

На правах рукописи



Петров Павел Сергеевич

**Математическое моделирование горизонтальной  
рефракции звука в трехмерных волноводах  
мелкого моря**

01.04.06 – Акустика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Владивосток – 2021

Работа выполнена в ФГБУН Тихоокеанском океанологическом институте им. В.И. Ильичева Дальневосточного отделения Российской академии наук.

**Официальные оппоненты:**

**Вировлянский Анатолий Львович**, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией статистических методов в акустике океана, ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук»

**Гузев Михаил Александрович**, доктор физико-математических наук, академик РАН, директор, ФГБУН Институт прикладной математики ДВО РАН

**Переселков Сергей Алексеевич**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математической физики и информационных технологий, ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

**Ведущая организация:**

ФГБУН Федеральный исследовательский центр «Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук»

Защита состоится 10 июня 2021 г. в 13:00 на заседании диссертационного совета Д 005.017.01 при *ФГБУН Тихоокеанском океанологическом институте им. В.И. Ильичева ДВО РАН (ТОИ ДВО РАН)*, адрес: г. Владивосток, ул. Балтийская, д. 43.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ТОИ ДВО РАН, а также на сайте института по адресу: <https://poi.dvo.ru/index.php/ru/node/1175>.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат технических наук,



Костив А.Е.

## Общая характеристика работы

### **Актуальность темы исследования.**

В настоящее время в акустике океана активно изучаются физические эффекты, связанные с трехмерным характером распространения звука на шельфе и в глубоком океане. Класс таких эффектов, описание которых выходит за рамки двумерной теории распространения акустических волн и приближения несвязанных азимутов, объединяют общим термином *горизонтальная рефракция звука*. По-видимому, он был впервые употреблен Вестоном [1] при описании поведения трехмерных лучей в волноводе с наклонным дном. Искривление проекций этих лучей на горизонтальную плоскость можно считать отличительной особенностью трехмерных задач акустики океана [1, 2]. В рамках развитой Барриджем и Вайнбергом [3] теории эти проекции можно отождествить с горизонтальными лучами, соответствующими вертикальным модам, и такими, что эффективный показатель преломления для них определяется вариациями горизонтальных волновых чисел мод. В эксперименте искривление линий, вдоль которых акустическая энергия распространяется в горизонтальных направлениях, обнаруживается по отклонению направлений прихода отдельных компонент сигнала от направления на источник звука. Такие отклонения можно обнаружить с помощью векторных приемников или, например, горизонтальных приемных антенн. Именно таким способом проявление горизонтальной рефракции было впервые зафиксировано в эксперименте Дулитлом, Толстой и Бакингом [4].

Различные проявления горизонтальной рефракции, обусловленной как неоднородностями скорости звука [5–10] (например, внутренними волнами, температурными фронтами или синоптическими вихрями), так и неоднородностями рельефа дна [11–15], рассматривались с 60-х годов двадцатого века в многочисленных работах иностранных и отечественных авторов. Среди последних необходимо особо отметить работы Кацнельсона, Переселкова, Кузькина и их соавторов [16–19], в основном посвященные эффектам, связанным именно с гид-

рологическими неоднородностями (например, с рассеянием звука на пакетах интенсивных внутренних волн). В случае мелкого моря, однако, наиболее распространенным фактором, обуславливающим горизонтальную рефракцию звука, являются неоднородности рельефа дна. Диссертация посвящена систематическому анализу их роли в различных проявлениях горизонтальной рефракции. Особенностью работы является то, что новые решения ряда трехмерных задач акустики мелкого моря с типичными видами неоднородностей батиметрии получены в ней аналитически, например, в виде явных формул для коэффициентов разложения звукового поля по модам (большая часть известных ранее решений даже идеализированных модельных задач связана с использованием численных методов [14, 15]).

Интерес к исследованию горизонтальной рефракции звука в первую очередь связан с некоторыми приложениями акустики океана, выходящими на передний план в последнее время. К их числу относятся мониторинг антропогенных акустических шумов [20], организация систем подводной навигации и связи [21–23], а также задачи глобального моделирования распространения звука [24]. Во всех этих приложениях важную роль играет определение областей фокусировки и акустической тени, формирующихся в горизонтальной плоскости в различных направлениях от источника звука. Кроме того, в случае акустических трасс протяженностью десятки и сотни километров, характерных для этих приложений, уже нельзя считать, что распространение звука от точки излучения до точки приема происходит вдоль геодезической, и геометрия горизонтальных лучей, зависящая как от частоты, так и от номера моды, начинает оказывать заметное влияние на время прихода и форму принимаемого сигнала.

Таким образом, для решения указанных выше практических задач необходимо как качественное понимание физических механизмов, стоящих за проявлениями трехмерных эффектов распространения звука, так и эффективные математические методы для их количественного моделирования. Разработка таких методов также является важным направлением исследований в акустике

океана в последние 20-30 лет. Наибольшей популярностью среди них в настоящее время пользуется метод трехмерных параболических уравнений, развиваемый несколькими научными группами в разных странах мира [25–30]. В России основоположником этого метода в акустике океана является Авилов [31, 32]. Несколько менее востребованными являются методы расчета трехмерных звуковых полей, основанные на лучевом приближении и теории гауссовых пучков [33, 34]. Весьма удачным решением с точки зрения вычислительной эффективности является полученная в результате синтеза метода нормальных волн и метода параболического уравнения теория модовых параболических уравнений. Основы этого подхода к расчету звуковых полей заложены в работах Коллинза [35] и Трофимова [36]. До недавнего времени основные результаты в этой области были связаны с узкоугольными параболическими уравнениями. В развитие данного подхода в диссертации предложена методика расчета трехмерных звуковых полей, основанная на решении псевдодифференциальных модовых параболических уравнений (в т.ч. в криволинейных координатах).

**Степень разработанности темы исследования.** Настоящая диссертация является законченным научным исследованием, в котором представлено разностороннее теоретическое описание явления горизонтальной рефракции звука на неоднородностях батиметрии в мелком море.

**Цели и задачи диссертационной работы:**

- сформировать общую физическую картину явления горизонтальной рефракции звука в мелком море, обеспеченную единством и дополнительностью различных математических способов его описания и подкрепленную набором аналитических решений модельных задач, демонстрирующих особенности отдельных его проявлений;
- разработать и апробировать новые методы моделирования распространения звука в трехмерных волноводах мелкого моря, полностью учитывающие горизонтальную рефракцию акустических волн.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи.

1. Получить аналитические решения задач распространения звука в волноводах мелкого моря с подводным каньоном, а также с участком дна, имеющим чашеобразную форму (так что изобаты локально представляют собой дуги concentрических окружностей, а градиент глубины направлен на центр их кривизны). Исследовать модовую структуру звукового поля в горизонтальной плоскости в этих случаях.
2. Получить решения задач распространения звука в мелком море, где рельеф дна описывается параметрической квадратичной функцией путем аналитического решения модовых параболических уравнений. Использовать полученное решение для качественного и количественного описания структуры звукового поля в клиновидном прибрежном волноводе и волноводе мелкого моря с подводным хребтом.
3. Разработать широкоугольные модовые параболические уравнения для решения трехмерных задач распространения звука в мелком море общего вида в адиабатическом приближении с учетом горизонтальной рефракции звука.
4. Получить систему широкоугольных итеративных параболических уравнений (ИПУ), которые могут быть использованы для аппроксимации решения уравнения горизонтальной рефракции в приближении однонаправленного распространения. Получить граничные условия прозрачности для ИПУ. Разработать безусловно устойчивый численный метод для решения ИПУ в случае, когда расчетная область не имеет физических границ.
5. На примере анализа конкретного эксперимента по дальнему распространению звука исследовать возможный вклад эффекта горизонтальной рефракции в ошибки решения задач акустической дальнометрии в мелком

море. Оценить влияние этого эффекта на дисперсию импульсных сигналов.

6. Получить асимптотическое представление звукового поля в волноводе мелкого моря с неоднородным дном с использованием лучевой теории распространения звука и метода канонического оператора Маслова (для регулярных и фокальных точек).

**Научная новизна.** В работе имеются следующие элементы научной новизны

1. разработан и протестирован новый общий метод решения задач подводной акустики, основанный на решении псевдодифференциальных модовых параболических уравнений в криволинейных координатах;
2. получены новые классы приближенных аналитических решений трехмерных задач распространения звука в волноводах мелкого моря с неоднородным рельефом дна;
3. разработано новое обобщение лучевого метода для решения трехмерных задач акустики океана с возможностью расчета временных рядов импульсных сигналов в случаях, когда приемник находится в фокальной точке семейства лучей;
4. описан новый физический эффект, являющийся проявлением горизонтальной рефракции звука в мелком море и состоящий в формировании волновода шепчущей галереи в окрестности семейства криволинейных изобат;
5. описан новый физический эффект, являющийся проявлением горизонтальной рефракции звука в мелком море с подводным хребтом и состоящий в изменении характера выпуклости волновых фронтов на некотором удалении от источника;

6. получено новое аналитическое решение уравнения горизонтальной рефракции, описывающее распространение звука в мелком море с подводным каньоном;
7. получено новое вязкоупругое волновое уравнение, позволяющее моделировать произвольную зависимость коэффициента поглощения акустических волн в донных осадках от частоты;
8. разработана теория итеративных параболических аппроксимаций для моделирования распространения звука в океане; доказаны существование и единственность решения начально-краевых задач для итеративных параболических уравнений, и доказана теорема о корректности таких задач;
9. разработаны новые граничные условия прозрачности для итеративных параболических уравнений; разработана новая численная схема для решения итеративных параболических уравнений с граничными условиями прозрачности; доказана безусловная устойчивость этой численной схемы;
10. впервые исследовано влияние горизонтальной рефракции, обусловленной неоднородностями батиметрии, на точность решения задач акустической дальнометрии.

**Теоретическая и практическая значимость.** Теоретическая значимость работы состоит в том, что в ней описан ряд новых физических эффектов, представляющих собой частные проявления горизонтальной рефракции звука в мелком море. К числу этих эффектов относится формирование шепчущей галереи в окрестности искривленной изобаты в мелком море, изменение характера выпуклости волновых фронтов при распространении звука над гребнем подводного хребта, а также действие горизонтальной рефракции как дополнительного механизма увеличения длительности модальных компонент импульсного сигнала.

Кроме того, результаты данной работы значительно расширяют класс трехмерных задач акустики мелкого моря, для которых известны приближенные аналитические решения (до появления наших работ аналитическое решение было известно только для задачи распространения звука в прибрежном клине).

Практическая значимость работы состоит в том, что в ней предложены две новые методики расчета звуковых полей в трехмерных волноводах мелкого моря общего вида (т.е. с произвольным рельефом дна и полем скорости звука в водном слое). В основе одной из них лежит численное решение широкоугольных (и псевдодифференциальных) модовых параболических уравнений. Вторая методика основана на обобщении лучевой теории распространения звука, дополненной асимптотическими выражениями для расчета поля в фокальных точках во временной области. Эти методики могут быть использованы для решения различных практических задач, в которых необходимо моделирование акустических полей на обширных акваториях.

