Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева Дальневосточного отделения Российской академии наук

На правах рукописи

УДК 551.463

Петров Павел Сергеевич

Математическое моделирование горизонтальной рефракции звука в трехмерных волноводах мелкого моря

01.04.06 – Акустика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Петров

Владивосток – 2020

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования.

В настоящее время в акустике океана активно изучаются физические эффекты, связанные с трехмерным характером распространения звука на шельфе и в глубоком океане. Класс таких эффектов, описание которых выходит за рамки двумерной теории распространения акустических волн и приближения несвязанных азимутов, объединяют общим термином *горизонтальная рефракция звука*. По-видимому, он был впервые употреблен Вестоном [1] при описании поведения трехмерных лучей в волноводе с наклонным дном. Искривление проекций этих лучей на горизонтальную плоскость можно считать отличительной особенностью трехмерных задач акустики океана [1, 2]. В рамках развитой Барриджем и Вайнбергом [3] теории эти проекции можно отождествить с горизонтальными лучами, соответствующими вертикальным модам, и такими, что эффективный показатель преломления для них определяется вариациями горизонтальных волновых чисел мод. В эксперименте икривление линий, вдоль которых акустическая энергия распространяется в горизонтальных направлениях, обнаруживается по отклонению направлений прихода отдельных компонент сигнала от направления на источник звука. Такие оклонения можно обнаружить с помощью векторных приемников или, например, горизонтальных приемных антенн. Именно таким способом проявление горизонтальной рефракции было впервые зафиксировано в эксперименте Дулитлом, Толстой и Бакингемом [4].

Различные проявления горизонтальной рефракции, обусловленной как неоднородностями скорости звука [5–10] (например, внутренними волнами, температурными фронтами или синоптическими вихрями), так и неоднородностями рельефа дна [11–15], рассматривались с 60-х годов двадцатого века в многочисленных работах иностранных и отечественных авторов. Среди последних необходимо особо отметить работы Кацнельсона, Переселкова, Кузькина и их соавторов [16–19], в основном посвященные эффектам, связанным именно с гидрологическими неоднородностями (например, с рассеянием звука на пакетах интенсивных внутренних волн). В случае мелкого моря, однако, наиболее распространенным фактором, обуславливающим горизонтальную рефракцию звука, являются неоднородности рельефа дна. Диссертация посвящена систематическому анализу их роли в различных проявлениях горизонтальной рефракции. Особенностью работы является то, что новые решения ряда трехмерных задач акустики мелкого моря с типичными видами неоднородностей батиметрии получены в ней аналитически, например, в виде явных формул для коэффициентов разложения звукового поля по модам (большая часть известных ранее решений даже идеализированных модельных задач связана с использованием численных методов [14, 15]).

Интерес к исследованию горизонтальной рефракции звука в первую очередь связан с некоторыми приложениями акустики океана, выходящими на передний план в последнее время. К их числу относятся мониторинг антропогенных акустических шумов [20], организация систем подводной навигации и связи [21–23], а также задачи глобального моделирования распространения звука [24]. Во всех этих приложениях важную роль играет определение областей фокусировки и акустической тени, формирующихся в горизонтальной плоскости в различных направлениях от источника звука. Кроме того, в случае акустических трасс протяженностью десятки и сотни километров, характерных для этих приложений, уже нельзя считать, что распространение звука от точки излучения до точки приема происходит вдоль геодезической, и геометрия горизонтальных лучей, зависящая как от частоты, так и от номера моды, начинает оказывать заметное влияние на время прихода и форму принимаемого сигнала.

Таким образом, для решения указанных выше практических задач необходимо как качественное понимание физических механизмов, стоящих за проявлениями трехмерных эффектов распространения звука, так и эффективные математические методы для их количественного моделирования. Разработка таких методов также является важным направлением исследований в акустике океана в последние 20-30 лет. Наибольшей популярностью среди них в настоящее время пользуется метод трехмерных параболических уравнений, развиваемый несколькими научными группами в разных странах мира [25–30]. В России основоположником этого метода в акустике океана является Авилов [31, 32]. Несколько менее востребованными являются методы расчета трехмерных звуковых полей, основанные на лучевом приближении и теории гауссовых пучков [33, 34]. Весьма удачным решением с точки зрения вычислительной эффективности является полученная в результате синтеза метода нормальных волн и метода параболического уравнения теория модовых параболических уравнений. Основы этого подхода к расчету звуковых полей заложены в работах Коллинза [35] и Трофимова [36]. До недавнего времени основные результаты в этой области были связаны с узкоугольными параболическими уравнениями. В развитие данного подхода в диссертации предложена методика расчета трехмерных звуковых полей, основанная на решении псевдодифференциальных модовых параболических уравнений (в т.ч. в криволинейных координатах).

Методология и методы исследования.

Результаты второй главы диссертации получены в рамках трехмерной лучевой теории распространения звука в океане и могут быть охарактеризованы как в вклад в ее развитие. Новые результаты в этом направлении удалось получить благодаря использованию метода канонического оператора Маслова и ряда полученных с его помощью общих асимптотических формул [37], описывающих решение волнового уравнения с локализованными начальными данными.

Результаты всех глав, начиная с третьей, получены в рамках модовой теории распространения звука. В третьей главе работы коэффициенты в приближенном модовом разложении акустического поля (модовые амплитуды) вычисляются аналитически с использованием метода разделения переменных, метода ВКБ и теории специальных функций. В разделах 4.1-4.4 для расчета модовых амплитуд используется параболическое уравнение, решение которого находится аналитически с использованием теории групп и алгебр Ли. Отметим, что сама по себе методика решения параболических уравнений, использованная в работе, не является новой.

В разделах 4.5 и 4.6 при выводе широкоугольных и псевдодифференциальных модовых параболических уравнений и их решении использованы метод аппроксимаций Паде для псевдодифференциальных операторов, а также методы искусственного ограничения расчетной области, основанные на использовании граничных условий прозрачности и совершенных поглощающих слоев. Для дискретизации дифференциальных уравнений и операторов, содержащих частные производные, в работе используется метод конечных разностей.

Для вывода итеративных параболических уравнений (ИПУ), а также согласованных с ними граничных и интерфейсных условий, в пятой главе работы применяется метод многомасштабных разложений. Далее в этой же главе для получения граничных условий прозрачности для системы ИПУ используется преобразование Лапласа.

Цели и задачи диссертационной работы:

- сформировать общую физическую картину явления горизонтальной рефракции звука в мелком море, обеспеченную единством и дополнительностью различных математических способов его описания и подкрепленную набором аналитических решений модельных задач, демонстрирующих особенности отдельных его проявлений;

- разработать и апробировать новые методы моделирования распространения звука в трехмерных волноводах мелкого моря, полностью учитывающие горизонтальную рефракцию акустических волн.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи.

1. Получить аналитические решения задач распространения звука в волноводах мелкого моря с подводным каньоном, а также с участком дна, имеющим чашеобразную форму (так что изобаты локально представляют собой дуги концентрических окружностей, а градиент глубины направлен

на центр их кривизны). Исследовать модовую структуру звукового поля в горизонтальной плоскости в этих случаях.

2. Получить решения задач распространения звука в мелком море, где рельеф дна описывается параметрической квадратичной функцией путем аналитического решения модовых параболических уравнений. Использовать полученное решение для качественного и количественного описания структуры звукового поля в клиновидном прибрежном волноводе и волноводе мелкого моря с подводным хребтом.

3. Разработать широкоугольные модовые параболические уравнения для решения трехмерных задач распространения звука в мелком море общего вида в адиабатическом приближении с учетом горизонтальной рефракции звука.

4. Получить систему широкоугольных итеративных параболических уравнений (ИПУ), которые могут быть использованы для аппроксимации решения уравнения горизонтальной рефракции в приближении однонаправленного распространения. Получить граничные условия прозрачности для ИПУ. Разработать безусловно устойчивый численный метод для решения ИПУ в случае, когда расчетная область не имеет физических границ.

5. На примере анализа конкретного эксперимента по дальнему распространению звука исследовать возможный вклад эффекта горизонтальной рефракции в ошибки решения задач акустической дальнометрии в мелком море. Оценить влияние этого эффекта на дисперсию импульсных сигналов.

6. Получить асимптотическое представление звукового поля в волноводе мелкого моря с неоднородным дном с использованием лучевой теории распространения звука и метода канонического оператора Маслова (для регулярных и фокальных точек).

