217. Mied R. P., Kirwan A. D., Lindemann G. J. Rotating Modons over Isolated Topographic Features // J. Phys. Oceanogr. 1992. Vol. 22. Pp. 1569–1582.

218. Sokolovskiy M. A., Verron J. Four-vortex motion in the two layer approximation: Integrable case // Regul. Chaotic Dyn. 2000. Vol. 5. Pp. 413–436.

219. Newton P. K. The N-vortex problem: analytical techniques. Springer, 2001.

220. Sokolovskiy M. A., Verron J. Dynamics of triangular two-layer vortex structures with zero total intensity // Regul. Chaotic Dyn. 2002. Vol. 7. Pp. 435–472.

221. Соколовский М. А., Веррон Ж. Новые стационарые решения задачи о трех вихрях в двухслойной жидкости // ДАН. 2002. Vol. 383. Pp. 61–66.
222. Kurakin L. G., Yudovich V. I. The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // Chaos. 2002. Vol. 12. Pp. 574–595.
223. Kurakin L. G. On nonlinear stability of the regular vortex systems on a sphere // Chaos. 2004. Vol. 14. P. 592.
224. Соколовский М. А., Веррон Ж. Некоторые свойства движения A+1 вихрей в двухслойной вращающейся жидкости // Нелинейная динамика. 2006. Vol. 2. Pp. 27–54.
225. Jamaloodeen M. I., Newton P. K. Two-layer quasigeostrophic potential vorticity model // J. Math. Phys. 2007. Vol. 48. P. 065601.
226. Newton P. K. The N-vortex problem on a sphere: geophysical mechanisms that break integrability // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. Pp. 137–149.
227. Sokolovskiy M. A., Koshel K. V., Carton X. Baroclinic multipole evolution in shear and strain // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2011. Vol. 105. Pp. 506–535.
228. Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V. Nonlinear Stability Analysis of a Regular Vortex Pentagon Outside a Circle // Regul. Chaotic Dyn. 2012. Vol. 17. Pp. 385–396.
229. Sokolovskiy M., Koshel K., Verron J. Three-vortex quasi-geostrophic dynamics in a two-layer fluid. Part 1. Analysis of relative and absolute motions // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 717. Pp. 232–254.
230. Koshel K. V., Sokolovskiy M. A., Verron J. Three-vortex quasi-geostrophic dynamics in a two-layer fluid. Part 2. Regular and chaotic advection around the perturbed steady states // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 717. Pp. 255–280.
231. Jamaloodeen M. I. Integrable two layer point vortex motion on the half plane // J. Geom. Phys. 2014. Vol. 84. Pp. 55–72.
232. Kurakin L. G. Influence of annular boundaries on Thomson's vortex polygon stability // Chaos. 2014. Vol. 24. P. 023105.
233. Kizner Z. On the stability of two-layer geostrophic point-vortex multipoles // Phys. Fluids. 2014. Vol. 26. P. 046602.
234. Куракин Л. Г., Островская И. В., Соколовский М. А. Об устойчивости дискретных вихревых мультиполей в однородной и двухслойной вращающейся жидкости // ДАН. 2015. Vol. 462. Pp. 161–167.
235. Taylor C. K., Llewellyn Smith S. G. Dynamics and transport properties of three surface quasigeostrophic point vortices // Chaos. 2016. Vol. 26. P. 113117.
236. Onsager L. Statistical hydrodynamics // Il Nuovo Cimento. 1949. Vol. 6. Pp. 279–287.

237. Carnevale G. F., McWilliams J. C., Pomeau Y. et al. Evolution of vortex statistics in 2-dimensional turbulence // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 66. Pp. 2735–2737.

238. Weiss J. B., Provenzale A., McWilliams J. C. Lagrangian dynamics in high-dimensional point-vortex systems // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10. Pp. 1929–1941.

239. Bécu E., Pavlov V. Evolution of localized vortices in the presence of stochastic perturbations // Nonlin. Processes Geophys. 2006. Vol. 13. Pp. 41–51.

240. Benzi R., Colella M., Briscolini M., Santangelo P. A simple point vortex model for two dimensional decaying turbulence // Phys. Fluids. 1992. Vol. 4. P. 1036.

241. Marmanis H. The kinetic theory of point vortices // Proc. R. Soc. A. 1998. Vol. 454. Pp. 587–606.

242. Chavanis P.-H. Systematic drift experienced by a point vortex in two-dimensional turbulence // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. Pp. R1199–R1202.

243. Chavanis P.-H., Sire C. Statistics of velocity fluctuations arising from a random distribution of point vortices: The speed of fluctuations and the diffusion coefficient // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. Pp. 490–506.

244. Chavanis P.-H. Kinetic theory of point vortices: Diffusion coefficient and systematic drift // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 026309.

245. Newton P. K., Mezic I. Non-equilibrium statistical mechanics for a vortex gas // J. Turbul. 2002. Vol. 3. P. 052.

246. Yatsuyanagi Y., Kiwamoto Y., Tomita H. et al. Dynamics of two-sign point vortices in positive and negative temperature states // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 94.

247. Chavanis P. Kinetic theory of two-dimensional point vortices with collective effects // J. Stat. Mech.-Theory Exp. 2012. Vol. 2012. P. P02019.

248. Esler J. G., Ashbee T. L., Mcdonald N. R. Statistical mechanics of a neutral point-vortex gas at low energy // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 88. P. 012109.

249. Pavlov V., Buisine D., Goncharov V. Formation of vortex clusters on a sphere // Nonlin. Processes Geophys. 2001. Vol. 8. Pp. 9–19.

250. Kiessling M. K. H., Wang Y. Onsager's Ensemble for Point Vortices with Random Circulations on the Sphere // J. Stat. Phys. 2012. Vol. 148. Pp. 892–932.

251. Dritschel D. G., Lucia M., Poje A. C. Ergodicity and spectral cascades in point vortex flows on the sphere // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91. P. 063014.

252. Dritschel D. G., Boatto S. The motion of point vortices on closed surfaces // Proc. R. Soc. A. 2015. Vol. 471. P. 20140890.

253. Carton X. Hydrodynamical modeling of oceanic vortices // Surv. Geophys. 2001. Vol. 22.

Pp. 179–263.

254. Carton X., Le Cann B., Serpette A., Dubert J. Interactions of surface and deep anticyclonic eddies in the Bay of Biscay // J. Mar. Syst. 2013. Vol. 109. Pp. S45–S59.

255. Manucharyan G., Timmermans M.-L. Generation and Separation of Mesoscale Eddies from Surface Ocean Fronts // J. Phys. Oceanogr. 2013. Vol. 43. Pp. 2545–2562.

256. Добрицын А. А. Локализованные вихревые образования в окрестности особой точки течения // Океанология. 1991. Vol. 31. Pp. 373–376.

257. Гряник В. М., Добрицын А. А. Локализованные вихри в поле волны Россби // Изв. РАН. ФАО. 1993. Vol. 29. Pp. 328–331.

258. Шагалов С. В., Реутов В. П., Рыбушкина Г. В. Асимптотический анализ перехода к турбулентности и хаотической адвекции в сдвиговых зональных течениях на бета-плоскости // Изв. РАН. ФАО. 2010. Т. 46. С. 105–118.

259. Должанский Ф. В., Крымов В. А., Манин Д. Ю. Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений // УФН. 1990. Vol. 160. Pp. 1–47.

260. Behringer R. P., Meyers S. D., Swinney H. L. Chaos and mixing in a geostrophic flow // Phys. Fluids. 1991. Vol. 3. Pp. 1243–1249.

261. Pierrehumbert R. T. Chaotic Mixing of Tracer and Vorticity by Modulated Traveling Rossby Waves // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1991. Vol. 58. Pp. 285–320.

262. del-Castillo-Negrete D., Morrison P. Chaotic transport by Rossby waves in shear flow // Phys. Fluids. 1993. Vol. 5. Pp. 948–965.

263. Joseph B. Chaotic advection by Rossby-Haurwitz waves // Fluid Dyn. Res. 1996. Vol. 18. Pp. 1–16.

264. Ngan K., Shepherd T. G. Chaotic mixing and transport in Rossby-wave critical layers // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 334. Pp. 315–351.

265. Balasuriya S. Meridional and Zonal Wavenumber Dependence in Tracer Flux in Rossby Waves // Fluids. 2016. Vol. 1. P. 30.