Косвенным подтверждением значимости результатов работы является многолетняя поддержка исследований автора грантами Минобрнауки РФ в рамках проектов МК-4323.2015.5 и МК-2262.2017.5 (“Гранты Президента”) и РФФИ в рамках проектов 16-31-00442 мол\_а, 16-05-01074 а, 18-05-00057 а, 18-35-20081 мол\_а\_вед (во всех перечисленных проектах автор диссертации выступал в роли руководителя). Исследования соискателя, выполнявшиеся совместно с иностранными коллегами, в разные годы получали поддержку DAAD (Германия), Campus France (Франция), Университета Хайфы (Израиль) по результатам соответствующих конкурсов.

Отметим еще, что результат работы [38] по результатам голосования Ученого совета вошел в число трех важнейших результатов ТОИ ДВО РАН за 2019 год.

### **Методология и методы исследования.**

Результаты второй главы диссертации получены в рамках трехмерной лучевой теории распространения звука в океане и могут быть охарактеризованы

как в вклад в ее развитие. Новые результаты в этом направлении удалось получить благодаря использованию метода канонического оператора Маслова и ряда полученных с его помощью общих асимптотических формул [37], описывающих решение волнового уравнения с локализованными начальными данными.

Результаты всех глав, начиная с третьей, получены в рамках модовой теории распространения звука. В третьей главе работы коэффициенты в приближенном модовом разложении акустического поля (модовые амплитуды) вычисляются аналитически с использованием метода разделения переменных, метода ВКБ и теории специальных функций. В разделах 4.1-4.4 для расчета модовых амплитуд используется параболическое уравнение, решение которого находится аналитически с использованием теории групп и алгебр Ли. Отметим, что сама по себе методика решения параболических уравнений, использованная в работе, не является новой.

В разделах 4.5 и 4.6 при выводе широкоугольных и псевдодифференциальных модовых параболических уравнений и их решении использованы метод аппроксимаций Паде для псевдодифференциальных операторов, а также методы искусственного ограничения расчетной области, основанные на использовании граничных условий прозрачности и совершенных поглощающих слоев. Для дискретизации дифференциальных уравнений и операторов, содержащих частные производные, в работе используется метод конечных разностей.

Для вывода итеративных параболических уравнений (ИПУ), а также согласованных с ними граничных и интерфейсных условий, в пятой главе работы применяется метод многомасштабных разложений. Далее в этой же главе для получения граничных условий прозрачности для системы ИПУ используется преобразование Лапласа.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Для моделей волноводов мелкого моря с чашеобразным дном и с подводным каньоном установлены достаточные условия, при которых гори-

зонтальная рефракция приводит к формированию модовой структуры звукового поля в горизонтальной плоскости и локализации акустической энергии в окрестности семейства изобат, определяющих указанные неоднородности батиметрии. Выполнен качественный и количественный анализ интерференционной картины, формируемой горизонтальными модами в этих случаях.

2. В адиабатическом приближении построены новые аналитические решения для класса задач расчета звуковых полей в мелком море с трехмерными неоднородностями батиметрии, описываемыми квадратичными параметрическими функциями. На примере волновода мелкого моря с подводным хребтом показано, что построенные решения позволяют выполнять качественный анализ интерференционной структуры поля точечного источника в горизонтальной плоскости.
3. Разработана и апробирована путем решения тестовых задач новая методика моделирования акустических полей в трехмерных нерегулярных волноводах мелкого моря, основанная на численном решении псевдодифференциальных модовых параболических уравнений в области с искусственными границами в адиабатическом приближении. Данная методика позволяет выполнять расчет акустических полей с существенно более высокой скоростью, чем при использовании трехмерных параболических уравнений.
4. Предложен и теоретически обоснован новый метод расчета акустических полей в волноводах мелкого моря, основанный на численном решении итеративных параболических уравнений с граничными условиями прозрачности. Доказана корректность начально-краевых задач для итеративных параболических уравнений, а также безусловная устойчивость разработанной численной схемы для их решения.

5. Предложено обобщение лучевого метода моделирования распространения импульсных сигналов точечного источника звука в волноводах мелкого моря с неоднородной батиметрией и идеальными границами, позволяющее выполнять расчеты временных рядов акустического давления как в регулярных, так и в фокальных точках семейства лучей.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: международная конференция "Days on Diffraction-2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019 (г. Санкт-Петербург, ПОМИ РАН); 4<sup>th</sup> и 5<sup>th</sup> Pacific Rim Underwater Acoustics Conference (PRUAC) (г. Ханьчжоу, КНР, 2013 и г. Владивосток, 2015); Underwater Acoustics Conference and Exhibition (UACE) 2013, 2014, 2015, 2017 (Корфу, Греция, 2013; Родос, Греция, 2014; Крит, Греция, 2015; Скиатос, Греция, 2017); European Conference on Underwater Acoustics (ECUA) 2012 (Эдинбург, Великобритания, 2012); XVI школа-семинар "Акустика Океана" им. академика Л.М. Бреховских (Москва, 2018 г.); 26<sup>th</sup> Pacific Congress on Marine Science and Technology (PACON) (г. Владивосток, 2019).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 35 печатных работах, из них 24 статьи в рецензируемых журналах [38–61] и 11 статей в сборниках трудов конференций [62–72]. Издания, в которых опубликованы все указанные выше работы, индексируются в международных базах данных Scopus и Web of Science.

**Личный вклад автора.** Все работы соискателя, в которых опубликованы результаты настоящего диссертационного исследования выполнены и написаны в соавторстве с коллегами из ТОИ ДВО РАН, ИПМех РАН, а также зарубежных институтов и университетов. В работах [41, 45–49, 51, 60, 61] вклад автора диссертации является определяющим и составляет не менее 60% как при выполнении исследований, так и при подготовке текста.

В работах [42, 56, 57, 59], выполненных совместно с коллегами-эксперимен-

таторами, вклад соискателя заключается в теоретическом анализе и математическом моделировании натуральных экспериментов (во всех случаях соискатель участвовал в подготовке публикаций, причем в работе [59] его вклад был решающим).

Статьи [39, 40, 43] написаны в соавторстве с учителем и научным руководителем кандидатской диссертации соискателя М.Ю. Трофимовым, который ставил решенные в них задачи и получал большую часть теоретических результатов. Тем не менее, во всех случаях автор настоящей диссертации принимал активное участие в выводе формул и уравнений, доказательстве части теорем, а также проводил большую часть представленных в этих работах вычислений.

Наконец, в работах, выполненных совместно с коллегами из ИПМех РАН [52, 53], соискателю принадлежит постановка задачи и организация тестовых расчетов, а в работе [58] – еще и вывод части асимптотических формул. Соискатель также внес значительный вклад в подготовку этих статей к публикации.

В работе [38] основная идея и постановка задачи принадлежит Б.Г. Кацнельсону, а реализация ее решения в значительной степени является заслугой соискателя (в особенности это касается ВКБ-теории мод шепчущей галереи и проведения конкретных расчетов). В статье [55], наоборот, соискателю принадлежит идея и постановка задачи, а также физическая интерпретация результатов, в то время как конкретные теоретико-групповые вычисления были выполнены П.Н. Петровым. В обеих этих работах вклад двух авторов в подготовку публикации приблизительно равнозначен.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка сокращений и библиографии.

Общий объем диссертации 347 страниц, из них 319 страниц текста, включая 60 рисунков. Библиография включает 256 наименований на 28 страницах.

## Содержание работы

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**Первая глава** посвящена описанию математической постановки задач распространения звука в мелком море. В ней рассмотрены основные уравнения, описывающие распространение звука (волновое уравнение, уравнение Гельмгольца, система динамических уравнений теории упругости), а также сформулированы начальные и краевые условия, которые необходимы для корректной постановки начально-краевых (или краевых) задач для этих уравнений.

В разделе 1.1 определено понятие геоакустический волновод (ГАВ), введены используемые в диссертации обозначения. Кроме того, в разделе зафиксированы направления координатных осей:  $x, y$  – горизонтальные координаты (ось  $x$ , как правило, совпадает с направлением от источника к точке приема), ось  $z$  направлена вертикально вниз, причем  $z = 0$  есть поверхность моря.

В разделе 1.2 сформулированы начально-краевые задачи для волнового уравнения, описывающие распространение импульсных акустических сигналов в волноводе мелкого моря. В задачах использованы граничные условия прозрачности (ГУП), в т.ч. разработанные в [39]. Отмечено, что стандартное волновое уравнение (а равно и телеграфное уравнение), вообще говоря, не обеспечивает адекватного учета зависимости затухания звука в слоях дна от частоты. Для моделирования произвольной зависимости показателя поглощения звуковых волн в среде от частоты в работе выведено *вязкоупругое волновое уравнение* для акустического давления  $P$ , имеющее вид

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \int_{-\infty}^t M(t - \tau) d \left( \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla P \right) \right), \quad (1)$$

где  $M(t)$  – релаксационный модуль среды. Приближая релаксационный спектр

$M^*(\omega)$  с помощью модели, известной как обобщенное тело Максвелла, получим аппроксимацию вязкоупругого волнового уравнения системой вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \rho c^2 \left( \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla P \right) - \sum_{l=1}^n \zeta_l \right), \\ \frac{d\zeta_l}{dt} + \omega_l \zeta_l = \omega_l a_l \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla P \right), \end{cases} \quad (2)$$

допускающей удобную конечно-разностную дискретизацию. Далее в работе описана методика численного решения системы (2), предложенная в [41]. Она основана на использовании явной конечно-разностной схемы второго порядка, а также подходящих дискретизациях граничных условий прозрачности из работы [39] (на вертикальных границах расчетной области) и условия Хигдона (на нижней границе области).

В разделе 1.3 сформулированы краевые задачи для уравнения Гельмгольца, описывающие распространение звука в мелком море.