Научная новизна. В работе имеются следующие элементы научной новизны

1. разработан и протестирован новый общий метод решения задач подводной акустики, основанный на решении псевдодифференциальных модовых параболических уравнений в криволинейных координатах;

2. получены новые классы приближенных аналитических решений трехмерных задач распространения звука в волноводах мелкого моря с неоднородным рельефом дна;

3. разработано новое обобщение лучевого метода для решения трехмерных задач акустики океана с возможностью расчета временных рядов импульсных сигналов в случаях, когда приемник находится в фокальной точке семейства лучей;

4. описан новый физический эффект, являющийся проявлением горизонтальной рефракции звука в мелком море и состоящий в формировании волновода шепчущей галереи в окрестности семейства криволинейных изобат;

5. описан новый физический эффект, являющийся проявлением горизонтальной рефракции звука в мелком море с подводным хребтом и состоящий в изменении характера выпуклости волновых фронтов на некотором удалении от источника;

6. получено новое аналитическое решение уравнения горизонтальной рефракции, описывающее распространение звука в мелком море с подводным каньоном;

7. получено новое вязкоупругое волновое уравнение, позволяющее моделировать произвольную зависимость коэффициента поглощения акустических волн в донных осадках от частоты;

8. разработана теория итеративных параболических аппроксимаций для моделирования распространения звука в океане; доказаны существование и единственность решения начально-краевых задач для итеративных параболических уравнений, и доказана теорема о корректности таких задач;

9. разработаны новые граничные условия прозрачности для итеративных параболических уравнений; разработана новая численная схема для решения итеративных параболических уравнений с граничными условиями прозрачности; доказана безусловная устойчивость этой численной схемы;

10. впервые исследовано влияние горизонтальной рефракции, обусловленной неоднородностями батиметрии, на точность решения задач акустической дальнометрии.

Степень разработанности темы исследования. Настоящая диссертация является законченным научным исследованием, в котором представлено разностороннее теоретическое описание явления горизонтальной рефракции звука на неоднородностях батиметрии в мелком море.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы состоит в том, что в ней описан ряд новых физических эффектов, представляющих собой частные проявления горизонтальной рефракции звука в мелком море. К числу этих эффектов относится формирование шепчущей галереи в окрестности искривленной изобаты в мелком море, изменение характера выпуклости волновых фронтов при распространении звука над гребнем подводного хребта, а также действие горизонтальной рефракции как дополнительного механизма увеличения длительности модальных компонент импульсного сигнала.

Кроме того, результаты данной работы значительно расширяют класс трехмерных задач акустики мелкого моря, для которых известны приближенные аналитические решения (до появления наших работ аналитическое решение было известно только для задачи распространения звука в прибрежном клине).

Практическая значимость работы состоит в том, что в ней предложены две новых методики расчета звуковых полей в трехмерных волноводах мелкого моря общего вида (т.е. с произвольным рельефом дна и полем скорости звука в водном слое). В основе одной из них лежит численное решение широкоугольных (и псевдодифференциальных) модовых параболических уравнений. Вторая методика основана на обобщении лучевой теории распространения звука, дополненной асимптотическими выражениями для расчета поля в фокальных точках во временной области. Эти методики могут быть использованы для решения различных практических задач, в которых необходимо моделирование акустических полей на обширных акваториях.

Косвенным подтверждением значимости результатов работы является многолетняя поддержка исследований автора грантами Минобрнауки РФ в рамках проектов МК-4323.2015.5 и МК-2262.2017.5 ("Гранты Президента") и РФФИ в рамках проектов 16-31-00442 мол_а, 16-05-01074 а, 18-05-00057 а, 18-35-20081 мол_а_вед (во всех перечисленных проектах автор диссертации выступал в роли руководителя). Исследования соискателя, выполнявшиеся совместно с иностранными коллегами, в разные годы получали поддержку DAAD (Германия), Campus France (Франция), Университета Хайфы (Израиль) по результатам соответствующих конкурсов.

Отметим еще, что результат работы [38] по результатам голосования Ученого совета вошел в число трех важнейших результатов ТОИ ДВО РАН за 2019 год.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для моделей волноводов мелкого моря с чашеобразным дном и с подводным каньоном установлены достаточные условия, при которых горизонтальная рефракция приводит к формированию модовой структуры звукового поля в горизонтальной плоскости и локализации акустической энергии в окрестности семейства изобат, определяющих указанные неодно-

родности батиметрии. Выполнен качественный и количественный анализ интерференционной картины, формируемой горизонтальными модами в этих случаях.

2. В адиабатическом приближении построены новые аналитические решения для класса задач расчета звуковых полей в мелком море с трехмерными неоднородностями батиметрии, описываемыми квадратичными параметрическими функциями. На примере волновода мелкого моря с подводным хребтом показано, что построенные решения позволяют выполнять качественный анализ интерференционной структуры поля точечного источника в горизонтальной плоскости.

3. Разработана и апробирована путем решения тестовых задач новая методика моделирования акустических полей в трехмерных нерегулярных волноводах мелкого моря, основанная на численном решении псевдодифференциальных модовых параболических уравнений в области с искусственными границами в адиабатическом приближении. Данная методика позволяет выполнять расчет акустических полей с существенно более высокой скоростью, чем при использовании трехмерных параболических уравнений.

4. Предложен и теоретически обоснован новый метод расчета акустических полей в волноводах мелкого моря, основанный на численном решении итеративных параболических уравнений с граничными условиями прозрачности. Доказана корректность начально-краевых задач для итеративных параболических уравнений, а также безусловная устойчивость разработанной численной схемы для их решения.

5. Предложено обобщение лучевого метода моделирования распространения импульсных сигналов точечного источника звука в волноводах мелкого моря с неоднородной батиметрией и идеальными границами, позволяю-

щее выполнять расчеты временных рядов акустического давления как в регулярных, так и в фокальных точках семейства лучей.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: международная конференция "Days on Diffraction-2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019 (г. Санкт-Петербург, ПОМИ РАН); 4$^{\text{th}}$ и 5$^{\text{th}}$ Pacific Rim Underwater Acoustics Conference (PRUAC) (г. Ханьчжоу, КНР, 2013 и г. Владивосток, 2015); Underwater Acoustics Conference and Exhibition (UACE) 2013, 2014, 2015, 2017 (Корфу, Греция, 2013; Родос, Греция, 2014; Крит, Греция, 2015; Скиатос, Греция, 2017); Europeran Conference on Underwater Acoustics (ECUA) 2012 (Эдинбург, Великобритания, 2012); XVI школа-семинар "Акустика Океана"им. академика Л.М. Бреховских (Москва, 2018 г.); 26$^{\text{th}}$ Pacific Congress on Marine Science and Technology (PACON) (г. Владивосток, 2019).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 35 печатных работах, из них 24 статьи в рецензируемых журналах [38–61] и 11 статей в сборниках трудов конференций [62–72] . Издания, в которых опубликованы все указанные выше работы, индексируются в международных базах данных Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора. Все работы соискателя, в которых опубликованы результаты настоящего диссертационного исследования выполнены и написаны в соавторстве с коллегами из ТОИ ДВО РАН, ИПМех РАН, а также зарубежных институтов и университетов. В работах [41, 45–49, 51, 60, 61] вклад автора диссертации является определяющим и составляет не менее 60% как при выполнении исследований, так и при подготовке текста.

В работах [42, 56, 57, 59], выполненных совместно с коллегами-экспериментаторами, вклад соискателя заключается в теоретическом анализе и математическом моделировании натурных экспериментов (во всех случаях соискатель участвовал в подготовке публикаций, причем в работе [59] его вклад был решающим).

Статьи [39, 40, 43] написаны в соавторстве с учителем и научным руководителем кандидатской диссертации соискателя М.Ю. Трофимовым, который ставил решенные в них задачи и получал большую часть теоретических результатов. Тем не менее, во всех случаях автор настоящей диссертации принимал активное участие в выводе формул и уравнений, доказательстве части теорем, а также проводил большую часть представленных в этих работах вычислений.

Наконец, в работах, выполненных совместно с коллегами из ИПМех РАН [52, 53], соискателю принадлежит постановка задачи и организация тестовых расчетов, а в работе [58] – еще и вывод части асимптотических формул. Соискатель также внес значительный вклад в подготовку этих статей к публикации.

В работе [38] основная идея и постановка задачи принадлежит Б.Г. Кацнельсону, а реализация ее решения в значительной степени является заслугой соискателя (в особенности это касается ВКБ-теории мод шепчущей галереи и проведения конкретных расчетов). В статье [55], наоборот, соискателю принадлежит идея и постановка задачи, а также физическая интерпретация результатов, в то время как конкретные теоретико-групповые вычисления были выполнены П.Н. Петровым. В обеих этих работах вклад двух авторов в подготовку публикации приблизительно равнозначен.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка сокращений и библиографии.

Общий объем диссертации 347 страниц, из них 319 страниц текста, включая 60 рисунков. Библиография включает 256 наименований на 28 страницах.

Благодарности. Автор диссертации выражает глубокую признательность всем своим соавторам за многолетнее плодотворное сотрудничество, в особенности своим учителям – людям, сыгравшим важную роль в формировании его научного мировоззрения. Среди них прежде всего хочется отметить М.Ю. Трофимова (ТОИ ДВО РАН), влияние которого предопределило круг научных интересов соискателя, а также замечательных ученых, под руководством которых соискатель работал или проходил стажировки в разные годы: К. Антуана (Институт Эли Картана в Лотарингии, Франция), В.М. Бабича (ПОМИ РАН), С.Ю. Доброхотова (ИПМех РАН), Б.Г. Кацнельсона (Университет Хайфы, Израиль), М. Эрхардта (Университет Вупперталя, Германия). Все эти люди были и остаются для соискателя примером для подражания не только в их увлеченности своими исследованиями, но и в их человеческих качествах.