266. Howard J. E., Hons S. M. Stochasticity and reconnection in Hamiltonian systems // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 29. Pp. 418–421.

267. Chirikov B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. Pp. 263–379.

268. Samelson R. M. Fluid exchange across a meandering jet // J. Phys. Oceanogr. 1992. Vol. 22. Pp. 431–440.

269. Мельников В. К. О некоторых случаях сохранения условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1965. Т. 165. С. 1245–1248.

270. Мельников В. К. Об одном семействе условно периодических решений системы Гамильтона // ДАН СССР. 1968. Т. 181. С. 546–549.
271. Finn J. M., del-Castillo-Negrete D. Lagrangian chaos and Eulerian chaos in shear flow dynamics // Chaos. 2001. Vol. 11. P. 816.
272. Finn J. M. The effect of Lagrangian chaos on locking bifurcations in shear flows // Chaos. 2002. Vol. 12. P. 508.
273. Goncharov V. P., Pavlov V. I. Large-scale vortex structures in shear flows // Eur. J. Mech. B. Fluids. 2000. Vol. 19. Pp. 831–854.
274. Dutkiewicz S., Paldor N. On the Mixing Enhancement in a Meandering Jet Due to the Interaction with an Eddy // J. Phys. Oceanogr. 1994. Vol. 24. Pp. 2418–2423.
275. Knobloch E., Weiss J. B. Chaotic advection by modulated traveling waves // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36. Pp. 1522–1524.
276. Weiss J. B., Knobloch E. Mass transport and mixing by modulated travelling waves // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 40. Pp. 2579–2589.
277. Rogerson A. M., Miller P. D., Pratt L. J., Jones C. K. R. T. Lagrangian motion and fluid exchange in a barotropic meandering je // J. Phys. Oceanogr. 1999. Vol. 29. Pp. 2635–2655.
278. Prants S. V., Budyansky M. V., Uleysky M. Y., Zaslavsky G. M. Chaotic mixing and transport in a meandering jet flow // Chaos. 2006. Vol. 16. P. 033117.
279. Haynes P. H., Poet D. A., Shuckburgh E. F. Transport and mixing in kinematic and dynamically consistent flows // J. Atmos. Sci. 2007. Vol. 64. Pp. 3640–3651.
280. Uleysky M. Y., Budyansky M. V., Prants S. V. Effect of dynamical traps on chaotic transport in a meandering jet flow // Chaos. 2007. Vol. 17. P. 043105.
281. Budyansky M. V., Uleysky M. Y., Prants S. V. Detection of barriers to cross-jet Lagrangian transport and its destruction in a meandering flow // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. P. 056215.
282. Улейский М. Ю., Будянский М. В., Пранц С. В. Хаотический поперечный транспорт в двумерных струйных потоках // ЖЭТФ. 2010. Т. 138. С. 1175–1188.
283. Uleysky M. Y., Budyansky M. V., Prants S. V. Mechanism of destruction of transport barriers in geophysical jets with Rossby waves // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81. P. 017202.
284. Rypina I. I., Brown M. G., Beron-Vera F. J. et al. On the Lagrangian dynamics of atmospheric zonal jets and the permeability of the stratospheric polar vortex // J. Atmos. Sci. 2007. Vol. 64. Pp. 3595–3610.
285. Yuan G. C., Pratt L. J., Jones C. K. R. T. Barrier destruction and Lagrangian predictability at depth in a meandering jet // Dyn. Atmos. Oceans. 2002. Vol. 35. Pp. 41–61.
286. Yuan G. C., Pratt L. J., Jones C. K. R. T. Cross-jet Lagrangian transport and mixing in a

2 1/2-layer model // J. Phys. Oceanogr. 2004. Vol. 34. Pp. 1991–2005.

287. Broomhead D. S., Ryrie S. C. Particle paths in wavy vortices // Nonlinearity. 1988. Vol. 1. Pp. 409–434.
288. Cox S. M., Drazin P. G., Ryrie S. C., Slater K. Chaotic advection of irrotational flows and of waves in fluids // J. Fluid Mech. 1990. Vol. 214. Pp. 517–534.
289. Ryrie S. C. Mixing by chaotic advection in a class of spatially periodic flows // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 236. Pp. 1–26.
290. Ashwin P., King G. P. A study of particle paths in non-axisymmetric Taylor-Couette flows // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 338. Pp. 341–362.
291. Rudolph M., Shinbrot T., Lueptow R. M. A model of mixing and transport in wavy Taylor-Couette flow // Physica D. 1998. Vol. 121. Pp. 163–174.
292. Козлов В. Ф. Метод контурной динамики в модельных задачах о топографическом циклогенезе в океане // Изв. АН СССР. ФАО. 1983. Т. 19. С. 845–854.
293. Козлов В. Ф. Модели топографических вихрей в океане. Москва: Наука, 1983.
294. Зырянов В. Н. Топографические вихри в динамике морских течений. Москва: ИВП РАН, 1995.
295. Zyryanov V. N. Topographic eddies in a stratified ocean // Regul. Chaotic Dyn. 2006. Vol. 11. Pp. 491–521.
296. Зырянов В. Н. Вторичные тороидальные вихри Тейлора над возмущениями дна во вращающейся жидкости // Доклады академии наук. 2009. Vol. 427. Pp. 192–198.
297. Zyryanov V. N. Secondary toroidal vortices above seamounts // J. Mar. Res. 2011. Vol. 69. Pp. 463–481.
298. Reznik G., Dewar W. An analytical theory of distributed axisymmetric barotropic vortices on the beta plane // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 269. Pp. 301–321.
299. Zavala Sansón L., van Heijst G. J. F. Ekman effects in a rotating flow over bottom topography // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 471. Pp. 239–255.
300. Iacono R. Stable Shallow Water Vortices over Localized Topography // J. Phys. Oceanogr. 2010. Vol. 40. Pp. 1143–1150.
301. Haidvogel D. B., Beckmann A., Chapman D. C., Lin R. Q. Numerical Simulation of Flow Around a Tall Isolated Seamount. Part 2. Resonant Generation of Trapped Waves // J. Phys. Oceanogr. 1993. Vol. 23. Pp. 2373–2391.
302. Toole J. M., Polzin K. L., Schmitt R. W. Estimates of Diapycnal Mixing in the Abyssal Ocean // Science. 1994. Vol. 264. Pp. 1120–1123.
303. Toole J. M., Schmitt R. W., Polzin K. L., Kunze E. Near-boundary mixing above the flanks

of a midlatitude seamount // J. Geophys. Res. 1997. Vol. 102. Pp. 947–959.

304. Kunze E., Toole J. M. Tidally driven vorticity, diurnal shear, and turbulence atop Fieberling Seamount // J. Phys. Oceanogr. 1997. Vol. 27. Pp. 2663–2693.
305. Ledwell J., Montgomery E., Polzin K. et al. Evidence for enhanced mixing over rough topography in the abyssal ocean // Nature. 2000. Vol. 403. Pp. 179–182.
306. Wunsch C., Ferrari R. Vertical Mixing, Energy, and the General Circulation of the Oceans // Annu. Rev. Fluid Mech. 2004. Vol. 36. Pp. 281–314.
307. Mohn C., White M., Bashmachnikov I. et al. Dynamics at an elongated, intermediate depth seamount in the North Atlantic (Sedlo Seamount, 40 degrees 20 ' N, 26 degrees 40 ' W) // Deep-Sea Res. Part II-Top. Stud. Oceanogr. 2009. Vol. 56. Pp. 2582–2592.
308. Zavala Sansón L., Barbosa Aguiar A. C., van Heijst G. J. F. Horizontal and vertical motions of barotropic vortices over a submarine mountain // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 695. Pp. 173–198.
309. Bashmachnikov I., Loureiro C. M., Martins A. Topographically induced circulation patterns and mixing over Condor seamount // Deep Sea Res. 2013. Vol. 98. Pp. 38–51.
310. Li Y., Xu Y. Penetration depth of diapycnal mixing generated by wind stress and flow over topography in the northwestern Pacific // J. Geophys. Res. 2014. Vol. 119. Pp. 5501–5514.
311. Stewartson K. On almost rigid rotations // J. Fluid Mech. 1957. Vol. 3. Pp. 17–26.
312. Stewartson K. On slow transverse motion of a sphere through a rotating fluid // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30. Pp. 357–369.
313. Kamenkovich V. M. Fundamentals of Ocean Dynamics. Elsevier B. V., 1977. Vol. 16 of Elsevier Oceanography Ser. P. 249.
314. Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics 2 ed. New York: Springer, 1987.
315. Fedoryuk M. V. Asymptotic analysis: linear ordinary differential equations. Springer–Verlag, 1993. P. 363.
316. Klyatskin V. I. The imbedding method in statistical boundary-value wave problems, Ed. by E. Wolf. Elsevier B. V., 1994. Vol. 33 of Book Series: Progress in Optics. Pp. 1–133.
317. Casti J., Kalaba R. Imbedding methods in applied mathematics. Reading, MA.: Addison-Wesley Publishing Company, 1973. P. 317.
318. Sokolovskiy M. A., Zyryanov V. N., Davies P. A. On the influence of an isolated submerged obstacle on a barotropic tidal flow // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1998. Vol. 88. Pp. 1–30.
319. Гледзер А. Е. Захват и высвобождение в вихревых структурах океана // Изв. РАН. ФАО. 1999. Т. 35. С. 838–845.
320. Козлов В. Ф., Кошель К. В. Некоторые особенности хаотизации пульсирующего баротропного потока над осесимметричной подводной возвышенностью // Изв. РАН. ФАО.