В разделе 1.4 детально описано решение такой задачи в случае клиновидного прибрежного волновода с проницаемым дном. Это решение основано на методе изображений. Оно впервые описано в работе [15], ряд дополнений и исправлений к которой предложен автором диссертации в [54] (в частности, нами впервые рассмотрен случай упругого дна, см. рис. 1). Акустическое поле в клине может быть представлено в виде ряда по так называемым изображениям источника  $S_{n_b, l}$ , которые нумеруются двумя индексами (см. обозначения на рис. 1(a)). Вклад каждого изображения  $S_{n_b, l}$  мы обозначаем  $p_{n_b, l}$ . В этом случае суммарное поле внутри клина может быть найдено по формуле

$$p(x, y, z) = p_{0, -1}(x, y, z) + p_{0, 2}(x, y, z) + \sum_{n_b=1}^N \sum_l p_{n_b, l}(x, y, z). \quad (3)$$

Вклад от каждого изображения источника может быть записан в виде разложения сферической волны по плоским волнам

$$p_{n_b, l} = (-1)^{n_s} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{b=1}^{n_b} V(\varphi_b) \right] \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}{k_z} dk_x dk_y, \quad (4)$$

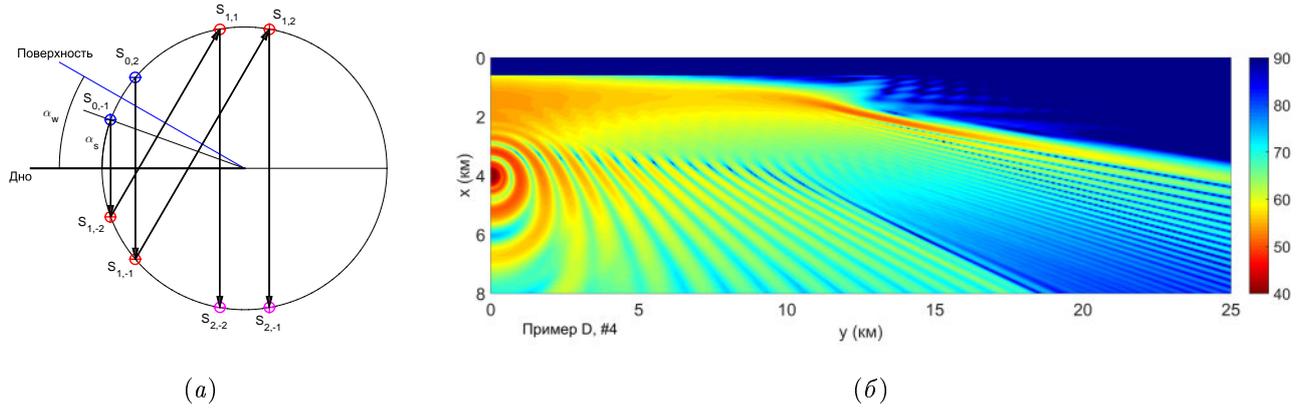


Рис. 1. Источник звука в клине и его изображения (а). Горизонтальный разрез поля относительных потерь (в дБ отн. 1 м) на глубине 30 м для клиновидного волновода с высокой скоростью волн сдвига в дне (б).

где  $n_s$  есть число отражений от поверхности моря, которое, в свою очередь, определяется значениями  $n_b$  и  $l$ ; произведение в квадратных скобках представляет собой итоговый коэффициент отражения, ассоциированный с данным изображением. Мы выбираем ветвь квадратного корня в (4) таким образом, чтобы гарантировать выполнение условия излучения на бесконечности. Далее выражение (4) преобразуется таким образом, чтобы его можно было использовать в расчетах. Горизонтальный разрез звукового поля, рассчитанного с помощью метода изображений, представлен на рис. 1.

Результаты первой главы опубликованы в работах [39, 41, 42, 54, 69].

**Во второй главе** диссертации разработана и апробирована новая методика моделирования распространения импульсных сигналов в мелком море, основанная на лучевой теории распространения звука и новых асимптотических формулах для расчета временных рядов в регулярных и фокальных точках, полученных с использованием канонического оператора Маслова.

В разделе 2.1 формулируется начально-краевая задача для трехмерного волнового уравнения для акустического давления  $P = P(t, x, y, z)$  в области  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 < z < h(x, y)$  (граница  $z = 0$  соответствует поверхности моря, поверхность  $z = h(x, y)$  описывает батиметрию) со скоростью  $c = c(x, y, z)$ .

Уравнение записывается в виде

$$\frac{1}{c^2}P_{tt} - \Delta P = Q(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} = (x, y, z). \quad (5)$$

В данной главе рассматривается задача Коши для (5) с нулевыми начальными условиями, условием Дирихле на поверхности моря и условием Неймана при  $z = h(x, y)$ .

Правая часть  $Q(r, t)$ , описывающая источник, представляется в виде произведения

$$Q(\mathbf{r}, t) = \lambda^2 g'_0(\lambda t) \frac{1}{\mu^3} V\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^0}{\mu}\right),$$

т.е. в точке  $\mathbf{r}^0$  располагается источник звука с малым характерным размером  $\mu$ , и в начальный момент времени источник излучает импульсный сигнал длительности  $1/\lambda$ . Такое представление излучаемого сигнала  $f(t) = \lambda^2 g'_0(\lambda t)$  необходимо для использования некоторых асимптотик из [37] и промежуточных выкладок.

Функция  $V(\mathbf{w})$ , описывающая форму источника, выбирается такой, что  $\int_{\mathbb{R}^3} V(\mathbf{w}) d\mathbf{w} = 1$ . Относительно параметров  $\mu$  и  $\lambda$  будем предполагать, что  $\mu \ll 1$ ,  $u = \frac{c_0}{\lambda\mu} \leq \text{const}$ . В данной главе мы строим асимптотическое решение задачи Коши для (5) при  $\mu \rightarrow 0+$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ . Физически эта асимптотика описывает сигнал, излучаемый точечным источником, расположенным в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0$ .

В разделе 2.2 вводится связанная с уравнением (5) система Гамильтона для характеристик, а также определяется поверхность  $\Lambda_s$ , представляющая собой объединение концов всех траекторий этой системы, выпущенных с единичным импульсом из точки  $\mathbf{r}^0$ , и отражающихся по обычным правилам от поверхности и дна моря. Тогда волновой фронт представляет собой проекцию  $\Lambda_s$  на трехмерное пространство  $\{(x, y, z)\}$  в фиксированный момент времени  $s$ . Для дальнейшего важно установить, в какие моменты времени данная проекция содержит точку приема. Далее записывается асимптотика компоненты решения рассматриваемой задачи, состоящей из распространяющихся волн.

В разделе 2.3 выполняется упрощение асимптотической формулы для регулярной точки в случае, когда размер источника звука стремится к нулю. Полученная при этом формула для временного ряда акустического давления в точке приема имеет вид

$$P_{prop}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{j=1}^k \sqrt{\frac{c_0}{c(\mathbf{r})}} \sqrt{\frac{\cos \varphi}{(2\pi)^3 |\mathcal{R}_\theta \times \mathcal{R}_\varphi|}} \operatorname{Re} \left[ e^{-\frac{i\pi m_j}{2}} f(s-t) \right] \Bigg|_{s=s_j(\mathbf{r}), \theta=\theta_j(\mathbf{r}), \varphi=\varphi_j(\mathbf{r})}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $c = c(\mathbf{r})$  – поле скорости звука, а суммирование выполняется по всем лучам, соединяющим точку излучения и точку приема.

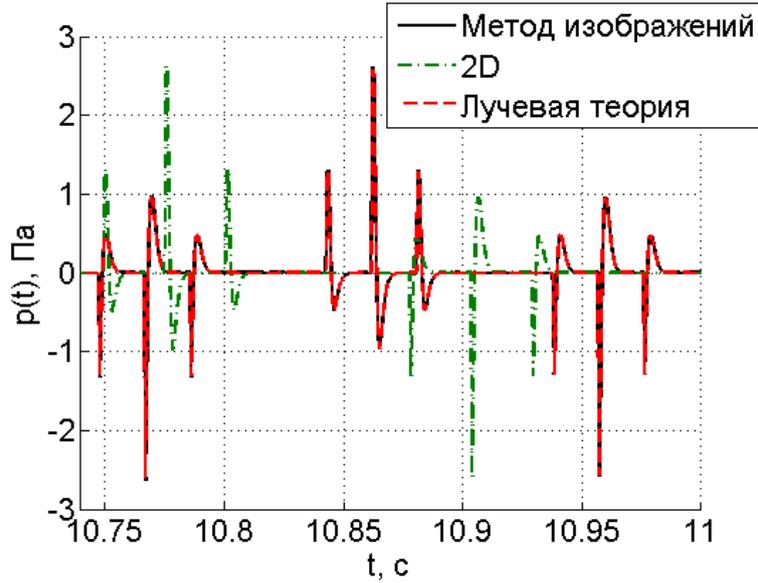


Рис. 2. Временной ряд в точке приема для случая  $x_r = 5$  км, временной отрезок от 10,75 до 11 с от начала отсчета времени, рассчитанный по методу изображений (сплошная линия) и с помощью лучевой теории (пунктирная линия). Дополнительно показано решение на этом интервале в случае, если дно параллельно поверхности (штрихпунктирная линия).

В разделе 2.4 аналогичная формула для временного ряда выводится для случая, когда точка приема является фокальной для семейства лучей. Эта фор-

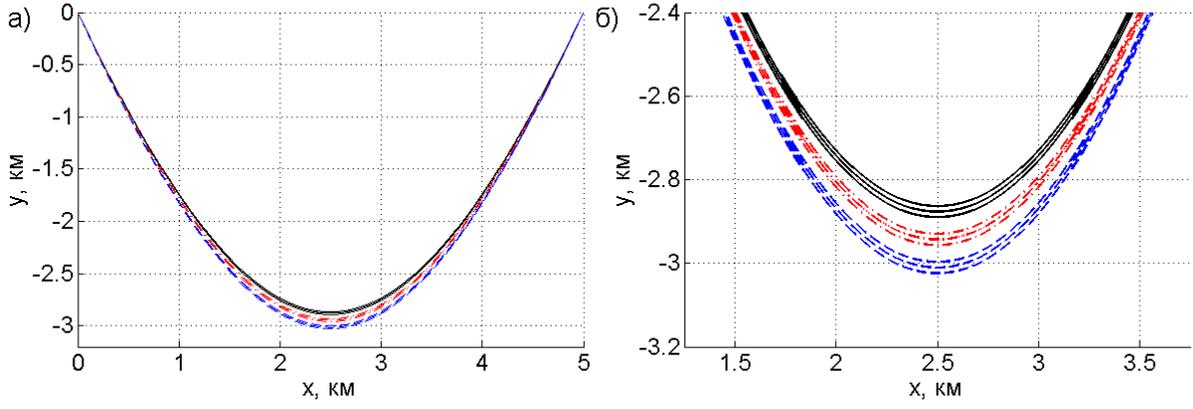


Рис. 3. Проекция лучей на горизонтальную плоскость для приходов на рис. 2 (а). Увеличенное изображение горизонтальных лучей поблизости от точки заворота (б). На рисунке выделяется три группы по 4 луча (два луча в каждой группе фактически сливаются), изображенные сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями. Каждая группа лучей соответствует «трезубцу» приходов на рис. 2.

мула имеет вид

$$P_{prop}(\mathbf{r}, t) = \frac{c_0^2}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left[ e^{-\frac{i\pi m}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|\cos \varphi \det M|}}{|\mathcal{R}_\theta|} \chi(\mathbf{r}, \varphi) F_2(c_0(s-t), \theta, \varphi) |_{s=s(\mathbf{r}, \varphi), \theta=\theta(\mathbf{r}, \varphi)} d\varphi \right], \quad (7)$$

где

$$F_2(z, \theta, \varphi) = \int_0^\infty e^{i\rho z \bar{g}_0} \left( \frac{c_0 \rho}{\lambda} \right) \rho^{\frac{3}{2}} d\rho,$$

а  $\chi(\mathbf{r}, \varphi)$  — такая гладкая функция, что  $\chi = 1$  на множестве  $\{(\mathbf{r}, \varphi) : t_\varphi = 0\}$  и  $\chi(\mathbf{r}, \cdot)$  равна нулю вне некоторой ограниченной области для любого  $\mathbf{r}$ .

В разделе 2.5 выведенные во второй главе формулы используются для расчета импульсных сигналов для акустической трассы в клиновидном прибрежном волноводе, ориентированной параллельно ребру клина (см. пример рассчитанного сигнала на рис. 2 и проекции лучей, испытывающих горизонтальную рефракцию на наклонном дне, на рис. 3). С позиций теории инвариантов Вестона обсуждается геометрия лучей в этой задаче.