Искреннюю благодарность автор диссертации испытывает к А.Н. Рутенко и Ю.Н. Моргунову (ТОИ ДВО РАН), которые привили ему интерес к работе с данными натурных экспериментов и помогли обрести практическое основание для его теоретических работ.

На разных этапах подготовки настоящей диссертации автора также неизменно поддерживали и направляли старшие коллеги: А.П. Киселев (ПОМИ РАН), В.И. Коренбаум, К.В. Кошель, Д.В. Макаров, А.О. Максимов, С.В. Пранц (ТОИ ДВО РАН), И.В. Прохоров (ИПМ ДВО РАН). Вероятно, без их участия и поддержки работа не была бы написана. Соискатель также выражает признательность всем коллегам (и в особенности О.Э. Гулину), давшим себе труд ознакомиться с черновыми вариантами работы или ее фрагментами и указать автору на различные их недостатки.

Разумеется, написание диссертации было бы совершенно невозможным без постоянной заботы и поддержки со стороны всех членов семьи соискателя, и в первую очередь жены и мамы.

Глава 1

Математическая постановка задач о распространении акустических волн в мелком море

Эта глава посвящена математической постановке задач распространения звука в мелком море. Мы рассматриваем в ней основные уравнения, описывающие распространение звука (волновое уравнение, уравнение Гельмгольца, систему динамических уравнений теории упругости), а также формулируем начальные и краевые условия, которые необходимы для корректной постановки начально-краевых (или краевых) задач для этих уравнений.

С одной стороны, в практических задачах акустики чаще всего приходится иметь дело с импульсными звуковыми сигналами, что подразумевает нестационарную задачу распространения, связанную с решением гиперболического волнового уравнения (см., например, [42, 59]). С другой стороны, численное решение нестационарного волнового уравнения в обширных трехмерных областях, моделирующих реальные акватории, практически невозможно ввиду жестких ограничений, накладываемых на пространственные сетки необходимостью разрешать волны малых длин[1], а на шаг по времени – условием Куранта-Фридрихса-Леви. Единственным возможным подходом к решению начально-краевых задач для волнового уравнения в случаях, представляющих интерес для практики, является использование различных асимптотик. Наиболее совершенный аппарат для построения такого рода решений дает лучевая теория распространения звука и метод канонического оператора Маслова (который дает возможность рассчитывать временные ряды для приемников, расположенных

[1] 10-15 точек на длину волны, для области с горизонтальными размерами 10 км на 10 км и глубинах до 100 м даже для относительно небольшойы частоты 100 Гц необходима пространственная сетка из 10^{10} узлов.

в фокальных точках семейства лучей).

Такой метод решения задач подводной акустики развивается в наших работах [52, 53, 58] (см. главу 2). В статьях [52] и [53] асимптотики решения волнового уравнения в случае глубокого океана построены в терминах канонического оператора Маслова для регулярной и фокальной точек соответственно. В работе [58] показано, что этот же метод может быть успешно использован и в случае мелкого моря с трехмерными неоднородностями дна. Основным ограничением в этом случае является то, что дно приходится считать полностью отражающим (т.е. ставить на нем условие Неймана или Дирихле). Хотя в некоторых задачах этого достаточно (например, для частот в несколько сотен Герц), этот подход никак не может считаться универсальным в акустике мелкого моря, где правильный учет взаимодействия звука с дном играет важнейшую роль, и для корректного учета соответствующих физических эффектов дно следует считать проницаемым.

Важным аспектом взаимодействия акустических волн с проницаемым дном является затухание звука. Здесь следует заметить, что с помощью "обычного" волнового уравнения адекватно моделировать частотную зависимость затухания звука в морских осадках принципиально нельзя. Детально этот вопрос разработан в нашей статье [41], где выведено так называемое вязкоупругое волновое уравнение, которое позволяет учесть произвольную частотную зависимость затухания звука при расчетах во временной области (см. раздел 1.2.1). Хотя вязкоупругое волновое уравнение дает принципиальное решение вопроса об адекватном учете затухания, оно является еще более сложным для численного решения, чем обычное волновое уравнение.

Отметим еще, что даже если решение волнового уравнения удается получить (а это связано с огромным количеством технических сложностей, описанных выше) сравнение его с экспериментом практически всегда будет делом безнадежным. Это решение весьма чувствительно к малым неоднородностям среды, полная информация о которых в реальных задачах подводной акустики практически всегда отсутствует. По этой причине на практике можно ожидать в лучшем случае “качественного” сходства полученного решения и, например, временных рядов импульсных сигналов, наблюдаемых в натурном эксперименте (попытки такого сравнения сделаны, например, в [42]). Особенно это касается акустических трасс протяженностью десятки и, тем более, сотни километров.

Ввиду указанных выше принципиальных сложностей, связанных с решением волнового уравнения, практически все существующие в акустике океана в настоящее время математические модели непосредственно ориентированы на решение стационарных задач, т.е. краевых задач, связанных с уравнением Гельмгольца. Очевидно однако, что необходимость разрешать относительно короткие волны сохраняется и в этом случае, что по-прежнему налагает очень серьезные ограничения на размеры сеток. Кроме того, краевые задачи для уравнения Гельмгольца плохо подходят для решения с помощью маршевых численных схем. По этим причинам уравнение Гельмгольца в акустике океана практически никогда не решают напрямую за исключением, разве что, весьма рафинированных тестовых задач, далеких от тех, что возникают в приложениях (вместо этого употребляют подходы, описанные в последующих главах, например, основанные на квазиразделении переменных и методе параболического уравнения, т.е. дальнейших упрощениях уравнения Гельмгольца). После решения стационарной задачи решение исходной задачи для волнового уравнения может быть получено с помощью Фурье-синтеза [73]. Обычно этой необходимости, однако, не возникает вовсе, поскольку непосредственное сравнение временных рядов почти никогда не имеет смысла, и соотносить с экспериментом нужно лишь различные интегральные характеристики временных рядов в точках приема, например, общее время распространения некоторой модальной компоненты сигнала [59] или общую энергию сигнала в некоторой спектральной полосе.

Тем не менее, для тестирования адекватности математических моделей, в которых уравнение Гельмгольца подвергается дальнейшим упрощениям, необходим некоторый набор его решений, содержащих в себе проявления характерных для задач подводной акустики физических эффектов. Наиболее важной задачей, для которой решение уравнения Гельмгольца может быть получено аналитически (с точностью до суммирования некоторого ряда и вычисления несобственного интеграла), является задача о распространении звука в клиновидном волноводе с проницаемым дном. Она может быть решена с помощью обобщения метода изображения, предложенного Дином и Бакингемом [15]. В нашей работе [54] исправлены некоторые ошибки в формулах из [15] и, кроме того, показано, как обобщить это решение на случай упругого дна[2] (т.е. дна, в котором есть волны сдвига). При этом, как показано в нашей работе [54], качественная картина звукового поля в жидком клине, лежащем на упругом полупространстве, существенным образом зависит от соотношения скорости звука в жидкости со скоростями продольных и поперечных упругих волн в дне (см. раздел 1.4).

1.1. Понятие “геоакустический волновод” и связанные с ним системы координат

Математическое моделирование распространения импульсных акустических сигналов в мелком море в настоящее время является неотъемлемой частью решения таких важных практических задач как, например, сейсморазведка, мониторинг антропогенных шумов на различных акваториях [41], разработка систем акустической навигации, дальнометрии и подводной связи [56, 59]. Известно, что на малых глубинах водный слой не формирует волновода для низкочастотных (до 100 Гц) акустических волн [73]. Такие волны распространяются не только в воде, но и в приповерхностных слоях океанского дна, вместе образующих *геоакустический волновод*. По этой причине математические модели распространения звука в мелком море должны корректно учитывать

[2] Здесь и далее мы используем термин упругое дно в противовес понятию жидкое дно, которое относится к случаю, когда сдвиговой упругостью можно пренебречь.

различные эффекты, связанные с распространением акустических волн в дне. Существенное влияние на акустическое поле на низких частотах при этом оказывают сдвиговая упругость пород, слагающих дно, а также затухание звука в этих породах, величина которого значительно больше, чем в морской воде. В настоящее время в практических задачах прямое численное решение динамических уравнений теории упругости, как правило, не представляется возможным (главным образом из-за того, что более короткие сдвиговые волны накладывают существенно более жесткие ограничения на шаги расчетных сеток). По этой причине основным инструментом для моделирования распространения звука во временной области по-прежнему остается акустическое волновое уравнение, не учитывающее напрямую сдвиговые волны в дне.