2001. Т. 37. С. 378–389.

321. Кошель К. В., Израильский Ю. Г., Степанов Д. В. Определение оптимальной частоты возмущения в задаче о хаотическом транспорте частиц // Доклады АН. 2006. Т. 407. С. 773–776.

322. Verron J. Topographic eddies in temporally varying oceanic flows // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1986. Vol. 35. Pp. 257–276.

323. van Geffen J. H. G. M., Davies P. A. Interaction of a monopolar vortex with a topographic ridge // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1999. Vol. 90. Pp. 1–41.

324. Dewar W. K. Baroclinic eddy interaction with isolated topography // J. Phys. Oceanogr. 2002. Vol. 32. Pp. 2789–2805.

325. Herbette S., Morel Y., Arhan M. Erosion of a surface vortex by a seamount // J. Phys. Oceanogr. 2003. Vol. 33. Pp. 1664–1679.

326. An B. W., McDonald N. R. Coastal currents and eddies and their interaction with topography // Dyn. Atmos. Oceans. 2005. Vol. 40. Pp. 237–253.

327. Herbette S., Morel Y., Arhan M. Erosion of a surface vortex by a seamount on the beta plane // J. Phys. Oceanogr. 2005. Vol. 35. Pp. 2012–2030.

328. Sutyrin G., Herbette S., Carton X. Deformation and splitting of baroclinic eddies encountering a tall seamount // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2011. Vol. 105. Pp. 478–505.

329. Candon S., Marshall J. S. Vortex ring deformation, capture, and entrainment by a columnar vortex // Phys. Fluids. 2012. Vol. 24. P. 093604.

330. Hinds A. K., Johnson E. R., McDonald N. R. Beach vortices near circular topography // Phys. Fluids. 2016. Vol. 28. P. 106602.

331. Richardson P. L. Anticyclonic eddies generated near the Corner Rise seamounts // J. Mar. Res. 1980. Vol. 38. Pp. 673–686.

332. Boyer D. L., Zhang X. Z. Motion of oscillatory currents past isolated topography // J. Phys. Oceanogr. 1990. Vol. 20. Pp. 1425–1448.

333. Chapman D. C., Haidvogel D. B. Formation of taylor caps over a tall isolated seamount in a stratified ocean // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1992. Vol. 64. Pp. 1–4.

334. Baines P. G., Smith R. B. Upstream stagnation points in stratified flow past obstacles // Dyn. Atmos. Oceans. 1993. Vol. 18. Pp. 105–113.

335. Baines P. G. Topographic effects in stratified flows. Cambridge University Press, 1993.

336. Pratt L. J., Whitehead J. A. Nonlinear Topographic Effects in the Ocean and Atmosphere. Springer, 2008.

337. Соколовский М. А. Устойчивость осесимметричного трехслойного вихря // Изв. РАН.

ФАО. 1997. Vol. 33. Pp. 16–26.

338. Sokolovskiy M. A., Carton X. J., Filyushkin B. N., Yakovenko O. I. Interaction between a surface jet and subsurface vortices in a three-layer quasi-geostrophic model // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2016. Vol. 110. Pp. 201–223.
339. Izrailsky Y. G., Kozlov V. F., Koshel K. V. Some specific features of chaotization of the pulsating barotropic flow over elliptic and axisymmetric sea-mounts // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16. Pp. 3173–3190.
340. Johnson E. R., McDonald N. R. The point island approximation in vortex dynamics // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2005. Vol. 99. Pp. 49–60.
341. Reznik G. M. Dynamics of Localized Vortices on the Beta Plane // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2010. Vol. 46. Pp. 784–797.
342. Reznik G. M., Kizner Z. Singular vortices in regular flows // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. Pp. 65–75.
343. Carton X., Chérubin L., Paillet J. et al. Meddy coupling with a deep cyclone in the Gulf of Cadiz // J. Mar. Syst. 2002. Vol. 32. Pp. 13–42.
344. Wang G. H., Dewar W. K. Meddy-seamount interactions: Implications for the Mediterranean salt tongue // J. Phys. Oceanogr. 2003. Vol. 33. Pp. 2446–2461.
345. Filyushkin B. N., Sokolovskiy M. A., Kozhelupova N. G., Vagina I. M. Reflection of intrathermocline eddies on the ocean surface // Dokl. Earth Sci. 2011. Vol. 439. Pp. 986–989.
346. Filyushkin B. N., Sokolovskiy M. A. Modeling the evolution of intrathermocline lenses in the Atlantic Ocean // J. Mar. Res. 2011. Vol. 69, no. 2-3. Pp. 191–220.
347. Козлов В. Ф., Кошель К. В. Баротропная модель хаотической адвекции в фоновых течениях // Изв. РАН. ФАО. 1999. Т. 35. С. 137–144.
348. Козлов В. Ф., Кошель К. В. Об одной модели хаотического переноса в баротропном фоновом течении // Изв. РАН. ФАО. 2000. Т. 36. С. 119–128.
349. Кошель К. В., Пранц С. В. Хаотическая адвекция в океане. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008.
350. Aref H. Stirring by chaotic advection // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 143. Pp. 1–21.
351. Wiggins S. Chaotic Transport in Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 1992.
352. Aref H. The development of chaotic advection // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. Pp. 1315–1325.
353. Lichtenberg A., Lieberman M. Regular and Stochastic Motion. New York: Springer-Verlag, 1983.
354. Zaslavsky G. M. Physics of Chaos in Hamiltonian Dynamics. London: Imperial College Press, 1998.

355. Mendoza C., Mancho A. M., Rio M. The turnstile mechanism across the Kuroshio current: analysis of dynamics in altimeter velocity fields // Nonlin. Processes Geophys. 2010. Vol. 17. Pp. 103–111.

356. Rypina I. I., Scott S. E., Pratt L. J., Brown M. G. Investigating the connection between complexity of isolated trajectories and Lagrangian coherent structures // Nonlin. Processes Geophys. 2011. Vol. 18. Pp. 977–987.

357. Titaud O., Brankart J., Verron J. On the use of Finite-Time Lyapunov Exponents and Vectors for direct assimilation of tracer images into ocean models // Tellus. 2011. Vol. 63A. Pp. 1038–1051.

358. Peacock T., Haller G. Lagrangian coherent structures: The hidden skeleton of fluid flows // Physics Today. 2013. Vol. 66. Pp. 41–47.

359. Nazarenko S. V., Zakharov V. E. Kinetic equation for point vortices in a shear flow // Physica D. 1992. Vol. 56. Pp. 381–388.

360. Babiano A., Boffetta G., Provenzale A., Vulpiani A. Chaotic advection in point vortex models and 2-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1994. Vol. 6. Pp. 2465–2474.

361. Babiano A., Provenzale A., Vulpiani A. Chaotic Advection, Tracer Dynamics and Turbulent Dispersion // Physica D. 1994. Vol. 76. Pp. R7–R8.

362. Jin D. Z., Dubin D. H. E. Point vortex dynamics within a background vorticity patch // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13. Pp. 677–691.