Результаты второй главы опубликованы в работах [52, 53, 58].

**В третьей главе** работы вводятся основные понятия модовой теории распространения звука, выводится уравнение горизонтальной рефракции (уравнение для коэффициентов разложения звукового поля по модам), а также рассматриваются случаи, когда в решении этого уравнения имеется компонента, обладающая *горизонтальной модовой структурой* (эта модовая структура является одним из возможных проявлений горизонтальной рефракции звука).

В разделе 3.1 вводится акустическая спектральная задача, из которой определяются модовые функции, а также горизонтальные волновые числа, с помощью которых может быть получено точное решение уравнения Гельмгольца в случае, когда среда является стратифицированной по глубине  $z$  и однородной по горизонтальным координатам  $x, y$ . Далее обсуждаются свойства решений акустической спектральной задачи и методы их вычисления, приводятся формулы для производных горизонтальных волновых чисел по глубине моря  $h$ . В заключительной части раздела выводится система связанных уравнений для модовых амплитуд разложения поля

$$P(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(x, y) \phi_j(z, x, y), \quad (8)$$

в нерегулярном волноводе. После отбрасывания членов, описывающих взаимодействие мод (т.е. в адиабатическом приближении), уравнения системы разделяются и принимают вид *уравнений горизонтальной рефракции*

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j}{\partial y^2} + k_j^2(x, y) A_j = -\delta(x) \delta(y) \phi_j(z_s). \quad (9)$$

В разделе 3.2 рассматривается лучевая теория для уравнения горизонтальной рефракции (9), вводится понятие горизонтального луча и устанавливается связь между горизонтальными лучами и проекциями трехмерных лучей (лучевых траекторий трехмерного уравнения Гельмгольца). Далее определяется угол скольжения луча, ассоциированный с модой, и устанавливается связь теории горизонтальных лучей с теорией волноводных инвариантов Вестона (показано, что первый инвариант Вестона пропорционален номеру моды, а второй

инвариант Вестона фактически представляет собой инвариант Снеллиуса для горизонтальных лучей).

В разделе 3.3 строятся решения уравнения горизонтальной рефракции, соответствующие компонентам звукового поля, фокусирующегося над подводным каньоном в мелком море (см. рис. 4(а)). Ввиду того, что глубина моря не зависит от координаты  $x$ , оказывается возможным использовать метод Фурье для решения уравнения (9) в данном случае. При этом по переменной  $y$  получается спектральная задача для переменной разделения. В частном случае, когда батиметрический профиль описывается формулой

$$h(x, y) = h_0 + h_1(y) = h_0 + \Delta h F(\sigma y) = h_0 + \frac{\Delta h}{\operatorname{ch}^2(\sigma y)}, \quad (10)$$

оказывается возможным аналитически найти решения этой задачи в терминах гипергеометрических функций. Из условия ограниченности решений, соответствующих захваченным каньоном горизонтальным модам, следует, что в этом случае гипергеометрические функции в формулах для этих решений обращаются в полиномы. Таким образом, компонента поля, формируемая звуковыми волнами, сфокусированными в толще воды над каньоном, может быть вычислена аналитически (результат такого расчета показан на рис. 4(б)).

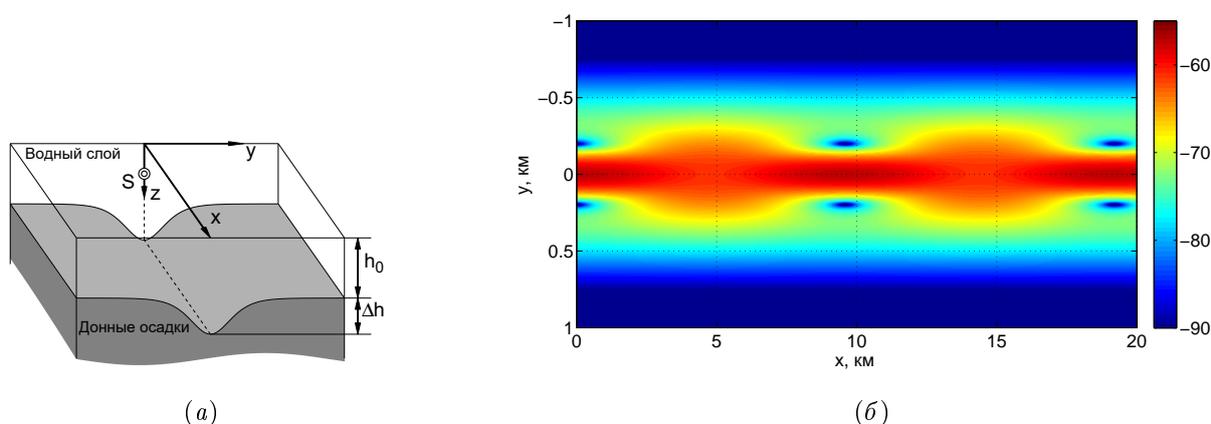


Рис. 4. Трехмерный волновод мелкого моря с подводным каньоном (а) и компонента акустического поля  $P(x, y, z = z_s)$  (в дБ отн. 1 м), состоящая из волн, сфокусированных над каньоном, на глубине источника  $z = z_s$  как функция горизонтальных координат  $(x, y)$  (б).

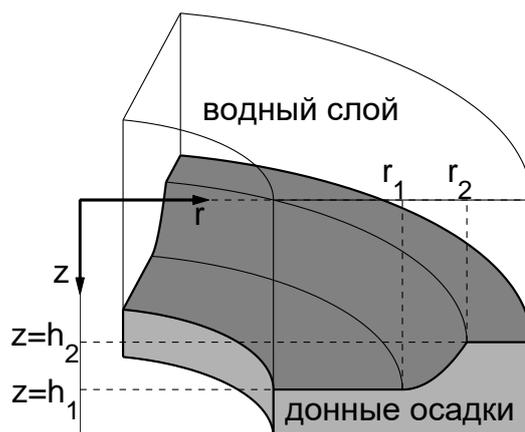


Рис. 5. Волновод мелкого моря с изобатами, имеющими форму дуг concentрических окружностей.

В разделе 3.4 построена теория волн шепчущей галереи, образующихся в результате горизонтальной рефракции звука в мелком море в окрестности семейства криволинейных изобат (см. рис. 5). Шепчущая галерея (ШГ) может быть сформирована, если угол между градиентом глубины и направлением на центр кривизны семейства изобат является малым. На основе теории горизонтальных лучей в диссертации также показано, что для формирования ШГ (в компоненте поля, соответствующей некоторой вертикальной моде  $j$ ) в окрестности семейства изобат, имеющих форму дуг concentрических окружностей, необходимо выполнение условия

$$k_j(r)r > k_j(r_{\max})r_{\max} = k_j(r_{\min})r_{\min} \quad (11)$$

для всех точек в интервале  $r_{\min} < r < r_{\max}$  (т.е. внутри некоторого сектора кольца). Далее теория горизонтальных лучей использована для оценки интенсивности компоненты звукового поля, сформированного волнами ШГ. Показано, что при определенных реалистичных условиях (например, при распространении вдоль отрезка изобаты с угловой мерой  $\pi/2$  уровень интенсивности ШГ-компоненты превышает уровень прямого сигнала более чем на 10 дБ).

Большая часть раздела 3.4 посвящена построению ВКБ-теории волн ШГ,

локализованных в окрестности криволинейных изобат. Для радиального батиметрического профиля общего вида описаны методика расчета азимутальных волновых  $\nu$  чисел мод ШГ, основанная на приближении ВКБ, приводящем в данном случае к условию квантования

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{(k_j(r))^2 - \frac{\nu^2}{r^2}} dr = \pi(m + 1/2), \quad (12)$$

где  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$  суть точки заворота соответствующей конгруэнции лучей. Рассмотрен также и способ дальнейшего уточнения значений  $\nu$ , полученных в рамках приближения ВКБ (и расчета мнимых частей, т.к. эти волновые числа заведомо являются комплексными, а ВКБ дает только их вещественную часть), основанный на теории возмущений, а также алгоритм вычисления соответствующих радиальных собственных функций  $R_\nu = R_\nu(r)$  (представлены на рис. 6(а)). Завершает раздел описание метода вычисления компоненты акустического поля точечного источника, состоящей из волн ШГ (см. рис. 6(б)). Этот метод основан на ортогональности радиальных модовых функций и приводит к формуле

$$P_{WG}(x, y, z) = \sum_{j,\nu} C_{j\nu} \phi_j(r, z) R_{j\nu}(r) e^{i\nu\theta} \quad (13)$$

для ШГ-компоненты поля, где  $C_{j\nu}$  суть коэффициенты возбуждения мод ШГ для данной вертикальной моды  $\phi_j(z)$ . Показано, что коэффициенты возбуждения имеют вид

$$C_{j\nu} = \frac{iR_{j\nu}(r_s)\phi_j(z_s)}{2\rho(z_s)\langle R_{j\nu}, R_{j\nu} \rangle}. \quad (14)$$

Результаты третьей главы опубликованы в работах [38, 45, 60].

**Четвертая глава** диссертации посвящена получению приближенных аналитических решений задач распространения звука в мелком море с трехмерными неоднородностями рельефа дна различного типа в рамках теории узкоугольного модового параболического уравнения. Кроме этого в данной главе описана разработанная нами методика численного моделирования распространения

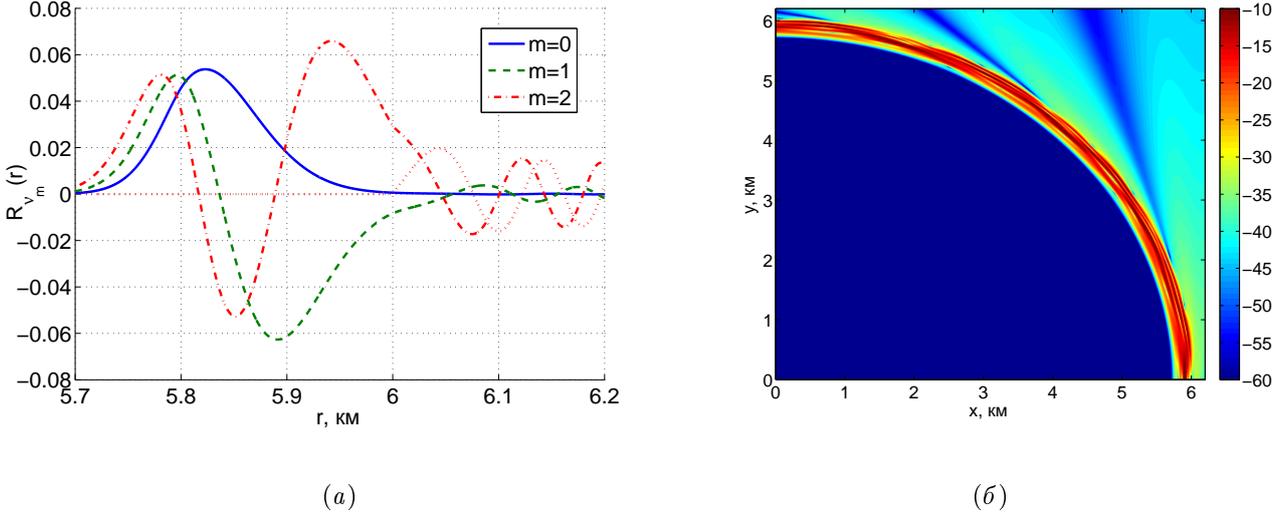


Рис. 6. Радиальные профили мод ШГ  $\text{Re}(R_{\nu_m}(r))$ , соответствующие  $m = 0, 1, 2$ .  $\text{Im}(R_{\nu_m}(r))$  равны нулю для  $r < r_2$ , но хорошо видны для высших мод при  $r > r_2$ . Например, здесь точечная линия изображает  $\text{Im}(R_{\nu_3}(r))$  (а). Компонента звукового поля точечного источника, сформированная волнами ШГ (в дБ отн. 1 м). Источник расположен в точке  $x = 5,9$  км,  $y = 0$  (б).