В рамках данной работы мы будем чаще всего использовать трехмерную декартову систему координат x, y, z, в которой ось z всегда будет направлена вниз, а координата z будет означать глубину точки, отсчитываемую от уровня моря, т.е. от поверхности $z = 0$. В акустике океана особую роль играет понятие акустической трассы, т.е. горизонтальной линии, соединяющей источник и приемник звука (вообще говоря, правильнее говорить о геодезической линии на поверхности Земли, хотя различие становится существенным лишь на трассах длиной в сотни километров). Трасса определяет некоторое предпочтительное направление распространения звука, и почти всегда это направление будет совпадать с направление оси x, в то время как ось y будет направлена “поперек” трассы, представляющей интерес. Обычно удобно считать, что источник звука расположен в точке $x = 0, y = 0$. В некоторых случаях в горизонтальной плоскости будет также использоваться полярная система координат r, θ (общая система координат r, θ, z при этом, разумеется, будет цилиндрической).

Здесь и далее под геоакустическим волноводом (ГАВ) мелкого моря Ω будет подразумеваться мысленно выделяемый двумерный или трехмерный объем (обычно его имеет смысл представлять себе прямоугольным параллелепипедом или цилиндром), содержащий водный слой, а также слои дна до некоторой глубины $z = H$, достаточно большой, чтобы звук, отраженный более глубокими слоями на глубинах $z > H$, не оказывал влияния на звуковое поле в воде (которое нас и будет интересовать главным образом). Таким образом, обычно

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \le x \le x_{\max}, y_{\min} \le y \le y_{\max}, 0 \le z \le H\},$$

либо

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \le r \le r_{\max}, -\pi < \theta \le \pi, 0 \le z \le H\}.$$

Отметим, что понятие геоакустический волновод относится, главным образом, именно к акустике мелкого моря, т.к. в задачах акустики глубокого океана подводный звуковой канал (ПЗК) позволяет пренебречь взаимодействием звука с дном (т.к. звук, в основном, распространяется внутри водной толщи).

1.2. Волновое уравнение и начально-краевые задачи

Основным уравнением, описывающим распространение звука в жидкой среде, является (нестационарное) волновое уравнение [73–75]

$$P_{tt} - c^2 \rho \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) = 0, \tag{1.1}$$

где неизвестная функция $P = P(x, y, z)$ есть акустическое давление, а параметры среды представлены скалярными полями скорости звука $c(x, y, z)$ и плотности $\rho(x, y, z)$. В зависимости от задачи оператор ∇ может быть как двумерным $\nabla = (\partial_x, \partial_y) = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, так и трехмерным

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z).$$

В дальнейшем мы будем часто (но не всегда) обозначать частные производные по соответствующим переменным нижними индексами, например $\Delta P = P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}$ (в частности, в двух ближайших подразделах это использование может привести к путанице, так что мы воздержимся от его употребления).

Для оператора Лапласа только по горизонтальным переменным мы будем использовать обозначение $\Delta_2 = \Delta_\perp$.

Уравнение (1.1) описывает акустические волны как в морской воде, так и в слое жидких осадков. Такая модель обычно называется приближением жидкого дна. В случае, когда сдвиговые скорости в приповерхностных слоях дна малы, такое приближение вполне удовлетворительно само по себе [73, 75]. Если учет сдвиговых волн все же необходим, то во многих случаях его разумнее выполнить с помощью техники, предложенной в [76]. Эта техника состоит в том, что сначала поля напряжений и скоростей вычисляются на основе модели жидкого дна, затем полученные поля подставляются в полные уравнения теории упругости, где появляется невязка, которую затем можно использовать как дополнительную функцию источника в акустическом волновом уравнении. Повторное решение акустического волнового уравнения с этой функцией источника позволяет получить поправку к исходному решению, учитывающую эффекты сдвиговой упругости. Таким образом, несмотря на наличие в дне сдвиговых волн, задачи акустики мелкого моря вполне можно решать во временной области с помощью обычного волнового уравнения.

Несколько сложнее обстоит дело с учетом затухания звука в дне. Стандартный прием [77], основанный на введении в волновое уравнение производной первого порядка по времени, позволяет решить задачу лишь для случая простейшей зависимости величины затухания от частоты (а именно, для случая постоянного затухания для волн разной частоты на единице длины). Известно, что во многих случаях такая модель неприемлема, так как часто разумно предположить, что затухание звука постоянно на длине волны для всех частот [73, 78] (случай постоянного значения добротности Q). Ниже описано непосредственное обобщение нестационарного волнового уравнения, которое позволяет учитывать произвольную зависимость величины затухания в среде от частоты звука, предложенное в нашей работе [41]. В следующем параграфе мы получим это обобщение, исходя из динамических уравнений вязкоупругой жидкости [78] (конечно же, это не означает, что затухание обязано иметь именно вязкую природу). Далее мы рассмотрим процедуру численного решения этого уравнения в приложении к задачам акустики мелкого моря. Полученное уравнение может быть применено в тех случаях, когда решение динамических уравнений теории упругости невозможно ввиду ограниченности ресурсов, и задачу приходится решать в рамках модели жидкого дна, однако частотная зависимость затухания звука в нем играет важную роль (пример такой задачи представлен в заключительной части нашей работы). Отметим также, что даже в классических монографиях [75, 78] затухание звука в дне рассматривается лишь при решении задач акустики мелкого моря в частотной области. Полученное нами уравнение позволяет включить произвольные зависимости затухания от частоты в модели распространения звука во временной области.

1.2.1. Волновое уравнение для вязкоупругой жидкости

В этом разделе мы рассмотрим вывод волнового уравнения с вязкоупругим затуханием из динанамических уравнений вязкоупругой среды. Мы будем следовать работе [41], где это уравнение было впервые предложено. Напомним, что основной причиной замены стандартного волнового уравнения (1.1) вязкоупругим является необходимость моделирования различных зависимостей коэффициента затухания звука в донных осадках от частоты.

Динамические уравнения вязкоупругой среды могут быть записаны в терминах тензорного поля напряжений и деформаций, а также векторного поля смещений во всех точках волновода (x, y, z). В отсутствие сдвиговых напряжений ("вязкоупругая жидкость") тензорные поля определяются своими диагональными компонентами $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz})$ и $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$. Обозначив компоненты поля смещений через (u_x, u_y, u_z), мы можем записать уравнения динамики в следующем виде [79]

$$
\begin{cases}
\sigma_{xx} = \int_{-\infty}^{t} M(t-\tau) d(\varepsilon_{xx}(\tau) + \varepsilon_{yy}(\tau) + \varepsilon_{zz}(\tau)); \ \cdots; \ \cdots \\
\varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_x; \ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} u_y; \ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} u_z \\
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_x = \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx}; \ \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_y = \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy}; \ \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_z = \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

Первое из уравнений (1.2) представляет собой обобщенный закон Гука, устанавливающий связь между напряжением и деформацией в текущий и предыдущие моменты времени ($M(t)$ – релаксационный модуль, описывающий напряжение, возникающее в среде под воздействием деформации $\varepsilon(t) = H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда). Рассмотрим производную по времени от выражения вида $\int_{-\infty}^{t} M(t-\tau) d\varepsilon(\tau)$, считая, что $\varepsilon(t)$ – непрерывная функция, равная нулю при $t < 0$:

$$
\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau) d\varepsilon(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t} M(t-\tau) d\varepsilon(\tau) + M(0) \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(t) =
$$

$$
= -\left(M(t-\tau) \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\tau) \right) \Bigg|_{\tau=-\infty}^{\tau=t} + \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau) d\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \varepsilon(\tau) \right) + M(0) \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(t) =
$$

$$
\int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau) d\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \varepsilon(\tau) \right)
$$

(второе равенство мы получили с помощью интегрирования по частям). Используя это соотношение, мы можем дважды продифференцировать первое уравнение системы (1.2) по времени, предварительно подставив в него значение (ε_{xx},ε_{yy},ε_{zz}) из второй строки системы (1.2):

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial t^2} = \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_x + \frac{\partial}{\partial y}u_y + \frac{\partial}{\partial z}u_z\right)\right) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz}\right)\right).$$

В жидкой среде $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = P$, поэтому последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d\left(\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right)\right). \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) описывает распространение акустических волн в вязкоупругой жидкости и является непосредственным обобщением обычного волнового уравнения (1.1). Свертка в правой части (1.3) не позволяет использовать его непосредственно, так как ее вычисление требует хранения информации о значениях давления во все моменты времени с начала расчета, и для этого недостаточно объема памяти современных компьютеров. По этой причине при решении нестационарных задач моделирование зависимости затухания от частоты общего вида долгое время было практически невозможным. Прорыв в этом направлении совершили авторы работы [80], где был предложен общий подход к аппроксимации сверток, подобных интегралу в (1.3). Существенное развитие этот подход получил в [81, 82]. Ниже мы применим его при построении численной схемы для (1.3), однако перед этим исследуем, как именно уравнение (1.3) позволяет учитывать затухание в среде. Это легко увидеть, если рассмотреть одномерный аналог уравнения (1.3) в частотной области (для простоты считаем среду однородной)

$$-\omega^2 P = M^* \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

где комплексный модуль $M^*(\omega)$ может быть выражен через $M(t)$ с помощью соотношения $M^*(\omega) = i\omega\int_0^\infty M(t)e^{-i\omega t}dt$ (по определению можно положить, что