363. Lim C., Nebus J. Vorticity, Statistical Mechanics, and Monte Carlo Simulation. Springer, 2007. P. 290.

364. Новиков Е. А. Динамика и статистика системы вихрей // ЖЭТФ. 1975. Vol. 68. Pp. 1868–1882.

365. Aref H. Motion of three vortices // Phys. Fluids. 1979. Vol. 22. Pp. 393–400.

366. Aref H., Rott N., Thomann H. Gröbli's solution of the three-vortex problem // Annu. Rev. Fluid Mech. 1992. Vol. 24. Pp. 1–20.

367. Price T. Chaotic scattering of two identical point vortex pairs // Phys. Fluids A. 1993. Vol. 5. Pp. 2479–2483.

368. Leoncini X., Kuznetsov L., Zaslavsky G. Motion of three vortices near collapse // Phys. Fluids. 2000. Vol. 12. Pp. 1911–1927.

369. Новиков Е. А., Седов Ю. Б. Коллапс вихрей // ЖЭТФ. 1979. Vol. 77. Pp. 558–597.

370. Tophoj L., Aref H. Chaotic scattering of two identical point vortex pairs revisited // Phys. Fluids. 2008. Vol. 20. P. 093605.

371. Perrot X., Carton X. Point-vortex Interaction in an oscillatory deformation field: Hamiltonian

dynamics, harmonic resonance and transition to chaos // Discrete Cont. Dyn.-B. 2009. Vol. 11. Pp. 971–995.

372. Yanovsky V. V., Tur A. V., Kulik K. N. Singularities motion equations in 2-dimensional ideal hydrodynamics of incompressible fluid // Phys. Lett. A. 2009. Vol. 373. Pp. 2484–2487.

373. Кулик К. Н., Тур А. В., Яновский В. В. Взаимодействие точечного и дипольного вихрей в несжимаемой жидкости // Теор. мат. физика. 2010. Vol. 162. Pp. 459–480.

374. Tchieu A., Kanso E., Newton P. The finite-dipole dynamical system // Proc. R. Soc. A. 2012. Vol. 468. Pp. 3006–3026.

375. Llewellyn Smith S., Nagem R. J. Vortex pairs and dipoles // Regul. Chaotic Dyn. 2013. Vol. 18. Pp. 194–201.

376. Drotos G., Tel T., Kovacs G. Modulated point-vortex pairs on a rotating sphere: Dynamics and chaotic advection // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 87. P. 063017.

377. Drotos G., Tel T. On the Validity of the beta-Plane Approximation in the Dynamics and the Chaotic Advection of a Point Vortex Pair Model on a Rotating Sphere // J. Atmos. Sci. 2015. Vol. 72. Pp. 415–429.

378. Newton P. K. The dipole dynamical system // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2005. Vol. 2005(Suppl.). Pp. 692–699.

379. Cheng Hou Tsang A., Kanso E. Dipole Interactions in Doubly Periodic Domains // J. Nonlinear Sci. 2013. Vol. 23. Pp. 971–991.

380. Kanso E., Cheng Hou Tsang A. Dipole models of self-propelled bodies // Fluid Dyn. Res. 2014. Vol. 46. P. 061407.

381. Zannetti L. Vortex equilibrium in flows past bluff bodies // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 562. Pp. 151–171.

382. Elcrat A., Zannetti L. Models for inviscid wakes past a normal plate // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 708. Pp. 377–396.

383. Crowdy D., Marshall J. The motion of a point vortex around multiple circular islands // Phys. Fluids. 2005. Vol. 17. Pp. 1–13.

384. Crowdy D., Marshall J. The motion of a point vortex through gaps in walls // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 551. Pp. 31–48.

385. Makarov V., Bulgakov S. Regimes of near-wall vortex dynamics in potential flow through gaps // Phys. Fluids. 2008. Vol. 20. P. 086605.

386. Sutyrin G. G., Perrot X., Carton X. Integrable motion of a vortex dipole in an axisymmetric flow // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372. Pp. 5452–5457.

387. Stern M. E. Scattering of an eddy advected by a current towards a topographic obstacle //

J. Fluid Mech. 2000. Vol. 402. Pp. 211–223.

388. Smirnov L. A., Smirnov A. I. Scattering of two-dimensional dark solitons by a single quantum vortex in a Bose-Einstein condensate // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 92. P. 013636.
389. Budyansky M., Uleysky M., Prants S. Hamiltonian fractals and chaotic scattering of passive particles by a topographical vortex and an alternating current // Physica D. 2004. Vol. 195. Pp. 369–378.
390. Budyansky M., Uleysky M., Prants S. Chaotic scattering, transport, and fractals in a simple hydrodynamic flow // J. Exp. Theor. Phys. 2004. Vol. 99. Pp. 1017–1027.
391. Kuznetsov L., Zaslavsky G. M. Regular and chaotic advection in the flow field of a three-vortex system // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. Pp. 7330–7349.
392. Kuznetsov L., Zaslavsky G. M. Passive particle transport in three-vortex flow // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. Pp. 3777–3792.
393. Zaslavsky G. M. The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems. London: Imperial College Press, 2007.
394. Laforgia A., Leoncini X., Kuznetsov L., Zaslavsky G. M. Passive tracer dynamics in 4 point-vortex flow // Eur. Phys. J. B. 2001. Vol. 20. Pp. 427–440.
395. Rom-Kedar V., Leonard A., Wiggins A. An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow // J. Fluid Mech. 1990. Vol. 214. Pp. 347–394.
396. Boffetta G., Celani A., Franzese P. Trapping of passive tracers in a point vortex system // J. Phys. A: Math. Gen. 1996. Vol. 29. Pp. 3749–3759.
397. Milne–Thomson L. Theoretical Hydrodynamics 5 ed. Dover Publications, 1996.
398. Noack B. R., Mezic I., Tadmor G., Banaszuk A. Optimal mixing in recirculation zones // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16. Pp. 867–888.
399. Balasuriya S. Optimal perturbation for enhanced chaotic transport // Physica D. 2005. Vol. 202. Pp. 155–176.
400. Morel Y., McWilliams J. Evolution of Isolated Interior Vortices in the Ocean // J. Phys. Oceanogr. 1997. Vol. 27. Pp. 727–748.
401. Reinaud J. N., Carton X. Existence, stability and formation of baroclinic tripoles in quasi-geostrophic flows // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 785. Pp. 1–30.
402. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Ventilation of a trapped topographic eddy by a captured free eddy // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2011. Vol. 47, no. 2. Pp. 780–791.
403. Tang S., Aubry N. On the symmetry breaking instability leading to vortex shedding // Phys. Fluids. 1997. Vol. 9. Pp. 2250–2561.
404. Protas B. Linear feedback stabilization of laminar vortex shedding based on a point vortex

model // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16. P. 4473.

405. Protas B. Center manifold analysis of a point vortex model of vortex shedding with control // Physica D. 2007. Vol. 228. Pp. 179–187.
406. Brons M., Bisgaard A. V. Topology of vortex creation in the cylinder wake // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. Pp. 299–303.
407. Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., Kelly S. D. The Hamiltonian structure of a two-dimensional rigid circular cylinder interacting dynamically with N point vortice // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. P. 1214.
408. Protas B. Higher-order Föppl models of steady wake flows // Phys. Fluids. 2006. Vol. 18. P. 117109.
409. Shashikanth B. N. Symmetric pairs of point vortices interacting with a neutrally buoyant two-dimensional circular cylinder // Phys. Fluids. 2006. Vol. 18. P. 127103.
410. Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M. Dynamic interaction of point vortices and a two-dimensional cylinder // J. Math. Phys. 2007. Vol. 48. P. 065403.
411. Chamoun G. C., Schilder F., Brons M. Stabilization of vortices in the wake of a circular cylinder using harmonic forcing // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 83. P. 066308.
412. Vasconcelos G. L., Moura M. N., Schakel A. M. J. Vortex motion around a circular cylinder // Phys. Fluids. 2011. Vol. 23. P. 123601.
413. Aref H., Brons M. On stagnation points and streamline topology in vortex flows // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 370. Pp. 1–27.
414. Roenby J., Aref H. Chaos in body-vortex interactions // Proc. R. Soc. Lond. A. 2010. Vol. 466. Pp. 1871–1891.
415. Angilella J.-R. Asymptotic properties of wall-induced chaotic mixing in point vortex pairs // Phys. Fluids. 2011. Vol. 23, no. 11. P. 113602.
416. Ottino J. M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport. Cambridge University Press, 1989. P. 396.
417. Hopfinger E. J., van Heijst G. J. F. Vortices in rotating fluids // Annu. Rev. Fluid Mech. 1993. Vol. 25. P. 241.
418. Prants S., Andreev A., Uleysky M., Budyansky M. Lagrangian study of temporal changes of a surface flow through the Kamchatka Strait // Ocean Dynamics. 2014. Vol. 64. Pp. 771–780.
419. Pingree R., Le Cann B. Three anticyclonic Slope Water Oceanic eDDIES (SWODDIES) in the Southern Bay of Biscay in 1990 // Deep-Sea Research. 1992. Vol. 39. Pp. 1147–1175.
420. Allou A., Forget P., Devenon J. Submesoscale vortex structures at the entrance of the Gulf of Lions in the Northwestern Mediterranean Sea // Continental Shelf Research. 2010. Vol. 30.