звука в трехмерных волноводах мелкого моря, основанная на решении псевдодифференциальных и широкоугольных модовых параболических уравнений.

В разделе 4.1 описан вывод модового параболического уравнения (МПУ)

$$2ik_{j,0} \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}_j}{\partial y^2} - V(x, y) \mathcal{A}_j = 0, \quad (15)$$

выполнена линейаризация коэффициента  $V(x, y)$  относительно вариаций глубины (на основе теории возмущения акустических мод), а также получено начальное условие, при котором решение задачи Коши для МПУ приближает поле точечного источника. Далее в разделе обсуждается вопрос о применимости сделанных при выводе предположений.

В разделе 4.2 с использованием теоретико-групповых методов строятся аналитические решения узкоугольных МПУ. Именно, для решения задачи о клине (когда  $V$  линейно по  $y$  и не зависит от  $x$ ) нами используется формула Хаусдорфа. В более общих случаях, когда  $V(x, y)$  представляет собой линейную или квадратичную функцию  $y$ , коэффициенты которой суть произвольные гладкие функции  $x$ , мы используем теорию алгебр Ли и теорему Вея-Нормана

о представлении оператора эволюции, связанного с МПУ, в виде произведения экспонент операторов, формирующих базис алгебры Ли.

В разделе 4.3 мы рассматриваем примеры расчета звуковых полей в трехмерных волноводах мелкого моря по формулам, полученным в предыдущем разделе. Сначала мы рассматриваем задачу о клине, а результаты расчета в этом случае сравниваются с результатами, полученными с помощью трехмерного параболического уравнения. Далее рассматриваем волновод с вариациями наклона дна вдоль акустической трассы. При этом  $V(x, y)$  линейна по  $y$  для всех  $x$ , однако коэффициенты меняются вдоль трассы периодически. Эта модель является упрощенным представлением мелкого моря с грядами дюн. В завершающем примере мы рассматриваем распространение звука вдоль гребня подводного хребта (см. рис. 7). В этом случае распространение звука имеет антиволноводный характер. Результаты расчета сравниваются с результатами, полученными с помощью метода виртуальных источников, при этом наблюдается отличное качественное и количественно сходство (см. рис. 8).

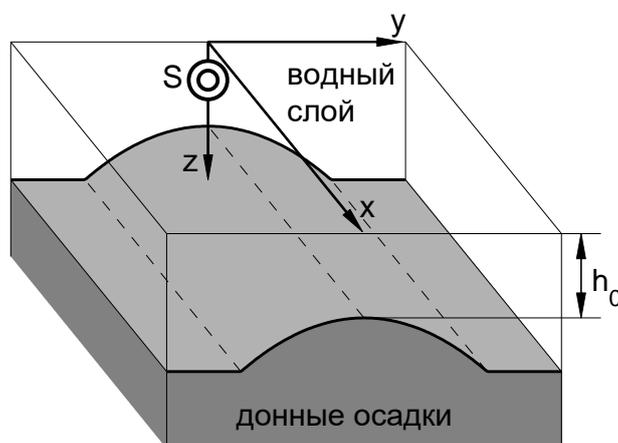


Рис. 7. Волновод мелкого моря с подводным хребтом.

Далее в разделе 4.3 отмечена следующая особенность (межмодовой) интерференционной картины звукового поля (см. рис. 8). В то время, как в окрестности источника интерференционные максимумы и минимумы расположены на кривых, напоминающих семейство концентрических окружностей с увеличива-

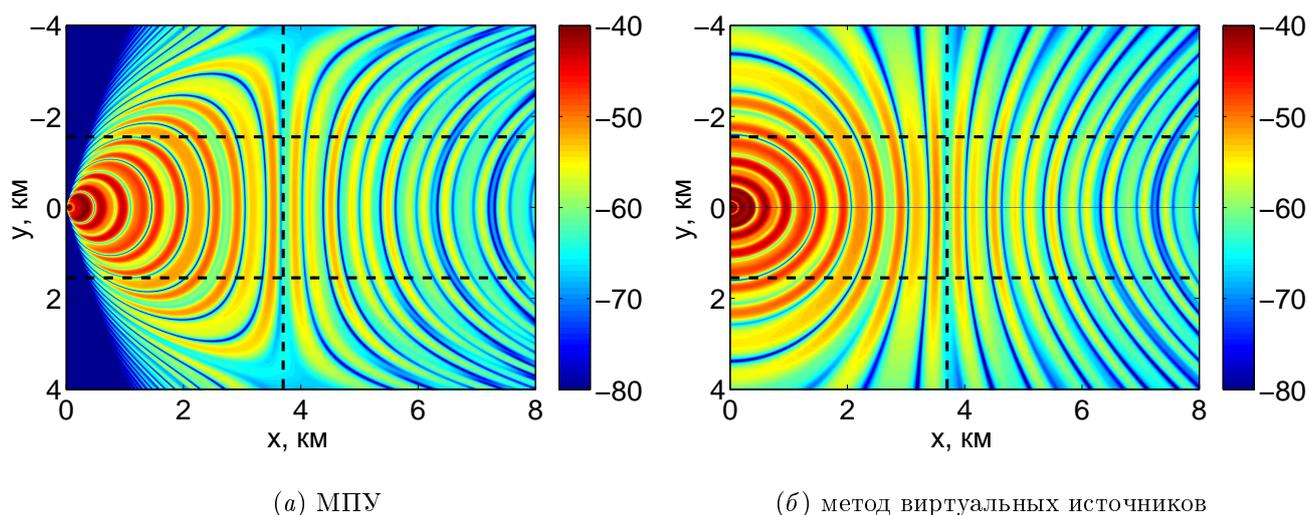


Рис. 8. Звуковое поле, сформированное источником, расположенным над гребнем хребта  $y = 0$ , показанного на Рис. 7, вычисленное с помощью МПУ (а) и метода виртуальных источников (б) (в дБ отн. 1 м). Заметим, что при  $x < x_c = 3,75$  км кривые, соответствующие положению максимумов/минимумов интерференционной картины, определяются вогнутыми (в направлении на источник) функциями  $x = x(y)$ , а при  $x > x_c$  эти функции являются выпуклыми.

ющимися радиусами, на некотором расстоянии от излучателя (в окрестности прямой  $x_c = 3.7$  км) кривизна волновых фронтов  $\kappa$  становится близкой к нулю, а затем и вовсе меняет знак. В результате этого волновые фронты становятся выпуклыми в направлении на источник (в то время как обычно расходящиеся от источника волны имеют фронты, выпуклые в направлении  $x \rightarrow \infty$ , как при  $x < x_c$ ). Объяснение этого эффекта дано в разделе 4.4, где аналитические выражения для модовых амплитуд используются для получения явных уравнений для линий, соответствующих максимумам и минимумам интерференционной картины.

В разделе 4.5 описана методика расчета акустических полей в волноводах мелкого моря с трехмерными неоднородностями рельефа дна (в адиабатическом приближении), основанная на численном решении широкоугольных МПУ (ШМ-ПУ). При этом выведены граничные условия прозрачности для этих уравнений, а также предложена численная схема для их решения. Кроме того, рассмотре-

ны различные варианты начальных условий (т.н. стартеров) для ШМПУ, позволяющих моделировать поле точечного источника звука. Показано, что только предложенный нами лучевой стартер не налагает дополнительных ограничений на шаги сетки при решении ШМПУ и, таким образом, позволяет в наибольшей степени воспользоваться основным преимуществом данного метода (возможностью использования шага маршевой схемы, значительно превышающего длину волны звука).

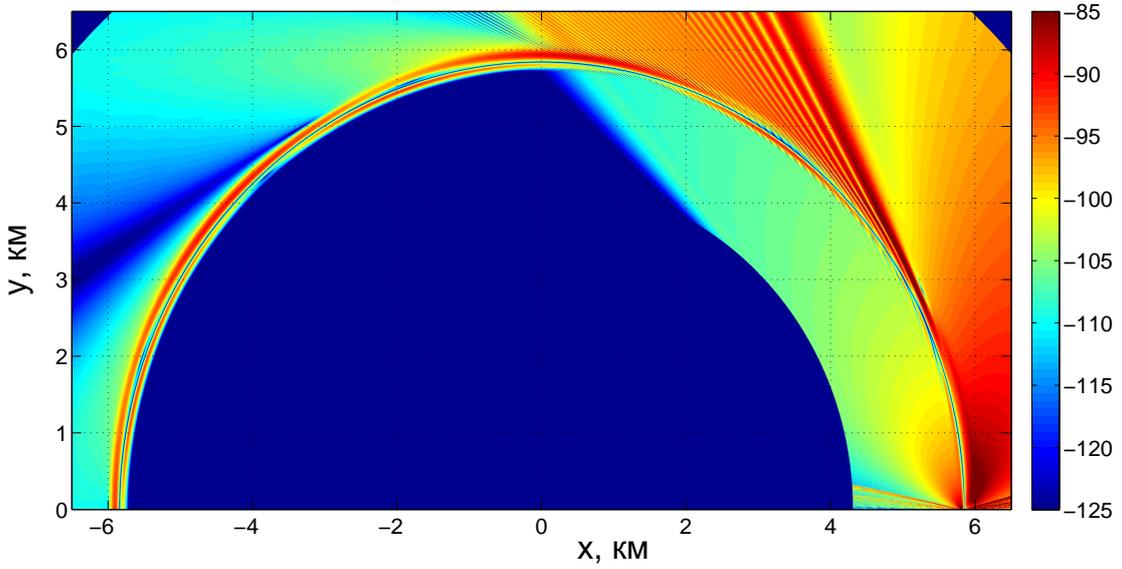


Рис. 9. Акустическое поле  $P_3$  (в дБ отн. 1 м) в мелком море с круговыми изобатами и радиальным батиметрическим профилем, обеспечивающим условия для формирования волн ШГ как функция горизонтальных координат  $x, y$  при  $z = z_s = 10$  м.