$M^*(\omega)$ представляет собой коэффициент пропорциональности в обобщенном законе Гука в частотной области $\sigma(\omega) = M^*(\omega)\varepsilon(\omega)$, где $\varepsilon \equiv \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$). В случае, если вязкость мала (т.е. $M(t)$ мало отличается от функции Хевисайда), это уравнение допускает асимптотическое решение в виде затухающей плоской волны:

$$P \approx P_0 e^{\alpha(\omega)x} e^{i\omega t - \frac{ix\omega}{c(\omega)}}. \tag{1.4}$$

$\alpha(\omega)$ – затухание на единицу длины, которое может быть найдено из соотношения

$$\frac{2c(\omega)\alpha(\omega)}{\omega} = \arg(M^*(\omega)) \equiv \frac{1}{Q(\omega)},$$

где добротность $Q(\omega)$ – параметр, который характеризует соотношение между запасаемой и рассеиваемой энергией за один цикл. Для задач акустики мелкого моря, как правило, бывает достаточно ограничиться случаем постоянного $Q(\omega)$. В этом случае получаем

$$\frac{\pi}{Q} = \lambda\alpha(\omega).$$

Таким образом, затухание на единицу длины для волн в среде с постоянным Q прямо пропорционально волновому числу, а затухание на длине волны одинаково для всех частот.

В акустических задачах поглощение звука в среде часто описывают величиной β в Дб на 1 длину волны. Эта величина связана с Q соотношением

$$\beta = 20\log_{10}(e)/Q. \tag{1.5}$$

1.2.2. Аппроксимации свертки в волновом уравнении с вязкоупругим затуханием и его численное решение

На первый взгляд может показаться, что интегро-дифференциальное уравнение (1.3), которое выглядит существенно сложнее стандартного волнового уравнения (1.1), совершенно бесперспективно с точки зрения численного моделирования. Действительно, вычисление интеграла релаксационной памяти в

(1.3), требует хранения значений звукового поля во всех точках во все моменты времени. В работе [41] нами была предложена эффективная методика аппроксимации интеграла памяти, основанная на приближении релаксационного спектра суммой дельта-функций (метод Дэя-Минстера [80]). Использование этой методики позволило нам разработать явную разностную численную схему второго порядка, в которой объем памяти, необходимой для решения (1.3) всего лишь в 2-3 раза превышает этот показатель для аналогичной схемы для стандартного волнового уравнения. Эта же аппроксимация релаксационного спектра, разумеется, может быть использована и в разностных схемах высших порядков (мы не ставили себе задачи разработать их).

Следуя [41], мы начнем с рассмотрения указанного способа аппроксимации свертки в уравнении (1.3), необходимой при его численном решении. Следуя [80, 81], представим релаксационный модуль $M(t)$ в виде спектрального разложения:

$$M(t) = \left[M_u - \delta M \int\limits_0^\infty r(\omega')e^{-\omega' t} d\omega' \right] H(t),$$

где $r(\omega)$ – нормализованный релаксационный спектр. Будем приближать этот спектр суммами вида

$$r(\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta(\omega - \omega_j),$$

где $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$ (то есть будем считать, что нормализованный релаксационный спектр содержит лишь конечный набор частот). Отметим, что модель вязкоупругой среды со спектром такого вида называется обобщенным телом Максвелла [81]. В этом случае получаем, что

$$M_n^*(\omega) = M_u - \delta M \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j \omega_j}{\omega_j + i\omega}.$$

Далее, мы приближаем обобщенный закон Гука в частотной области соотношением

$$\sigma_{xx}(\omega) \approx M_n^*(\omega)\varepsilon(\omega).$$

Это изменение дает удобную для численного решения аппроксимацию (1.3). Чтобы ее получить, введем дополнительные переменные

$$\hat{\zeta}_j(\omega) \equiv \frac{\delta M}{M_u}\frac{a_j\omega_j}{\omega_j + i\omega}\varepsilon(\omega)$$

и перепишем закон Гука в виде

$$\sigma_{xx}(\omega) = M_u\left(\varepsilon(\omega) - \sum_{j=1}^{n}\hat{\zeta}_j(\omega)\right).$$

Применяя к двум последним соотношениям обратное преобразование Фурье, получим

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(t) = M_u\left(\varepsilon(t) - \sum_{j=1}^{n}\zeta_j(t)\right) \\ \frac{d\zeta_j}{dt} + \omega_j\zeta_j = a_j\omega_j\frac{\delta M}{M_u}\varepsilon(t). \end{cases} \tag{1.6}$$

Теперь мы запишем аналог уравнения (1.3), который получается заменой из системы (1.2), в которой первое уравнение заменено системой уравнений (1.6) (в данном случае промежуточные выкладки тривиальны):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \rho c^2\left(\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right) - \sum_{l=1}^{n}\zeta_l\right) \\ \frac{d\zeta_l}{dt} + \omega_l\zeta_l = \omega_l a_l\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right), \end{cases} \tag{1.7}$$

Заметим, что для систем уравнений (1.6) и (1.7) переменные ζ_j вводятся отдельно для каждой точки расчетной области, т.е. $\zeta_j = \zeta_j(t, x)$, однако их эволюция во времени определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые связаны друг с другом только через вынуждающий член.

Значения ω_l в аппроксимации релаксационного спектра $r(\omega)$ могут быть выбраны, например, равномерно распределенными на интервале частот (в логарифмической шкале), представляющем интерес в рассматриваемой задаче. Для выбора a_l мы потребуем, чтобы на серединах $\tilde{\omega}_k = \omega_k\sqrt{\omega_2/\omega_1}$ интервалов $[\omega_k, \omega_{k+1}]$ выполнялось соотношение $Q(\omega) = Q_n(\omega)$. При этом $Q_n(\omega)$ может быть вычислено из соотношения

$$Q_n^{-1}(\omega) = \arg(M_n^*(\omega)) \approx \frac{\delta M}{M_r}\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\frac{\omega}{\omega_j}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega}\right)^2}.$$

В результате мы получаем переопределенную систему линейных уравнений на коэффициенты a_j, которую легко решить методом наименьших квадратов.

Рассмотрим теперь предложенную в [41] конечно-разностную дискретизацию системы (1.7). Нашей целью при этом является получение простой разностной схемы для (1.7), непосредственно обобщающей стандартную схему типа “крест” для уравнения (1.1). Для простоты мы будем рассматривать (1.7) в двумерном случае, т.е. в пространственной области с координатами (x, z) (из дальнейших формул будет видно, что они тривиальным образом переносятся и на трехмерные задачи). Введем в волноводе равномерную сетку (t^i, x_j, z_k) с шагами Δt, Δx и Δz соответственно. Рассмотрим теперь сеточные функции $P^i_{j,k} = P(t^i, x_j, z_k)$ и $\zeta^i_{l,j,k} = \zeta_l(t^i, x_j, z_k)$ и запишем разностную аппроксимацию второго порядка для первого уравнения системы (1.7) в точке (t^i, x_j, z_k), а для второго уравнения (1.7) – в точке $(t^i + t^{i+1}, x_j, z_k)$. Мы получим следующую “двухэтапную” численную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^i_{j,k}} \frac{P^{i+1}_{j,k} - 2P^i_{j,k} + P^{i-1}_{j,k}}{\Delta t^2} - \left[\rho \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) \right]^i_{j,k} + \sum_{l=1}^{n} \zeta^i_{l,j,k} \\ \frac{\zeta^{i+1}_{l,j,k} - \zeta^i_{l,j,k}}{\Delta t} + \omega_l \frac{\zeta^{i+1}_{l,j,k} + \zeta^i_{l,j,k}}{2} = \omega_l a_l \frac{1}{2} \left(\left[\rho \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) \right]^{i+1}_{j,k} + \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) \right]^i_{j,k} \right). \end{array} \right. \tag{1.8}$$

Здесь выражение $\left[\rho \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) \right]^i_{j,k}$ означает разностную аппроксимацию второго порядка для акустического оператора Лапласа, взятую в точке (t^i, x_j, z_k). Такая аппроксимация может быть выполнена стандартным образом. Запись (1.8) удобна своей инвариантностью относительно различных систем координат в пространстве и одинакова для всех размерностей. При реализации численной схемы (1.8) на каждом шаге по времени последовательно выполняются два действия

1. по данным $P^i_{j,k}$ и $\zeta^i_{l,j,k}$ с помощью первого уравнения (1.8) вычисляются значения $P^{i+1}_{j,k}$;

2. по найденным $P^{i+1}_{j,k}$ вычисляется оператор Лапласа, а затем с помощью

второй строки системы (1.8) находятся значения $\zeta_{l,j,k}^{i+1}$.