Pp. 724–732.

421. Suh Y. K. Periodic motion of a point vortex in a corner subject to a potential flow // J. Phys. Soc. Jpn. 1993. Vol. 62. Pp. 3441–3445.
422. Johnson E. R., McDonald N. R. The motion of a vortex near a gap in a wall // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16. Pp. 462–469.
423. Johnson E. R., McDonald N. R. Vortices near barriers with multiple gaps // J. Fluid Mech. 2005. Vol. 531. Pp. 335–358.
424. Lee W. K., Taylor P. H., Borthwick A. G. L., Chuenkhum S. Vortex-induced chaotic mixing in wavy channels // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 654. Pp. 501–538.
425. Milne–Thomson L. Theoretical hydrodynamics. London: Macmillan, 1968.
426. Lin C. On the motion of vortices in two dimensions. I. Existence of the Kirchhoff–Routh function // Proc. Nat. Acad. Sci. 1941. Vol. 27. Pp. 570–575.
427. Saffman P. G. Vortex dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
428. Sheremet V. A. Hysteresis of a western boundary current leaping across a gap // J. Phys. Oceanogr. 2001. Vol. 31. Pp. 1247–1259.
429. McDonald N. R., Johnson E. R. Gap-Leaping Vortical Currents // J. Phys. Oceanogr. 2009. Vol. 39. Pp. 2665–2674.
430. Verjus R., Angilella J. Critical Stokes number for the capture of inertial particles by recirculation cells in two-dimensional quasisteady flows // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 93. P. 053116.
431. Гинзбург А. И., Костяной А. Г., Павлов А. М., Федоров К. Н. Лабораторное воспроизведение грибовидных течений (вихревых диполей) в условиях вращения и стратификации // Изв. АН СССР. ФАО. 1987. Vol. 23. Pp. 170–178.
432. Trieling R. R., van Wesenbeeck J. M. A., van Heijst G. J. F. Dipolar vortices in a strain flow // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10, no. 1. Pp. 144–158.
433. Chérubin L., Carton X., Dritschel D. G. Vortex Dipole Formation by Baroclinic Instability of Boundary Currents // J. Phys. Oceanogr. 2007. Vol. 37. Pp. 1661–1677.
434. Carton X., Ciani D., Verron J. et al. Vortex merger in surface quasi-geostrophy // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2016. Vol. 110. Pp. 1–22.
435. Гончаров В. П., Гряник В. М. Взаимодействие неоднородной вихревой пелены с дискретными вихрями и течениями // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Vol. 21. Pp. 1123–1131.
436. Kimura Y., Hasimoto H. Motion of two identical point vortices in a simple shear flow // J. Phys. Soc. Jpn. 1985. Vol. 11. Pp. 4069–4072.
437. Melander M. V., Zabusky N. J., Styczek A. S. A moment model for vortex interactions of the two-dimensional Euler equations. Part 1. Computational validation of a Hamiltonian

elliptical representation // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 167. Pp. 95–115.

438. Neu J. C. Vortices in complex scalar fields // Physica D. 1990. Vol. 43. Pp. 385–406.
439. Meacham S. P., Flierl G. R., Send U. Vortices in shear // Dyn. Atmos. Oceans. 1990. Vol. 14. Pp. 333–386.
440. Гряник В. М., Тевс М. В. Динамика сингулярных геострофических вихрей вблизи критических точек в N–слойной модели атмосферы (океана) // Изв. АН СССР. ФАО. 1991. Vol. 27. Pp. 733–745.
441. Legras B., Dritschel D. The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics. I: The basic state // Phys. Fluids. 1991. Vol. 3. Pp. 845–854.
442. Kida S., Takaoka M. Vortex reconnection // Annu. Rev. Fluid Mech. 1994. Vol. 26. Pp. 169–189.
443. Ngan K., Meacham S. P., Morrison P. J. Elliptical vortices in shear: Hamiltonian moment formulation and Melnikov analysis // Phys. Fluids. 1996. Vol. 8. Pp. 896–913.
444. Meacham S. P., Morrison P. J., Flierl G. R. Hamiltonian moment reduction for describing vortices in shear // Phys. Fluids. 1997. Vol. 9. Pp. 2310–2328.
445. Trieling R. R., Beckers M., van Heijst G. J. Dynamics of monopolar vortices in a strain flow // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 345. Pp. 165–201.
446. Vandermeirsh F., Morel Y., Sutyrin G. Resistance of a Coherent Vortex to a Vertical Shear // J. Phys. Oceanogr. 2002. Vol. 32. Pp. 3089–3100.
447. McKiver W. J., Dritschel D. G. The motion of a fluid ellipsoid in a general linear background flow // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 474. Pp. 147–173.
448. Liu Z., Roebber P. J. Vortex-Driven Sensitivity in Deformation Flow // J. Phys. Oceanogr. 2008. Vol. 65. Pp. 3819–3839.
449. Perrot X., Carton X. 2D vortex interaction in a non-uniform flow // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. Pp. 95–100.
450. Trieling R. R., Dam C. E. C., van Heijst G. J. Dynamics of two identical vortices in linear shear // Phys. Fluids. 2010. Vol. 22. P. 117104.
451. Жмур В. В. Дисковая модель мезомасштабного вихря в потоке со сдвигом скорости // Океанология. 1988. Vol. 28. Pp. 709–714.
452. Жмур В. В. Приповерхностные мезомасштабные вихревые структуры в стратифицированном океане // Океанология. 1989. Vol. 29. Pp. 28–32.
453. Жмур В. В., Панкратов К. К. Динамика полуэллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // Океанология. 1989. Vol. 29. Pp. 205–211.
454. Жмур В. В. Мезомасштабные вихри океана. Москва: ГЕОС, 2011. P. 289.

455. Kivshar Y. S., Luther-Davies B. Dark optical solitons: physics and applications // Phys. Rep. 1998. Vol. 298. Pp. 81–197.

456. Komineas S. Rotating Vortex Dipoles in Ferromagnets // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99. P. 117202.

457. Torres P. J., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J. et al. Dynamics of vortex dipoles in confined Bose–Einstein condensates // Phys. Lett. A. 2011. Vol. 375, no. 33. Pp. 3044–3050.

458. Stockhofe J., Middelkamp S., Kevrekidis P., Schmelcher P. Impact of anisotropy on vortex clusters and their dynamics // EPL. 2011. Vol. 93. P. 20008.

459. Ashwin J., Ganesh R. Coherent vortices in strongly coupled liquids // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 135001.

460. Middelkamp S., Torres P., Kevrekidis P. et al. Guiding-center dynamics of vortex dipoles in Bose-Einstein condensates // Phys. Rev. A. 2011. Vol. 84. P. 011605.

461. Torres P., Carretero-Gonzalez R., Middelkamp S. et al. Vortex interaction dynamics in trapped Bose-Einstein condensates // Commun. Pure Appl. Anal. 2011. Vol. 10. Pp. 1589–1615.

462. Navarro R., Carretero-Gonzalez R., Torres P. et al. Dynamics of a Few Corotating Vortices in Bose-Einstein Condensates // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 110. P. 225301.

463. Torres P. Mathematical Models with Singularities: A Zoo of Singular Creatures. Atlantis Press, 2015.

464. Moon G., Kwon W. J., Lee H., Shin Y.-I. Thermal friction on quantum vortices in a Bose-Einstein condensate // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 92. P. 051601.