В разделе 4.6 предложена общая методика расчета акустических полей в волноводах мелкого моря с трехмерными неоднородностями рельефа дна (в адиабатическом приближении), основанная на численном решении псевдодифференциальных МПУ (ПДМПУ). В криволинейной ортогональной системе координат  $(s, \xi)$  адиабатическое ПДМПУ может быть записано в виде

$$v_s = i\sqrt{\hat{L}(s)}v, \quad (16)$$

где  $A_j(s, \xi) = \sqrt{\gamma}v(s, \xi)$ ,

$$\hat{L}(s) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\gamma^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left[ \gamma^2 k^2 + \frac{1}{4}(\gamma_\xi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma_{ss}}{\gamma} - \frac{3}{4} \frac{(\gamma_s)^2}{\gamma^2} \right],$$

причем переменный коэффициент  $\gamma = \gamma(s, \xi) = 1 + \xi \kappa(s)$  связан с геометрией координатной линии  $x = X(s)$ ,  $y = Y(s)$ , а  $\kappa(s)$  есть ее кривизна. В разделе описана методика решения (16), основанная на методе SSP и применении совершенных поглощающих слоев. В качестве примера рассмотрена задача о волнах ШГ, распространяющихся вдоль криволинейной изобаты (ранее обсуждавшаяся в разделе 3.4 с позиций приближений ВКБ). С помощью ПДМПУ в этой задаче можно рассчитать звуковое поле, состоящее как из волн ШГ, так и из обычных волн с цилиндрической расходимостью, излучаемых точечным источником, расположенным поблизости от изобаты, вокруг которой сформирована ШГ. Показано, что вдали от источника (где расходящимися волнами можно пренебречь) решение задачи с использованием ПДМПУ совпадает с решением, полученным в рамках ВКБ-теории.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [47, 51, 60, 61].

**В пятой главе** строится теория итеративных параболических уравнений (ИПУ), а также рассматривается методика расчета акустических полей в неоднородных волноводах мелкого моря с использованием ИПУ.

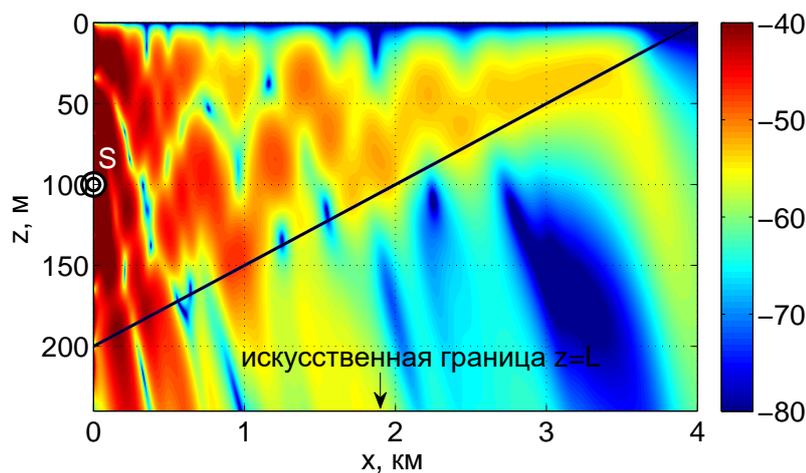
В разделе 5.1 рассматривается вывод итеративных параболических уравнений для двумерного уравнения Гельмгольца с помощью метода многих масштабов. Полученная система ИПУ имеет вид

$$2i \frac{1}{\rho} \kappa_0 \bar{A}_{j,x} + \left( \frac{1}{\rho} \bar{A}_{j,z} \right)_z + \left[ i \left( \frac{1}{\rho} \kappa_0 \right)_x + \frac{1}{\rho} \bar{\nu} \right] \bar{A}_j + \left( \frac{1}{\rho} \bar{A}_{j-1,x} \right)_x = 0, \quad (17)$$

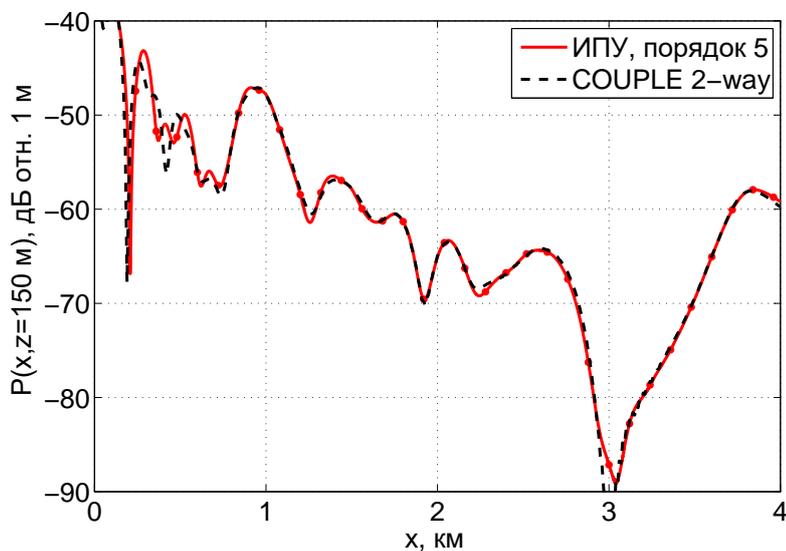
и, таким образом, решение  $i$ -ого уравнения используется в ней как вынуждающий член в  $i + 1$ -ом уравнении. Комплексное поле акустического давления  $P(x, z)$ , удовлетворяющее двумерному уравнению Гельмгольца может быть приближенно рассчитано по формуле

$$P(x, z) \approx \sum_{j=0}^n P_j(x, z) = \exp \left( i \int_0^x \kappa_0(x) dx \right) \sum_{j=0}^{j=n} A_j(x, z). \quad (18)$$

Такую частичную сумму ряда, составленного из решений  $n + 1$  первых уравнений системы (17) (уравнений для  $j = 0, \dots, n$ ) мы называем *широкоугольной*



(a)



(б)

Рис. 10. Контурный график уровней акустического поля (в дБ отн. 1 м от источника) в вертикальном сечении клиновидного волновода, полученный путем решения задачи с использованием ИПУ и ГУП (21) (широкоугольная параболическая аппроксимация четвертого порядка). Положение источника отмечено буквой S, а батиметрический профиль (рельеф дна) показан сплошной жирной линией (а). Уровни акустического поля на горизонтах  $z = 30$  м (верхний подграфик) и  $z = 150$  м (нижний подграфик) как функции расстояния от источника  $x$ , вычисленные путем решения ИПУ (17) с использованием ГУП (21) (сплошная линия) и модовой программы COUPLE (пунктирная линия) (б).

*параболической аппроксимацией порядка  $n$ .* Вывод, рассмотренный нами для случая двумерного уравнения Гельмгольца в вертикальной плоскости, без каких-либо изменений повторяется и для уравнения горизонтальной рефракции

(9).

Далее в разделе 5.1 выводятся также условия на (нерегулярной) границе раздела  $z = h(x)$  для системы ИПУ. При этом используются в точности те же многомасштабные разложения, что и при выводе (17), так что условия оказываются полностью согласованными с ИПУ:

$$\begin{aligned} \bar{A}_j|_{z=h(x)+0} &= \bar{A}_j|_{z=h(x)-0}, \\ \left[ \frac{1}{\rho} (\bar{A}_{j,z} + i\kappa_0 h_x \bar{A}_j + h_x \bar{A}_{j-1,x}) \right] \Big|_{z=h(x)+0} &= \left[ \frac{1}{\rho} (\bar{A}_{j,z} + i\kappa_0 h_x \bar{A}_j + h_x \bar{A}_{j-1,x}) \right] \Big|_{z=h(x)-0}, \quad 0 \leq j \leq n-1. \end{aligned} \quad (19)$$

Отмечено, что условия для нерегулярной границы раздела в теории широкоугольных параболических уравнений впервые получены именно в наших работах [43, 66]. В работах наших предшественников почти исключительно использовались ступенчатые аппроксимации батиметрического профиля, что приводило к ряду неудобств, как вычислительного, так и принципиального характера. Далее показано, что условие Неймана для уравнения Гельмгольца на нижней границе расчетной области влечет следующее условие для системы (17)

$$\bar{A}_{j,z} + i\kappa_0 H_x \bar{A}_j + H_x \bar{A}_{j-1,x} = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1 \quad \text{при} \quad z = H(x). \quad (20)$$

В разделе 5.2 формулируется теорема об асимптотическом сохранении потока энергии системой ИПУ. Доказательство теоремы существенным образом опирается на условия (19) и (20).

После этого доказывается равномерная сходимость ряда (18) к решению двумерного уравнения Гельмгольца на любом наперед заданном интервале в случае стратифицированной по поперечному направлению  $z$  среды.

В разделе 5.3 выводятся граничные условия прозрачности (ГУП) для системы ИПУ, которые являются прямым обобщением ГУП Баскакова-Попова для уравнения Шредингера. Если выбрать отсчетное волновое число  $\kappa_0$  таким образом, что  $\nu_b = 0$  (это условие будет выполнено, если положить  $\kappa_0 = \kappa_b$  в

(17)) то ГУП принимает вид

$$\frac{\partial A_j^t(x, z)}{\partial \mathbf{n}} = -\sqrt{\frac{2\kappa_0}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{k=0}^j \alpha_{k,1} (-2i\kappa_0)^{-k} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\partial^k A_{j-k}^t(y, z)}{\partial y^k} \frac{dy}{\sqrt{x-y}}, \quad (21)$$

при  $z = 0, L$ ,

где  $\alpha_{0,1} = -1, \alpha_{1,1} = \frac{1}{2}, \alpha_{2,1} = \frac{1}{8}$  (последующие значения легко могут быть вычислены с помощью описанной в разделе рекурсивной процедуры).

В разделе 5.4 устанавливается корректность начально-краевой задачи для системы ИПУ (17) с ГУП, полученными в разделе 5.3.

В разделе 5.5 предлагается численная схема для решения системы ИПУ (17) с ГУП и условиями на наклонных границах раздела. Отметим, что предложенная схема является дискретизацией широкоугольного параболического уравнения (точнее, системы ИПУ), учитывающей наклон границы раздела (вместо его ступенчатой аппроксимации). Раздел завершается доказательством безусловной устойчивости разработанной нами численной схемы. Важность этого результата состоит в том, что, вообще говоря, даже безусловно устойчивые ре-се численные схемы (такие, как известная схема Крэнка-Николсон), зачастую становятся лишь условно устойчивыми, если дополнить их ГУП [46].

Раздел 5.6 посвящен рассмотрению примеров расчета звуковых полей с помощью разработанной нами численной схемы для решения ИПУ с полученными в разделе 5.3 ГУП. Контурный график поля для двумерной задачи распространения звука в клине представлен на рис. 10(а). На рис. 10(б) показано сравнение разреза этого поля вдоль линии  $z = 30$  м с эталонным решением, полученным с помощью теории взаимодействующих мод.

Результаты пятой главы опубликованы в работах [43, 46, 48, 49].