Отметим еще раз, что численная схема (1.8) представляет собой непосредственное обобщение схемы “крест” на случай вязкоупругой жидкости и имеет второй порядок точности. Она отличается простотой и вычислительной эффективностью. Несложно построить и обобщения (1.8), аппроксимирующие (1.7) с более высоким порядком точности. Заметим также, что объем оперативной памяти, требуемый при расчетах с использованием (1.7) на компьютере, превышает объем памяти, необходимый для решения (1.1) в $n(n+3)/3$ раз. Тестовые расчеты показывают, что при моделировании распространения импульсных сигналов в задачах акустики мелкого моря для удовлетворительной аппроксимации одинакового затухания звука на длине волны для всех частот в полосе от 20 до 200 Гц ($Q(\omega) = const$) достаточно ограничиться значением $n = 3$. Более широкие полосы частот и более сложные зависимости затухания от частоты требуют больших значений n. Точность аппроксимации можно оценить, сравнивая $Q_n(\omega)$ и $Q(\omega)$, как описано в [81]. Уменьшить требуемое для приемлемой аппроксимации значение n можно, используя подход, предложенный работе [82], где предложена крупнозернистая модель вязкоупругой среды, в которой параметры a_j и ω_j в различных узлах сетки периодически меняются. Период изменения при этом соответствует длине самых коротких звуковых волн, распространение которых представляет интерес в конкретной задаче. Обычно при этом достаточно всего одной дополнительной переменной $\zeta = \zeta(t, x, y, z)$.

В работе [41] приведены примеры расчетов с описанной здесь численной схемой, которые показывают, что она действительно обеспечивает правильное моделирование зависимости затухания от частоты. Мы, однако, не приводим их здесь.

1.2.3. Граничные условия для волнового уравнения и условия на границах раздела в задачах акустики мелкого моря

В задачах акустики мелкого моря уравнения (1.1) или (1.7) приходится решать в областях, которые не имеют физических границ. Действительно, геоакустический волновод, как правило, ничем не ограничен в горизонтальных направлениях (x, y), а в направлении z (обозначающем глубину ниже уровня моря) он ограничен лишь сверху – поверхностью океана $z = 0$, на которой акустическое давление обращается в ноль (граничное условие типа Дирихле: $P(t, z, y, 0) = 0$).

Решение задачи методом конечных разностей в бесконечных или даже полубесконечных областях невозможно, поэтому для численного интегрирования уравнений акустики необходимо предварительно ограничить область. При этом, так как границы будут искусственными, необходимо, чтобы они вели себя таким образом, как будто за ними волновод продолжается. Это означает, что акустические волны должны свободно проходить через такую границу из расчетной области во внешнюю среду. Для обеспечения свободного прохождения волн через границы, на них должны быть заданы граничные условия особого вида – т.н. условия искусственной границы. Эти условия, вообще говоря, весьма нетривиальны, их теория для волнового уравнения была развита в достаточной для практического использования степени лишь в последние 10 лет (см. работы [39, 83, 84]). Поскольку затухание, обеспечиваемое (1.7), является лишь малой добавкой к исходному уравнению (1.1), дающей значительный вклад в уровни акустического давления лишь на протяженных трассах, для системы (1.7) представляется возможным использование тех же условий искусственной границы, что и для обычного волнового уравнения (1.1). Наш опыт моделирования распространения импульсных акустических сигналов в мелком море позволяет предложить использование следующих условий искусственной границы для (1.7). На вертикальных границах расчетной области (например, на границе $x = x_{max}$, где x_{max} есть протяженность трассы, на которой требуется вычислить акустическое поле) удобно использовать условия искусственной границы типа Tапперта, полученные в [39, 40], и имеющие вид

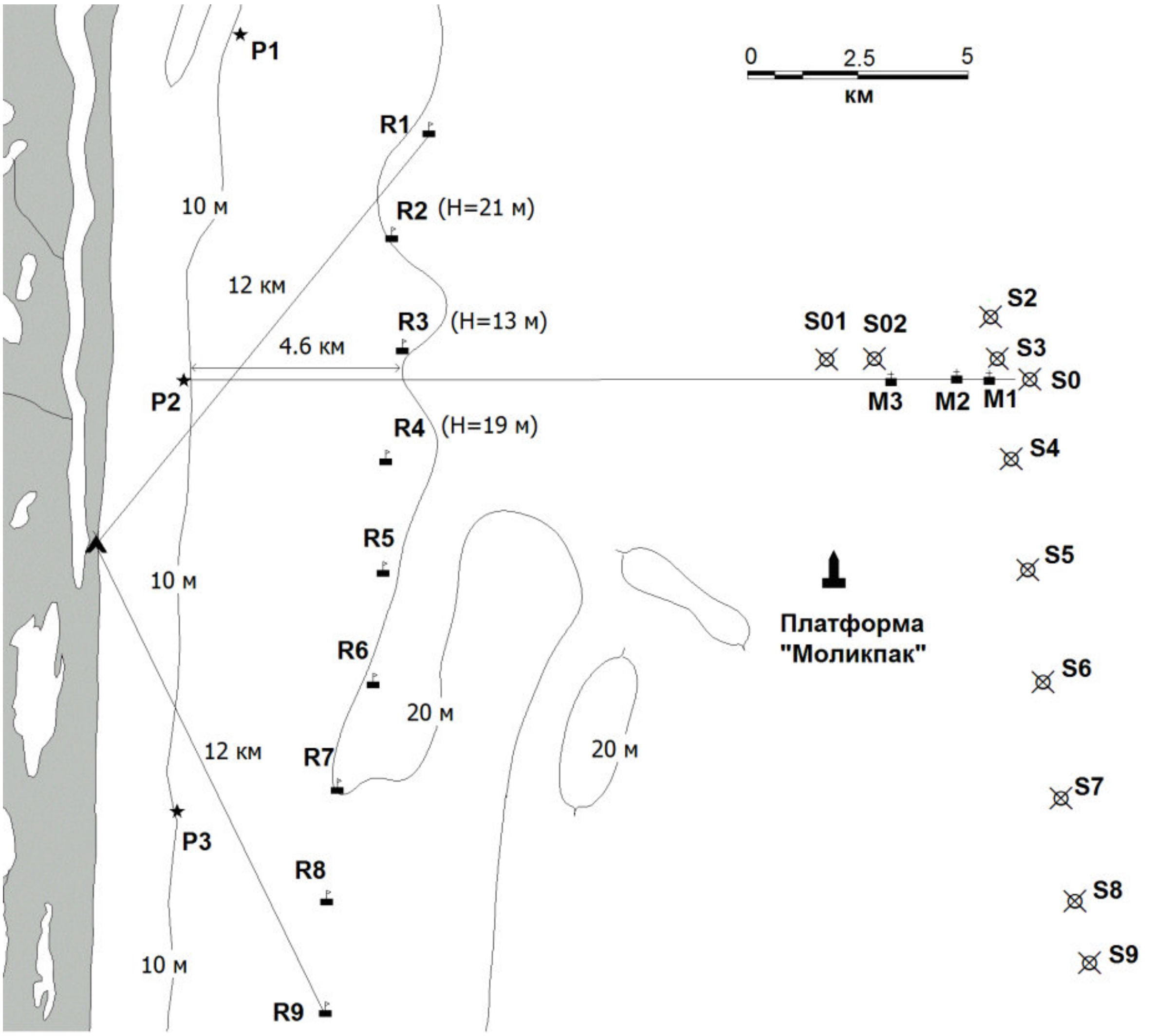
$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - \\ - \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\frac{c}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{2}c_z - \frac{c}{2\rho}\rho_z\right)\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{1}{4}c_{zz} - \frac{1}{4c}\left(c_z\right)^2 - \frac{1}{4\rho}c_z\rho_z\right)p\right) dt = 0\,. \tag{1.9}$$

Дискретизация (1.9) методом конечных разностей подробно описана в работах [39, 40]. На нижней горизонтальной границе волновода $z = H$ можно использовать условие искусственной границы типа Хигдона [85, 86], в форме, полученной в работах Хагстрёма и его соавторов [83, 84, 87, 88]. Такое условие идеально подходит для моделирования однородного полупространства, лежащего ниже расчетной области. Это условие записывается в терминах вспомогательных переменных ϕ_1, ϕ_2,...,ϕ_{k+1}, определенных на этой границе и зависящих только от переменной x (указывающей направление вдоль искусственной границы). Оно имеет следующий вид