465. Billam T. P., Reeves M. T., Bradley A. S. Spectral energy transport in two-dimensional quantum vortex dynamics // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 91. P. 023615.

466. Murray A. V., Groszek A. J., Kuopanportti P., Simula T. Hamiltonian dynamics of two same-sign point vortices // Phys. Rev. A. 2016. Vol. 93. P. 033649.

467. Kasamatsu K., Eto M., Nitta M. Short-range intervortex interaction and interacting dynamics of half-quantized vortices in two-component Bose-Einstein condensates // Phys. Rev. A. 2016. Vol. 93. P. 013615.

468. Faraday M. On a Peculiar Class of Acoustical Figures; and on Certain Forms Assumed by Groups of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1831. Vol. 121. Pp. 299–340.

469. Strutt r. B. R., John William. On the Maintenance of Vibrations by Forces of Double Frequency, and on the Propagation of Waves through a Medium endowed with a Periodic Structure // Philos. Mag. 1887. Vol. 24. Pp. 145–159.

470. Magnus W., Winkler S. Hill's equation. Interscience-Wiley, 1966. P. 135.

471. Prants S., Konkov L. Parametric instability and Hamiltonian chaos in cavity semiclassical electrodynamics // J. Exp. Theor. Phys. 1999. Vol. 88. Pp. 406–414.

472. Khomeriki G. Parametric resonance induced chaos in magnetic damped driven pendulum // Phys. Lett. A. 2016. Vol. 380. Pp. 2382–2385.

473. Klyatskin V. I., Koshel K. V. Numerical modeling of wave propagation in periodic media // J. Exp. Theor. Phys. 1983. Vol. 84. Pp. 2092–2098.

474. Meacham S. P. Quasigeostrophic, ellipsoidal vortices in stratified fluid // Dyn. Atmos. Oceans. 1992. Vol. 16. Pp. 189–223.

475. Legras B., Dritschel D. Vortex stripping and the generation of high vorticity gradients in two-dimensional flows // Appl. Sci. Res. 1993. Vol. 51. Pp. 445–455.

476. Meacham S. P., Pankratov K. K., Shchepetkin A. F., Zhmur V. V. The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid // Dyn. Atmos. Oceans. 1994. Vol. 21. Pp. 167–212.

477. Maze G., Carton X., Lapeyre G. Dynamics of a 2D vortex doublet under external deformation // Regul. Chaotic Dyn. 2004. Vol. 9. Pp. 477–497.

478. Kunnen R., Trieling R., van Heijst G. J. Vortices in time-periodic shear flow // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. Pp. 315–322.

479. Zavodney L., Nayfeh A., Sanchez N. Bifurcations and Chaos in Parametrically Excited Single-Degree-of-Freedom Systems // Nonlinear Dynamics. 1990. Vol. 1. Pp. 1–21.

480. Jeon D., Bai M., Chu C. et al. Role of parametric resonances in global chaos // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. Pp. 4192–4201.

481. Kandrup H. E., Vass I. M., Sideris I. V. Transient chaos and resonant phase mixing in violent relaxation // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2003. Vol. 341. Pp. 927–936.

482. Kecik K., Warminski J. Chaos in mechanical pendulum-like system near main parametric resonance // Procedia IUTAM. 2012. Vol. 5. Pp. 249–258.

483. Conforti M., Mussot A., Kudlinski A. et al. Heteroclinic Structure of Parametric Resonance in the Nonlinear Schrödinger Equation // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117. P. 013901.

484. del-Castillo-Negrete D., Greene J. M., Morrison P. J. Area preserving nontwist maps: Periodic orbits and transition to chaos // Physica D. 1996. Vol. 91. Pp. 1–23.

485. Carbajal L., del-Castillo-Negrete D., Martinell J. J. Dynamics and transport in mean-field coupled, many degrees-of-freedom, area-preserving nontwist maps // Chaos. 2012. Vol. 22. P. 013137.

486. Karabanov A., Morozov A. D. On degenerate resonances in Hamiltonian systems with two

degrees of freedom // Chaos Solitons Fractals. 2014. Vol. 69. Pp. 201–208.

487. Artemyev A. V., Neishtadt A. I., Zelenyi L. M. Rapid geometrical chaotization in slow-fast Hamiltonian systems // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89. P. 060902.
488. Ridderinkhof H., Zimmerman J. T. F. Chaotic stirring in a tidal system // Science. 1992. Vol. 258. Pp. 1107–1111.
489. Pierrehumbert R. T., Yang H. Global chaotic mixing on isentropic surfaces // J. Atmos. Sci. 1993. Vol. 50. Pp. 2462–2480.
490. Brown M. G., Samelson R. M. Particle motion in vorticity-conserving, 2-dimensional incompressible flows // Phys. Fluids. 1994. Vol. 6. Pp. 2875–2876.
491. Pierrehumbert R. T. Tracer Microstructure in the Large-eddy Dominated Regime // Chaos, Solitons and Fractals. 1994. Vol. 4. Pp. 1091–1110.
492. Beerens S. P., Ridderinkhof H., Zimmerman J. T. F. An Analytical Study of Chaotic Stirring in Tidal Areas // Chaos Solitons Fractals. 1994. Vol. 14. Pp. 1011–1029.
493. Pratt L. J., Lozier M. S., Beliakova N. Parcel trajectories in quasigeostrophic jets: neutral modes // J. Phys. Oceanogr. 1995. Vol. 25. Pp. 1451–1466.
494. del-Castillo-Negrete D. Asymmetric transport and non-Gaussian statistics of passive scalars in vortices in shear // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10. P. 576.
495. Miller P. D., Pratt L. J., Helfrich K. R., Jones C. K. R. T. Chaotic Transport of Mass and Potential Vorticity for an Island Recirculation // J. Phys. Oceanogr. 2001. Vol. 32. Pp. 80–102.
496. Miller P. D., Pratt L. J., Helfrich K. R., Jones C. K. R. T. Chaotic transport of mass and potential vorticity for an island recirculation // J. Phys. Oceanogr. 2002. Vol. 32. Pp. 80–102.
497. Lipphardt B. L., Small D., Kirwan A. D. et al. Synoptic Lagrangian maps: Application to surface transport in Monterey Bay // J. Mar. Res. 2006. Vol. 64. Pp. 221–247.
498. Mancho A. M., Hernandez-Garcia E., Small D. et al. Lagrangian Transport through an Ocean Front in the Northwestern Mediterranean Sea // J. Phys. Oceanogr. 2008. Vol. 38. Pp. 1222–1237.
499. Trueba J. L., Baltanas J. P., Feudel F., Sanjuan M. A. F. On the estimate of the stochastic layer width for a model of tracer dynamics // Chaos. 2003. Vol. 13, no. 3. Pp. 866–873.
500. Treschev D. Width of stochastic layers in near-integrable two-dimensional symplectic maps // Physica D. 1998. Vol. 1–2. Pp. 21–43.
501. Shevchenko I. I. The width of a chaotic layer // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372. Pp. 808–816.
502. Shevchenko I. I. Width of the chaotic layer: Maxima due to marginal resonances // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. P. 066202.

503. Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. Regular and Chaotic Dynamics, 2 ed. Springer-Verlag, 1992.

504. Poje A., Haller G., Mezic I. The geometry and statistics of mixing in aperiodic flows // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11. Pp. 2963–2968.

505. d'Ovidio F., Isern-Fontanet J., López C. et al. Comparison between Eulerian diagnostics and finite-size Lyapunov exponents computed from altimetry in the Algerian basin // Deep Sea Res. 2009. Vol. 56. Pp. 15–31.

506. Mendoza C., Mancho A. Hidden geometry of ocean flows // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 105. P. 038501.

507. Prants S. V., Budyansky M. V., Ponomarev V. I., Uleysky M. Y. Lagrangian study of transport and mixing in a mesoscale eddy street // Ocean Model. 2011. Vol. 38. Pp. 114–125.

508. Huntley H. S., Lipphardt B. L., Kirwan A. D. Lagrangian predictability assessed in the East China Sea // Ocean Model. 2011. Vol. 36. Pp. 163–178.

509. d'Ovidio F., De Monte S., Della Penna A. et al. Ecological implications of eddy retention in the open ocean: a Lagrangian approach // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. Vol. 46. P. 1254023.