**В шестой главе** рассматривается влияние горизонтальной рефракции низкочастотного звука на протяженных трассах, ориентированных поперек наклона дна в мелком море, на точность решения задач акустической дальнометрии. Кроме этого обсуждается вклад горизонтальной рефракции в дисперсию

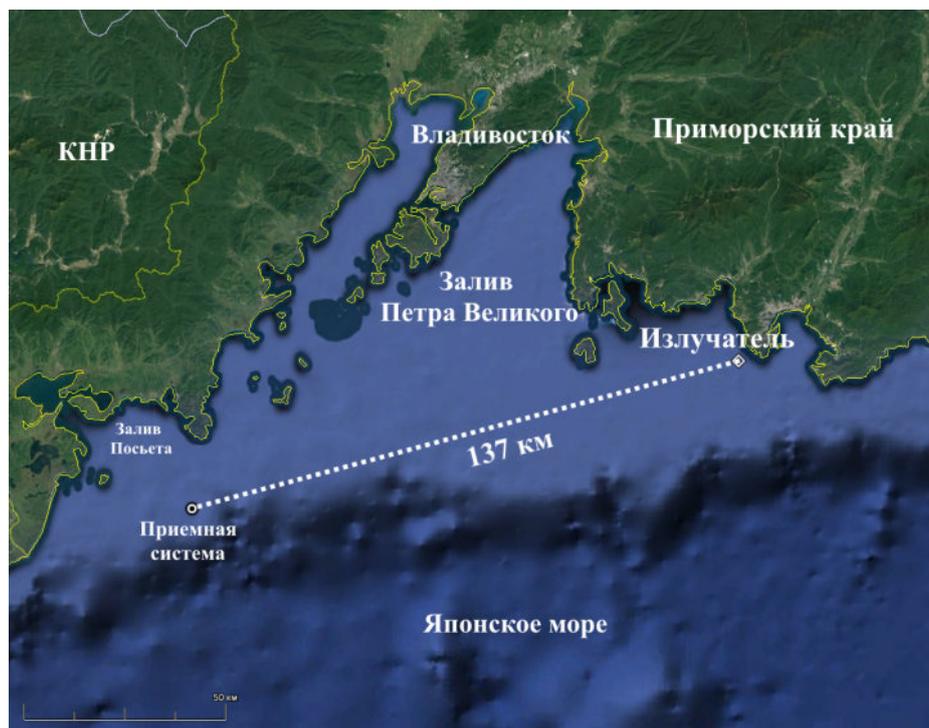


Рис. 11. Общая схема эксперимента, рассматриваемого в шестой главе работы.

импульсных сигналов.

В разделе 6.1 представлено описание натурального эксперимента, выполненного на трассе в Японском море, ориентированной приблизительно вдоль кромки шельфа. Трасса имела протяженность около 137 км (см. рис. 11).

В разделе 6.2 рассматриваются импульсные характеристики (ИХ) сигналов, зафиксированных в точке приема (рассчитаны как ВКФ излучаемой М-последовательности и сигнала в приемнике). По данным о моментах времени, соответствующих максимумам ИХ, а также данным GPS были оценены эффективные скорости распространения импульсных сигналов вдоль данной трассы.

В разделе 6.3 путем численного моделирования с использованием широкоугольных параболических уравнений исследуется модовая структура поля вдоль трассы в данном эксперименте. Показано, что при варьировании параметров дна в разумных пределах максимум ИХ сигнала на больших расстояниях связан с модальной компонентой низшей моды, возбуждаемой источником звука. По-видимому, это утверждение имеет достаточно общий характер, так как модальные коэффициенты затухания в мелкой воде быстро возрастают с

увеличением номера моды. Таким образом, на трассах протяженностью десятки и сотни километров в мелком море максимум импульсной характеристики соответствует усредненной по трассе групповой скорости первой моды. Эту скорость мы называем эффективной.

В разделе 6.4 обсуждается методика расчета эффективной скорости, как основной величины, необходимой для решения задач акустической дальнометрии. Эта величина может быть рассчитана на основе информации о батиметрическом профиле вдоль трассы, а также сведений о гидрологических условиях в данном районе. Расчет может быть выполнен путем разбиения трассы на сегменты некоторыми сечениями, причем групповая скорость рассчитывается в каждом сечении, после чего значения в начале и конце каждого сегмента усредняются. Данный метод расчета применен к анализу описанного в разделе 6.1 эксперимента. Показано, что расчет эффективной скорости по описанной методике приводит к ошибке определения дальности порядка 65 м.

В разделе 6.5 мы устанавливаем, что оценка дальности по времени прихода максимума ИХ (или оценка времени прихода по данным GPS) может быть существенно уточнена с привлечением представлений о горизонтальной рефракции. Действительно, в условиях мелкого моря с трехмерными неоднородностями рельефа дна распространение звука от источника к приемнику в горизонтальной плоскости происходит не вдоль геодезической, а вдоль собственного горизонтального луча соответствующей моды. Оценивая удлинение луча по сравнению с геодезической (см. рис. 12), и учитывая его при расчете дальности, мы получаем ошибку позиционирования всего в 31 м.

Результаты шестой главы опубликованы в работах [56, 57, 59].

**В Заключении** дана общая характеристика результатов, полученных в диссертации, а также обозначено их место в системе научного знания.

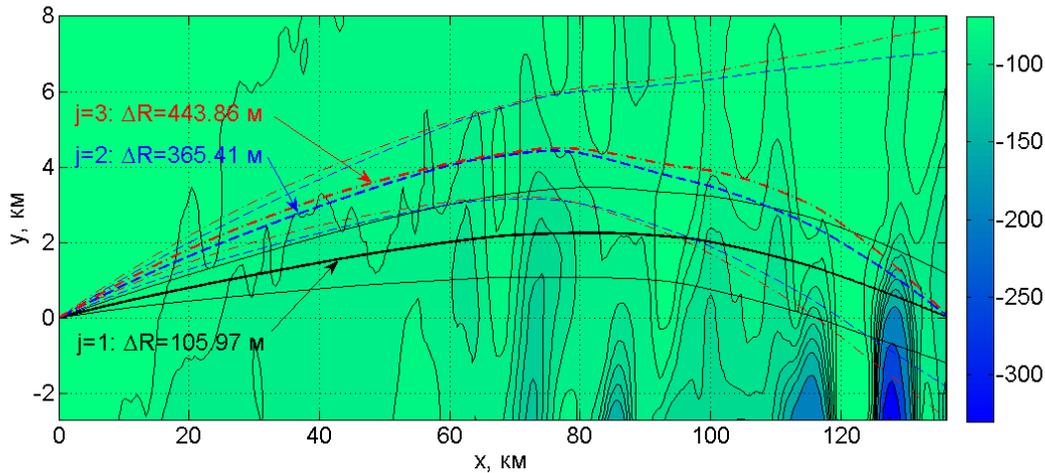


Рис. 12. Лучи первых трех мод для трассы в случае частоты 400 Гц. Видно, что длина луча первой моды превышает длину трассы на 105,97 метров. При этом сам луч выходит из источника под углом  $\alpha = 2,56^\circ$ . Аналогичные данные приведены на рисунке для 2-й и 3-й моды.

## Цитированная литература

1. Weston D. E. Horizontal refraction in a three-dimensional medium of variable stratification // *Proceedings of the Physical Society*. — 1961. — Vol. 78, no. 1. — P. 46.
2. Harrison C. H. Acoustic shadow zones in the horizontal plane // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1979. — Vol. 65, no. 1. — P. 56–61.
3. Burridge R., Weinberg H. Horizontal rays and vertical modes // *Wave propagation and underwater acoustics*. — Springer, 1977. — P. 86–152.
4. Doolittle R., Tolstoy A., Buckingham M. Experimental confirmation of horizontal refraction of cw acoustic radiation from a point source in a wedge-shaped ocean environment // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1988. — Vol. 83, no. 6. — P. 2117–2125.
5. Badiey M., Lynch J. Recent studies of acoustic wave propagation in shallow water waveguides with variable water column properties // *AIP Conference Proceedings / American Institute of Physics*. — Vol. 1495. — 2012. — P. 105–126.

6. Reeder D. B., Lin Y.-T. 3d acoustic propagation through an estuarine salt wedge at low-to-mid-frequencies: Modeling and measurement // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1888–1902.
7. DeCourcy B. J., Lin Y.-T., Siegmann W. L. Effects of front width on acoustic ducting by a continuous curved front over a sloping bottom // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1923–1933.
8. Parameter dependence of acoustic mode quantities in an idealized model for shallow-water nonlinear internal wave ducts / M. A. Milone, B. J. DeCourcy, Y.-T. Lin, W. L. Siegmann // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1934–1945.
9. Underwater acoustic energy fluctuations during strong internal wave activity using a three-dimensional parabolic equation model / G. A. Dossot, K. B. Smith, M. Badié et al. // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1875–1887.
10. Multiscale multiphysics data-informed modeling for three-dimensional ocean acoustic simulation and prediction / T. F. Duda, Y.-T. Lin, A. E. Newhall et al. // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1996–2015.
11. Harrison C. H. Three-dimensional ray paths in basins, troughs, and near seamounts by use of ray invariants // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1977. — Vol. 62, no. 6. — P. 1382–1388.
12. Taroudakis M. I. A coupled-mode formulation for the solution of the helmholtz equation in water in the presence of a conical sea-mount // Journal of Computational Acoustics. — 1996. — Vol. 4, no. 01. — P. 101–121.
13. Athanassoulis G. A., Prospathopoulos A. M. Three-dimensional acoustic scattering of a source-generated field from a cylindrical island // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1996. — Vol. 100, no. 1. — P. 206–218.
14. Luo W., Schmidt H. Three-dimensional propagation and scattering around

- a conical seamount // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2009. — Vol. 125, no. 1. — P. 52–65.
15. Deane G., Buckingham M. An analysis of the three-dimensional sound field in a penetrable wedge with a stratified fluid or elastic basement // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1993. — Vol. 93, no. 3. — P. 1319–1328.
  16. Кацнельсон Б. Г., Пересёлков С. А. Горизонтальная рефракция низкочастотного звукового поля, вызванная солитонами внутренних волн в мелководном волноводе // *Акуст. журн.* — 2000. — Т. 46, № 6. — С. 779.
  17. Кацнельсон Б. Г., Бади М., Линч Д. Горизонтальная рефракция звука в мелком море и ее экспериментальные наблюдения // *Акустический журнал*. — 2007. — Т. 53, № 3. — С. 362–376.
  18. Measurement and modeling of three-dimensional sound intensity variations due to shallow-water internal waves / M. Badiéy, B. G. Katsnelson, J. F. Lynch et al. // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2005. — Vol. 117, no. 2. — P. 613–625.
  19. Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A. Effect of intense internal waves on the sound field interference structure // *Physics of Wave Phenomena*. — 2010. — Vol. 18, no. 3. — P. 223–229.
  20. Monitoring the gray whale sound exposure mitigation zone and estimating acoustic transmission during a 4-D seismic survey, Sakhalin Island, Russia / Roberto Racca, Melanie Austin, Alexander Rutenko, Koen Bröker // *Endangered Species Research*. — 2015. — Vol. 29, no. 2. — P. 131–146.
  21. Baer R. N. Propagation through a three-dimensional eddy including effects on an array // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1981. — Vol. 69, no. 1. — P. 70–75.
  22. Экспериментальное тестирование технологии высокоточной подводной акустической дальнометрии / Ю. Н. Моргунов, В. В. Безответных, В. А. Буренин и др. // *Акустический журнал*. — 2018. — Т. 64, № 2. — С. 191–196.
  23. Deep water acoustic range estimation based on an ocean general circulation