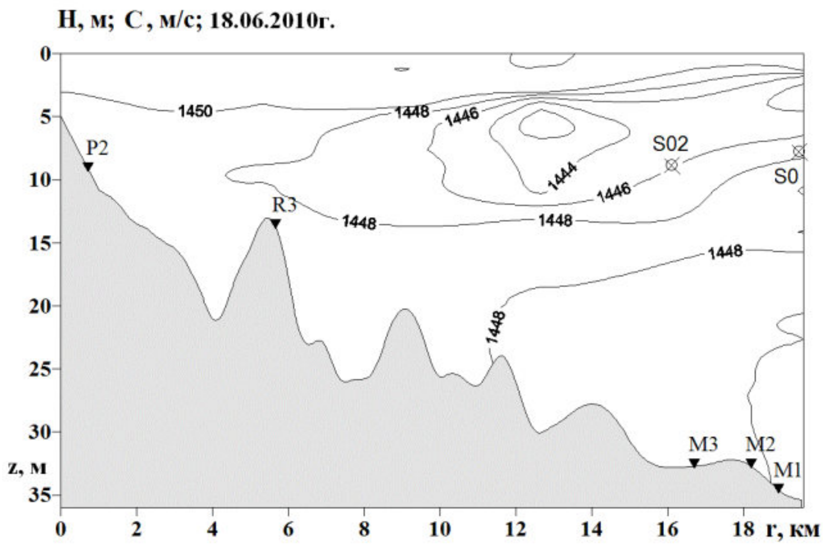
$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t}\,, \\ 4\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\,, \\ 4\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi_{j-1}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{j+1}}{\partial x^2}, \quad j = 1, 2, \dots, k \\ \phi_{k+1} = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Численная реализация (1.10) весьма нетривиальна (см. работы [83, 84]), так для устойчивости численной схемы (1.8) с условием (1.10) требуется, чтобы в окрестности границы шаг сетки по глубине z был вдвое меньше, чем в остальной части расчетной области.

Отметим также, что начально-краевая задача для волнового уравнения с граничными условиями (1.10) и (1.9) является корректной. Этот факт легко проверить, если воспользоваться равномерным условием Лопатинского [89–91], как показано в [39].



(*а*) Карта района экспериментальных исследований.



(*б*) Поле скорости звука и батиметрия на трассе.

Рис. 1.1. Экспериментальная трасса, рельеф дна и гидрологические условия.

Важнейшим атрибутом задач распространения звуковых волн в мелком море являются условия непрерывности акустического давления P и нормальной компоненты колебательной скорости $\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}$ на границе раздела двух жидких сред (вектор $\mathbf{n}$ есть нормаль к этой границе), например, водного слоя и слоя жидких осадков. Такие границы мы будем задавать поверхностями вида $z = h(x, y)$[3], где функция горизонтальных координат $h(x, y)$ описывает рельеф дна. Условия на границе раздела можно, таким образом, записать в виде

$$\begin{aligned} P|_{z=h^-} &= P|_{z=h^+}, \\ \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\right)\bigg|_{z=h^-} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\right)\bigg|_{z=h^+}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где по определению $F|_{z=h^+}$ (или $F|_{z=h^-}$) означает верхний (или нижний) предел функции F при $z \to h$ (этими обозначениями мы будем пользоваться и в дальнейшем). Заметим, что второе условие (1.11) можно также переписать в виде

$$\left(\frac{1}{\rho}(P_z - h_x P_x - h_y P_y)\right)\bigg|_{z=h^-} = \left(\frac{1}{\rho}(P_z - h_x P_x - h_y P_y)\right)\bigg|_{z=h^+}. \tag{1.12}$$

Именно неоднородности рельефа дна оказываются основным фактором, оказывающим влияние на формирование акустического поля в мелком море и на его трехмерную структуру. Исследование этой структуры для различных типов рельефа дна (т.е. для различных функций $h(x, y)$) является одной из главных целей данной диссертации. Условия (1.11) являются главной особенностью задач подводной акустики, отличающей их, например, от задач оптики.

1.2.4. Моделирование источника звука в волновом уравнении

Обычно источник звука вводится в волновое уравнение в виде вынуждающего члена (правой части). В этом случае волновое уравнение становится

[3] В случае, если таких границ раздела несколько, мы будем обозначать их $z = h^1(x, y)$,$z = h^2(x, y)$ и т.д., причем функция $h(x, y)$ (без верхнего индекса) всегда будет обозначать границу раздела водного слоя и дна.

неоднородным и принимает вид

$$\frac{1}{c^2}P_{tt} - \rho\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right) = \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_s)f(t)\,, \qquad (1.13)$$

где $f(t)$ – функция источника, т.е. форма излучаемого им сигнала во временной области. Заметим, что практически всегда имеет смысл считать источник точечным. Это довольно разумно, даже если он таковым не является физически. Размеры излучателей, использующихся в реальных экспериментах, могут быть достаточно большими, кроме того, в разных задачах источниками звука могут считаться протяженные объекты, например, суда. Тем не менее, в масштабах акустических трасс (десятки и сотни километров) в дальнем поле даже такие источники могут считаться точечными. Если функция $f(t)$ гладкая и имеет компактный носитель, не содержащий момент $t = 0$, то значения функции можно задавать всего в одном узле расчетной сетки $x = 0, y = 0, z = z_s$.

Если источник звука задан правой частью волнового уравнения, то при его решении можно использовать нулевые данные Коши

$$P(t, x, y, z)|_{t=0} = 0\,, \quad P_t(t, x, y, z)|_{t=0} = 0\,. \qquad (1.14)$$

1.2.5. Пример использования вязкоупругого волнового уравнения в практических расчетах

Разностная схема на основе уравнения (1.7) в искусственно ограниченной области $0 \le x \le x_{max}$, $0 \le z \le H$, с условиями (1.9) и (1.10) на границах $x = x_{max}$, $z = H$ представляет собой адекватную математическую модель для численного решения задач акустики мелкого моря, которая была использована нами, например, в работе [42] (в двумерном случае). В расчетах в [42] нам удалось успешно воспроизвести качественные и количественные характеристики сейсморазведочных импульсов, наблюдавшихся в ходе акустического мониторинга, проводившегося в 2012 году в Охотском море на шельфе о. Сахалин сотрудниками ТОИ ДВО РАН.

Мы моделировали распространение сейсморазведочных импульсов вдоль трассы S0-P2 (см. Рис. 1.1(а)) протяженностью около 19 км ($x_{\max} = 19$ км), ориентированной приблизительно вдоль наклона дна (т.е. перепендикулярно береговой линии). Сейсморазведочные импульсы излучались в точке, где глубина моря составляла около $h(x = 0) = 35$ м, и принимались донными станциями на расстояниях около 14,5 (точка R3) и 19 км (точка P2) от источника звука. Схема акустической трассы, а также контурный график поля скорости звука и батиметрический профиль показана на Рис. 1.1.

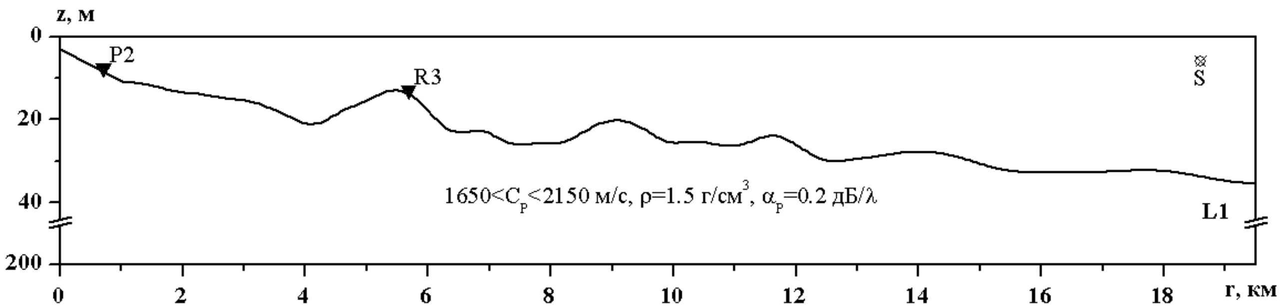
При моделировании мы считали, что скорость звука в дне задается линейной функцией