510. Sulman M. H. M., Huntley H. S., Lipphardt B. L., Kirwan A. D. Leaving flatland: Diagnostics for Lagrangian coherent structures in three-dimensional flows // Physica D. 2013. Vol. 258. Pp. 77–92.

511. Каменкович В. М., Ларичев В. Д., Харьков Б. В. Бароклинная квазигеострофическая модель для анализа синоптических вихрей в открытой облатси океана // Океанология. 1981. Vol. 21. Pp. 949–958.

512. Козлов В. Ф., Макаров В. Г., Соколовский М. А. Численная модель бароклинной неустойчивости осесимметричных вихрей в двухслойном океане // Изв. АН СССР. ФАО. 1986. Vol. 22. Pp. 868–874.

513. Hogg N., Stommel H. How currents in the upper thermocline could advect meddies deeper down // Deep Sea Res. 1990. Vol. 37. Pp. 613–623.

514. Morel Y. The influence of an upper thermocline current on intrathermocline eddies // J. Phys. Oceanogr. 1995. Vol. 25. Pp. 3247–3252.

515. Tychensky A., Carton X. Hydrological and dynamical characterization of Meddies in the Azores region: A paradigm for baroclinic vortex dynamics // J. Geophys. Res. 1998. Vol. 103. Pp. 25061–25079.

516. Richardson P. L., Bower A. S., Zenk W. A census of Meddies tracked by floats // Prog. Oceanogr. 2000. Vol. 45. Pp. 209–250.

517. Paillet J., Le Cann B., Carton X. et al. Dynamics and evolution of a northern meddy // J. Phys. Oceanogr. 2002. Vol. 32. Pp. 55–79.

518. Serra N., Ambar I. Eddy generation in the Mediterranean undercurrent // Deep Sea Res. 2002. Vol. 49. Pp. 4225–4223.

519. Sokolovskiy M., Filyushkin B., Carton X. Dynamics of intrathermocline vortices in a gyre flow over a seamount chain // Ocean Dynamics. 2013. Vol. 63. Pp. 741–760.

520. L'Hégaret P., Carton X., Ambar I. et al. Evidence of Mediterranean Water dipole collision in the Gulf of Cadiz // J. Geophys. Res. 2014. Vol. 119. Pp. 5337–5359.

521. Sutyrin G. Generation of deep eddies by a turning baroclinic jet // Deep Sea Res. 2015. Vol. 101. Pp. 1–6.

522. Helfrich K. R., Send U. Finite-amplitude evolution of two-layer geostrophic vortices // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 197. Pp. 331–348.

523. Гряник В. М., Тевс М. В. Исследование динамики и энергетики взаимодействия хетонов в линейно и экспоненциально стратифицированных средах // Изв. АН СССР. ФАО. 1997. Vol. 33. Pp. 419–433.

524. Соколовский М. А., Веррон Ж., Вагина И. М. Влияние подводного препятствия малой высоты на динамику распределенного хетона // Изв. РАН. ФАО. 2001. Vol. 37. Pp. 131–143.

525. Козлов В. Ф. Фоновые течения в геофизической гидродинамике // Изв. РАН. ФАО. 1995. Т. 31. С. 245–250.

526. Leoncini X., Kuznetsov L., Zaslavsky G. Chaotic advection near a three-vortex collapse // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 036224.

527. Vainchtein D., Neishtadt A., Mezic I. On passage through resonances in volume-preserving systems // Chaos. 2006. Vol. 16. P. 043123.

528. Гинзбург А. И., Федоров К. Н. Эволюция течений в океане // Докл. АН СССР. 1984. Vol. 23. Pp. 481–484.

529. Гинзбург А. И., Федоров К. Н. Грибовидные течения в океане (по данным анализа спутниковых изображений) // Исс. Земли косм. 1984. Pp. 18–26.

530. Fedorov K. N., Ginsburg A. I. "Mushroom-like"currents (vortex dipoles) in the ocean and in a laboratory tank // Annales Geophys. 1986. Vol. 4B. Pp. 507–516.

531. Гинзбург А. И., Костяной А. Г., Павлов А. М., Федоров К. Н. Лабораторное воспроизведение грибовидных течений (вихревых диполей) в условиях вращения и стратификации // Изв. АН СССР. ФАО. 1987. Vol. 23. Pp. 170–178.

532. Федоров К. Н., Гинзбург А. И. Приповерхностный слой океана. Москва:

Гидрометеоиздат, 1988.

533. Афанасьев Я. Д., Воропаев С. И. Спиральная структура грибовидных течений в океане // Докл. АН СССР. 1989. Vol. 308. Pp. 179–183.

534. Афанасьев Я. Д., Воропаев С. И. Модель грибовидных течений в стратифицированной жидкости при кратковременном воздействии источника импульса // Изв. АН СССР. ФАО. 1989. Vol. 25. Pp. 843–851.

535. Афанасьев Я. Д., Воропаев С. И., Филиппов И. А. Модель грибовидных течений в стратифицированной жидкости при непрерывном воздействии источника импульса // Изв. АН СССР. ФАО. 1989. Vol. 25. Pp. 741–750.

536. Yamada H., Matsui T. Preliminary study of mutual slip-through of a pair of vortices // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. P. 292.

537. Griffiths R. W., Hopfinger E. J. Experiments with baroclinic vortex pairs in a rotating fluid // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 173. Pp. 501–518.

538. Griffiths R. W., Hopfinger E. J. Coalescing of geostrophic vortices // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 178. Pp. 73–97.

539. Voropayev S. I., Afanasyev Y. D., Filippov I. A. Horizontal jets and vortex dipoles in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 227. Pp. 543–566.

540. Voropayev S. I., Afanasyev Y. D. Two-dimensional vortex-dipole interactions in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 236. Pp. 665–689.

541. Flor J. B., van Heijst G. J. F. An experimental-study of dipolar vortex structures in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1994. — NOV 25. Vol. 279. Pp. 101–133.

542. Shukla P. K., Yu M. Y. Formation of dipole vortex in the ionosphere // Geophys. Res. Lett. 1985. Vol. 12, no. 4. Pp. 163–165.

543. Meleshko V. V., Konstantinov M. Y., Gurzhi A. A., Konovaljuk T. P. Advection of a vortex pair atmosphere in a velocity-field of point vortices // Phys. Fluids A-Fluid Dynamics. 1992. — DEC. Vol. 4, no. 12. Pp. 2779–2797.

544. Stern M. E., Radko T. The self-propagating quasi-monopolar vortex // J. Phys. Oceanogr. 1998. Vol. 28. Pp. 22–39.

545. Voropayev S. I., McEachern G. B., Boye, Fernando H. J. S. Experiment on the self-propagating quasi-monopolar vortex // J. Phys. Oceanogr. 1999. Vol. 29. Pp. 2741–2751.

546. Voropayev S. I., Smirnov S. A., Brandt A. Dipolar eddies in a stratified shear flow // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13, no. 12. P. 3820.

547. Matsumoto Y., Ueno K., Saito T. A moment model with variable length scale for the motion of a vortex pair in two-dimensional incompressible flows // Phys. Fluids. 2009. — APR.

Vol. 21, no. 4. P. 047103.

548. Wiggins S. The dynamical systems approach to Lagrangian transport in oceanic flows // Annuv. Rev. Fluid Mech. 2005. Vol. 37. Pp. 295–328.

549. Koshel K. V., Prants S. V. Chaotic advection in the ocean // Physics-Uspekhi. 2006. Vol. 49, no. 11. Pp. 1151–1178.

550. Shariff K., Leonard A., Ferziger J. H. Dynamical systems analysis of fluid transport in time-periodic vortex ring flows // Phys. Fluids. 2006. Vol. 18. P. 047104.

551. Vainchtein D., Mezic I. Control of a vortex pair using a weak external flow // J. Turbul. 2002. Vol. 3, no. 51. P. 051.

552. Bannikova E. Y., Kontorovich V. M., Reznik G. M. Dynamics of a vortex pair in radial flow // J. Exp. Theor. Phys. 2007. — OCT. Vol. 105, no. 3. Pp. 542–548.

553. McKiver W. J. The Ellipsoidal Vortex: A Novel Approach to Geophysical Turbulence // Adv. Math. Phys. 2015. Vol. 2015. P. 613683.