- model: Application to PhilSea10 data / M. Wu, M. P. Barmin, R. K. Andrew et al. // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 6. — P. 4754–4773.
24. Three-dimensional effects in global acoustics / M. D. Collins, B. E. McDonald, K. D. Heaney, W. A. Kuperman // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1995. — Vol. 97, no. 3. — P. 1567–1575.
  25. Perkins J. S., Baer R. N. An approximation to the three-dimensional parabolic-equation method for acoustic propagation // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1982. — Vol. 72, no. 2. — P. 515–522.
  26. Lee D., Botseas G., Siegmann W. L. Examination of three-dimensional effects using a propagation model with azimuth-coupling capability (for3d) // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1992. — Vol. 91, no. 6. — P. 3192–3202.
  27. Lin Y.-T., Duda T. F., Newhall A. E. Three-dimensional sound propagation models using the parabolic-equation approximation and the split-step fourier method // Journal of Computational Acoustics. — 2013. — Vol. 21, no. 01. — P. 1250018.
  28. Sturm F. Leading-order cross term correction of three-dimensional parabolic equation models // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2016. — Vol. 139, no. 1. — P. 263–270.
  29. Lee K., Seong W., Na Y. Three-dimensional Cartesian parabolic equation model with higher-order cross-terms using operator splitting, rational filtering, and split-step Padé algorithm // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 2041–2049.
  30. Ivansson S. Local accuracy of cross-term corrections of three-dimensional parabolic-equation models // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 2030–2040.
  31. АВИЛОВ К. В., КУЛИЧКОВ С. Н., ПОПОВ О. Е. Calculation of the sound fields in the environment model including simultaneously atmosphere, water and

- bottom // Ученые записки физического факультета Московского университета. — 2017. — № 5. — С. 1750101–1750101.
32. Авилов К. В., Попов О. Е. Вычисление низкочастотных звуковых полей в трехмерно неоднородных моделях среды, включающих воду, воздух и грунт // Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики. — 2018. — С. 323–326.
33. Calazan R. M., Rodríguez O. C. Traceo3d ray tracing model for underwater noise predictions // Doctoral Conference on Computing, Electrical and Industrial Systems / Springer. — 2017. — P. 183–190.
34. Porter M. B. Beam tracing for two-and three-dimensional problems in ocean acoustics // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 2016–2029.
35. Collins M. D. The adiabatic mode parabolic equation // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1993. — Vol. 94, no. 4. — P. 2269–2278.
36. Trofimov M. Y. Narrow-angle parabolic equations of adiabatic single-mode propagation in a horizontally inhomogeneous shallow sea // Acoustical Physics. — 1999. — Vol. 45. — P. 575–580.
37. Dobrokhotov S. Y., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B. Asymptotic solutions of 2d wave equations with variable velocity and localized right-hand side // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 17, no. 1. — P. 66–76.

## Список публикаций

38. Katsnelson B., Petrov P. Whispering gallery waves localized near circular isobaths in shallow water // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1343–1352.
39. Petrov P. S., Trofimov M. Y. A nonstationary form of the range refraction parabolic equation and its application as an artificial boundary condition for the wave equation in a waveguide // EPL (Europhysics Letters). — 2009. —

Vol. 85, no. 3. — P. 34001.

40. Trofimov M. Y., Petrov P. On the application of the nonstationary form of the tappert equation as an artificial boundary condition // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2010. — Vol. 167, no. 6. — P. 857–867.
41. Петров П. С., Захаренко А. Д., Трофимов М. Ю. Волновое уравнение с вязкоупругим затуханием и его применение в задачах акустики мелкого моря // *Акустический журнал*. — 2012. — Т. 58, № 6. — С. 747–755.
42. Мониторинг акустического поля сейсморазведочных импульсов в прибрежной зоне / А Н Рутенко, Д И Боровой, В А Гриценко и др. // *Акустический журнал*. — 2012. — Т. 58, № 3. — С. 356–369.
43. Trofimov M. Y., Petrov P. S., Zakharenko A. D. A direct multiple-scale approach to the parabolic equation method // *Wave Motion*. — 2013. — Vol. 50, no. 3. — P. 586–595.
44. Wave chaos in a randomly inhomogeneous waveguide: spectral analysis of the finite-range evolution operator / D. V. Makarov, L. E. Kon'kov, M. Yu. Uleysky, P. S. Petrov // *Physical Review E*. — 2013. — Vol. 87, no. 1. — P. 012911.
45. Petrov P. S., Petrova T. N. Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a sea with an underwater canyon // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2014. — Vol. 136, no. 4. — P. EL281–EL287.
46. Petrov P. S., Ehrhardt M. On Mayfield's stability proof for the discretized transparent boundary condition for the parabolic equation // *Applied Mathematics Letters*. — 2015. — Vol. 44. — P. 45–49.
47. Petrov P. S., Sturm F. An explicit analytical solution for sound propagation in a three-dimensional penetrable wedge with small apex angle // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2016. — Vol. 139, no. 3. — P. 1343–1352.
48. Petrov P. S., Ehrhardt M. Transparent boundary conditions for iterative high-order parabolic equations // *Journal of Computational Physics*. — 2016. — Vol. 313. — P. 144–158.

49. Petrov P. S., Makarov D. V., Ehrhardt M. Wide-angle parabolic approximations for the nonlinear Helmholtz equation in the Kerr media // EPL (Europhysics Letters). — 2016. — Vol. 116, no. 2. — P. 24004.
50. Makarov D. V., Kon'kov L. E., Petrov P. S. Influence of oceanic synoptic eddies on the duration of modal acoustic pulses // Radiophysics and Quantum Electronics. — 2016. — Vol. 59, no. 7. — P. 576–591.
51. Petrov P. S., Prants S. V., Petrova T. N. Analytical lie-algebraic solution of a 3d sound propagation problem in the ocean // Physics Letters A. — 2017. — Vol. 381. — P. 1921–1925.
52. Петров П. С., Сергеев С. А., Толченников А. А. Моделирование распространения импульсных акустических сигналов в глубоком океане с помощью канонического оператора Маслова // Доклады Академии наук. — 2017. — Т. 473, № 2. — С. 142–145.
53. Petrov P. S., Sergeev S. A., Tolchennikov A. A. Modeling of pulse signals in 3d propagation problems of deep-water acoustics based on the modified Maslov's canonical operator // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 25, no. 1. — P. 102–112.
54. К вопросу о методе изображений в задаче о распространении звука в клине в акустике океана: некоторые исправления и дополнения / J. Tang, П. С. Петров, S. Piao, С. Б. Козицкий // Акустический журнал. — 2018. — Т. 64, № 2. — С. 228–240.
55. Petrov P. N., Petrov P. S. Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a shallow sea with the bathymetry described by a parametric quadratic function // J. Acoust. Soc. America. — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1946–1955.
56. Исследования пространственно-временной структуры акустического поля, формируемого в глубоком море источником широкополосных импульсных сигналов, расположенным на шельфе Японского моря / Ю. Н. Моргунов, А. А. Голов, А. В. Буренин, П. С. Петров // Акустический журнал. — 2019. —

- Т. 65, № 5. — С. 641–649.
57. Особенности глубоководного приёма импульсных псевдослучайных сигналов при распространении из шельфа в глубокое море / В. А. Акуличев, Ю. Н. Моргунов, А. А. Голов и др. // Доклады академии наук. — 2019. — Т. 487, № 3. — С. 322–327.
58. Петров П. С., Сергеев С. А., Толченников А. А. Об использовании асимптотических формул на основе модифицированного канонического оператора Маслова при моделировании распространения импульсных акустических сигналов в трехмерных волноводах мелкого моря // Акустический журнал. — 2019. — Т. 65. — С. 799–807.
59. Экспериментальное и теоретическое исследование времен прихода и эффективных скоростей при дальнем распространении импульсных акустических сигналов вдоль кромки шельфа в мелком море / П. С. Петров, А. А. Голов, В. В. Безответных и др. // Акустический журнал. — 2020. — Т. 66, № 1. — С. 20–33.
60. Petrov P. S., Antoine X. Pseudodifferential adiabatic mode parabolic equations in curvilinear coordinates and their numerical solution // Journal of Computational Physics. — 2020. — P. 109392.
61. Wide-angle mode parabolic equations for the modelling of horizontal refraction in underwater acoustics and their numerical solution on unbounded domains / P. S. Petrov, M. Ehrhardt, A. G. Tyshchenko, P. N. Petrov // Journal of Sound and Vibration. — 2020. — P. 115526.
62. Petrov P. S., Trofimov M. Y., Zakharenko A. D. Mode parabolic equations for the modeling of sound propagation in 3d-varying shallow water waveguides // Days on Diffraction (DD), 2012 / IEEE. — 2012. — P. 197–202.
63. Petrov P. S. Asymptotic solution for the problem of acoustic waves propagation in a penetrable truncated wedge // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2013 / IEEE. — 2013. — P. 110–115.
64. Petrov P. S., Petrova T. N., Monakhova A. S. Adiabatic approximate solu-

- tion for the problem of sound propagation in shallow sea with a broadening underwater canyon // Proceedings of Meetings on Acoustics PRUAC2015 / ASA. — Vol. 24. — 2015. — P. 070004.
65. Petrov P. S., Ehrhardt M. Transparent boundary conditions for the high-order parabolic approximations // 2015 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2015. — P. 255–260.
66. Petrov P. S. Three-dimensional iterative parabolic approximations // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2015. — Vol. 138, no. 3. — P. 1929–1929.
67. Petrov P. S., Petrova T. N. On sound propagation in a shallow-water acoustical waveguide with variable bottom slope // 2016 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2016. — P. 327–331.
68. Three-dimensional model benchmarking for cross-slope wedge propagation / O. C. Rodriguez, F. Sturm, P. Petrov, M. Porter // Proceedings of Meetings on Acoustics 173EAA / ASA. — Vol. 30. — 2017. — P. 070004.
69. On the source images method for sound propagation in a penetrable wedge: Some corrections and appendices / J. Tang, P. S. Petrov, S. B. Kozitskiy, S. Piao // 2017 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2017. — P. 304–309.
70. Petrov P. S., Ehrhardt M., Makarov D. V. Multiscale approach to parabolic equations derivation: Beyond the linear theory // Procedia Computer Science. — 2017. — Vol. 108. — P. 1823–1831.
71. Petrov P. S., Tyshchenko A. G., Ehrhardt M. Numerical solution of iterative parabolic equations approximating the nonlinear Helmholtz equation // 2018 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2018. — P. 241–244.
72. Transformation of the modal structure of acoustical field in course of the sound propagation from continental shelf to the deep ocean / P. S. Petrov, A. V. Burenin, A. A. Golov, Yu. N. Morgunov // 2018 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2018. — P. 235–240.

*Научное издание*

Петров Павел Сергеевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук на тему:

Математическое моделирование горизонтальной рефракции звука в  
трехмерных волноводах мелкого моря

Подписано в печать 24 февраля 2021 г. Формат 60 × 90 1/16.

Тираж 110 экз. Заказ № 121

Отпечатано с авторского оригинал-макета в ТОИ ДВО РАН,  
690041, Владивосток, ул. Балтийская, 43.