554. Carton X., Legras B. The life-cycle of tripoles in 2-dimensional incompressible flows // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 267. Pp. 53–82.

555. McKiver W. J., Dritschel D. G. The stability of a quasi-geostrophic ellipsoidal vortex in a background shear flow // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 560. Pp. 1–17.

556. McKiver W. J., Dritschel D. Balanced solutions for an ellipsoidal vortex in a rotating stratified flow // J. Fluid Mech. 2016. Vol. 802. Pp. 333–358.

557. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Москва: ВИНИТИ, 1985.

558. Жмур В. В., Панкратов К. К. Динамика мезомасштабного вихревого образования в поле течения крупного интенсивного вихря // Океанология. 1990. Vol. 30. Pp. 170–178.

559. Жмур В. В., Панкратов К. К. Стационарные квазигеострофические вихри с неоднородным распределением потенциальной завихренности в ядре // Океанология. 1990. Vol. 30. Pp. 378–385.

560. Жмур В. В., Панкратов К. К. Дальнее взаимодействие ансамбля квазигеострофических эллипсоидальных вихрей // Изв. АН СССР. ФАО. 1990. Vol. 26. Pp. 170–178.

561. Жмур В. В., Щепеткин А. Ф. Эволюция эллипсоидального вихря в стратифицированном океане в приближении f - плоскости // Изв. АН СССР. ФАО. 1991. Vol. 27. Pp. 492–503.

562. Жмур В. В., Щепеткин А. Ф. Эволюция двух бароклинных вихрей. Тенденция к сближению и слиянию // Изв. АН СССР. ФАО. 1992. Vol. 28. Pp. 538–551.

563. Kirwan A. D., Lipphardt B. L. Integrable unsteady motion with an application to ocean eddies // Nonlin. Processes Geophys. 1998. Vol. 5. Pp. 145–151.

564. Balasuriya S., Jones C. K. R. T., Sandstede B. Viscous perturbations of vorticity-conserving flows and separatrix splitting // Nonlinearity. 1998. Vol. 11. Pp. 47–77.

565. Bollt E. M., Luttman A., Kramer S., Basnayake R. Measurable dynamics analysis of transport in the Gulf of Mexico during the oil spill // Int. J. Bifurcation Chaos. 2012. Vol. 22. P. 1230012.

566. Filyushkin B. N., Sokolovskiy M. A., Kozhelupova N. G., Vagina I. M. Lagrangian methods for observation of intrathermocline eddies in ocean // Oceanology. 2014. Vol. 54. Pp. 688–694.

567. Balasuriya S., Jones C. K. R. T. Diffusive Draining and Growth of Eddies // Nonlin. Processes Geophys. 2001. Vol. 8. Pp. 241–251.

568. Balasuriya S. An Analytical Study of General Hyper-diffusivity and Barotropic Eddies // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2004. Vol. 91. Pp. 39–62.

569. Radko T., Sisti C. Life and demise of intra-thermocline mesoscale vortices // J. Phys. Oceanogr. 2017. P. in press.

570. Кляцкин В. И. Статистическое описание диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей // УФН. 1994. Vol. 164. Pp. 531–544.

571. Кошель К. В., Александрова О. В. Некоторые результаты численного моделирования диффузии пассивной примеси в случайном поле скорости // Изв. РАН. ФАО. 1999. Vol. 35. Pp. 638–648.

572. Mesinger F. Numerical integration of the primitive equations with a floating set of computation points: experiments with a barotropic global model // Monthly Wether Rev. 1971. Vol. 99. Pp. 15–29.

573. Klyatskin V. I. Stochastic Equations through the Eye of the Physicist (Basic Concepts, Exact Results, and Asymptotic Approximations). Elsevier Science, 2005. P. 556.

574. Jones S. W. Interaction of Chaotic Advection and Diffusion // Chaos Solitons Fractals. 1994. Vol. 4. Pp. 929–940.

575. Rom-Kedar V., Poje A. C. Universal properties of chaotic transport in the presence of diffusion // Phys. Fluids. 1999. Vol. 2044. Pp. 2044–2057.

576. Monin A. S., Ozmidov R. V. Turbulence in the Ocean. Reidel, Dordrecht,, 1985. P. 247 pp.

577. Van Dam G. C., Ozmidov R. V., Korotenko K. A., Suijlen J. M. Spectral structure of horizontal water movement in shallow seas with special reference to the North Sea, as related to the dispersion of dissolved matter // J. Mar. Sys. 1999. Vol. 21. Pp. 207–228.

578. Zhurbas V., Oh I. S. Drifter-derived maps of lateral diffusivity in the Pacific and Atlantic

Oceans in relation to surface circulation patterns // J. Geophys. Res. 2004. Vol. 109. P. C05015.

579. Okubo A. Oceanic diffusion diagrams // Deep Sea Res. 1971. Vol. 18. Pp. 789–802.

580. Lester D. R., Rudman M., Metcalfe G. et al. Scalar Dispersion in a Periodically Reoriented Potential Flow: Acceleration via Lagrangian Chaos // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81. P. 046319.

581. Guseva K., Feudel U., Tel T. Influence of the history force on inertial particle advection: Gravitational effects and horizontal diffusion // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 88. P. 042909.

582. Giona M., Anderson P. D., Garofalo F. Short-time behavior of advecting-diffusing scalar fields in Stokes flows // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 87. P. 063011.

583. Lester D. R., Metcalfe G., Trefry M. G. Anomalous transport and chaotic advection in homogeneous porous media // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 90. P. 063012.

584. McWilliams J. C. Submesoscale currents in the ocean // Proc. R. Soc. A. 2016. Vol. 472. P. 20160117.

585. Stepanov D. V. Mesoscale eddies and baroclinic instability over the eastern Sakhalin shelf of the Sea of Okhotsk: a model-based analysis // Ocean Dynamics. 2018. Vol. 68. Pp. 1353 – 1370.

586. Stepanov D. V., Diansky N. A., Fomin V. V. Eddy energy sources and mesoscale eddies in the Sea of Okhotsk // Ocean Dynamics. 2018. Vol. 68. Pp. 825 – 845.

587. Prants S. V., Uleysky M. Y., Budyansky M. V. Lagrangian Oceanography: Large-scale Transport and Mixing in the Ocean. Springer International Publishing, 2017.

588. Prants S. V., Budyansky M. V., Uleysky M. Y. Lagrangian simulation and tracking of the mesoscale eddies contaminated by Fukushima-derived radionuclides // Ocean Sci. 2017. Vol. 13. Pp. 453–463.

589. Abernathey R., Haller G. Transport by Lagrangian Vortices in the Eastern Pacific // J. Phys. Oceanogr. 2018. Vol. 48. Pp. 667–685.

590. Berloff P. S., McWilliams J. The turbulent oscillator: A mechanism of low-frequency variability of the wind-driven ocean gyres // J. Phys. Oceanogr. 1999. Vol. 29. Pp. 1925–1949.

591. Berloff P. S. On dynamically consistent eddy fluxes // Dyn. Atmos. Ocean. 2005. Vol. 38. Pp. 123–146.

592. Kravtsov S., Berloff P., Dewar W. et al. Dynamical origin of low-frequency variability in a highly nonlinear midlatitude coupled model // J. Climate. 2006. Vol. 19. Pp. 6391–6408.

593. Berloff P., Hogg A., Dewar W. The turbulent oscillator: A mechanism of low-frequency variability of the wind-driven ocean gyres // J. Phys. Oceanogr. 2007. Vol. 37. Pp. 2363–2386.

594. Shevchenko I., Berloff P., Guerrero-Lopez D., Roman J. On low-frequency variability of the

midlatitude ocean gyres // J. Fluid Mech. 2016. Vol. 795. Pp. 423–442.

595. Dijkstra H. A. A normal mode perspective of intrinsic ocean-climate variability // Annu. Rev. Fluid Mech. 2018. Vol. 48. Pp. 341–363.

596. Kravtsov S., Kondrashov D., Ghil M. Multi-level regression modeling of nonlinear processes: Derivation and applications to climatic variability // J. Climate. 2005. Vol. 18. Pp. 4404–4424.

597. Kondrashov M. D., D. Chekroun, Berloff P. Multiscale Stuart-Landau Emulators: Application to Wind-Driven Ocean Gyres // Fluids. 2018. Vol. 3. P. 21.