$$c(z) = c_0 + \frac{(c_1 - c_0)z}{H},$$

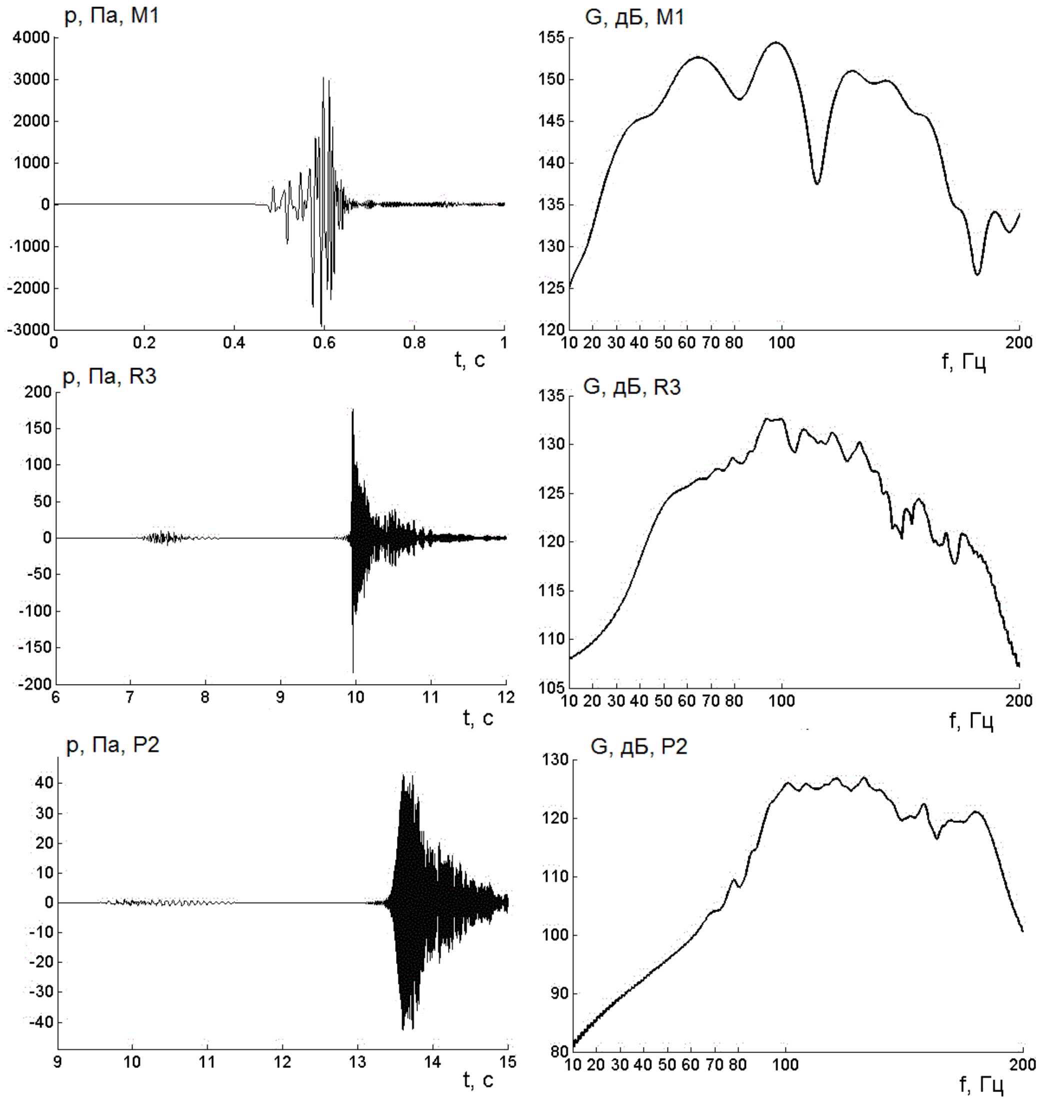
где $c_0 = 1650$ м/с, $c_1 = 2150$ м/с, а общая глубина до которой выполнялся расчет составляла $H = 200$ м (на этом горизонте ставилось условие поглощающей границы Хигдона (1.10)). Плотность дна мы считали постоянной величиной $\rho = 1,5$ г/см^3, а затухание принимали равным $0,2$ дБ/λ (эти значения были выбраны на основе имеющихся данных о строении дна в этом районе). Поле скорости звука в воде, т.е. выше границы раздела $z = h(x)$ (профиль взят из данных измерений, выполненных судовым эхолотом), было построено путем интерполяции данных гидрологических зондирований, выполненных в четырех эквидистантных точках на данной трассе в ходе акустического мониторинга. Общая схема модельного ГАВ показана на Рис. 1.2(а).

Результаты расчета временных рядов импульсных сигналов в точках приема R3 и P2 представлены на Рис. 1.2(б). Отметим, что времена прихода импульсных сигналов, их задержки относительно головной волны, а также дисперсионные и энергетические характеристики хорошо согласуются с данными натурных измерений.

Несмотря на в целом положительный опыт моделирования реальных экспериментов с использованием метода конечных разностей для решения волново-



(*а*) Модель геоакустического волновода (параметры дна).



(*б*) Результаты моделирования: рассчитанные сигналы в точках приема и их спектры.

Рис. 1.2. Моделирование распространения звука на трассе S0-P2: модельный волновод (а) и результаты (б).

го уравнения во временной области, этот подход представляется бесполезным в практических задачах акустики океана ввиду низкой скорости выполнения расчетов. Даже явная разностная схема второго порядка, обеспечивающая низкую вычислительную сложность расчетного алгоритма, совершенно неприменима в сколь-нибудь реалистичных трехмерных задачах. Кроме того, конечно-разностные методы во временной области практически не допускают параллелизации вычислений.

Последний недостаток может быть успешно устранен путем перехода в частотную область (см. раздел 1.3) либо путем использования лучевой теории и метода канонического оператора Маслова (см. следующую главу). Действительно, в первом случае параллелизация вычислений может быть легко осуществлена ввиду независимости решений семейства стационарных задач для различных частот друг от друга, во втором же случае естественно использовать параллельный алгоритм для трассировки большого количества лучей.

1.3. Уравнение Гельмгольца и краевые задачи для него

Уравнение Гельмгольца может быть получено из волнового уравнения (1.13) (или его вязкоупругого аналога (1.3)) путем применения преобразования Фурье по времени или же посредством подстановки вида

$$P_\omega(t, x, y, z) = e^{i\omega t}\hat{P}(\omega, x, y, z)\,,$$

которая представляет собой тональную компоненту импульсного сигнала (или просто тональный сигнал) циклической частоты $\omega = 2\pi f$. Функцию $\hat{P}(\omega, x, y, z)$ иногда называют акустическим давлением в частотной области. Очевидно, что она удовлетворяет эллиптическому уравнению вида

$$\rho\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla\hat{P}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{P} = \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_s)\hat{f}(\omega)\,, \tag{1.15}$$

которое называется уравнением Гельмгольца. Здесь $\hat{f}(\omega)$ есть преобразование Фурье от функции источника $f(t)$, часто называемое просто спектром источника. Для удобства записи здесь и далее мы будем опускать “крышку” над

$P(\omega, x, y, z)$, подразумевая, что во всех случаях ясно, идет ли речь о решении волнового уравнения (т.е. давлении во временной области) или уравнения Гельмгольца (его аналог в частотной области). Кроме того, в случаях, когда частота звука f в задаче фиксирована, мы будем опускать аргумент ω у функции $\hat{P}$. Также, ввиду линейности уравнения (1.15), при построении его решений можно положить $\hat{f}(\omega) = -1$[4] (и, при необходимости, домножить полученное решение на комплексную амплитуду спектра источника на данной частоте).

1.3.1. Представление результатов решения уравнения Гельмгольца и Фурье-синтез временных рядов импульсных сигналов

Перед тем, как перейти к постановке краевых задач для уравнения Гельмгольца, остановимся на том, как именно мы будем представлять результаты их решения. Решением уравнения Гельмгольца (1.15) является комплексное поле акустического давления $\hat{P}(\omega, x, y, z)$. Это поле, формируемое точечным тональным источником частоты $f = \omega/(2\pi)$, из которого исключен временной множитель $e^{i\omega t}$. На практике уровни акустического давления в этом поле измеряют в дБ относительно уровня на 1 м от источника звука (в свободном пространстве). Таким образом, результатом решения стационарных задач акустики океана обычно является распределение

$$P_{dB}(x, y, z) = 20 \log_{10} \left| \frac{\hat{P}(\omega, x, y, z)}{\left. \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} \right|_{R=1\ \text{м}}} \right| = 20 \log_{10} \left| 4\pi \hat{P}(\omega, x, y, z) \right| . \tag{1.16}$$

Поскольку уровни давления в дальнем поле существенно меньше, чем на 1 м от источника, величина $P_{dB}(x, y, z)$ на практике принимает отрицательные значения в интервале от -100 до -30 дБ в зависимости от задачи и удаления от источника звука.

Иногда вместо уровня акустического поля $P_{dB}(x, y, z)$ рассматривают об-

[4] Знак выбран в соответствии с принятыми в [73] обозначениями, которым мы следуем в большей части наших работ.

ратную к нему величину $TL(x, y, z) = -P_{dB}(x, y, z)$, называемую потерями на распространение (transmission loss). Очевидно, эта величина принимает положительные значения в интервале приблизительно от 30 до 100 дБ, которые показывают, на сколько уровень звукового поля в данной точке меньше, чем на расстоянии 1 м от источника.

В рамках данной работы для иллюстрации результатов расчетов мы будем обычно представлять графики зависимости уровней акустического поля P_{dB} или TL от расстояния по горизонтали от источника звука вдоль акустической трассы (напомним, что направление вдоль трассы обычно будет соответствовать координате x) на некотором выбранном горизонте $z = z_r$[5]. При иллюстрации трехмерных эффектов распространения звука мы будем также прибегать к контурным графикам $P_{dB}(x, y) = P_{dB}(x, y, z)|_{z=z_r}$ (либо соответствующим графикам $TL(x, y)$).

В некоторых случаях необходимо получить решение нестационарной задачи в явном виде (т.е. в виде временного ряда импульсного сигнала в точке приема). В этом случае можно выполнить решение уравнения Гельмгольца для некоторого дискретного набора частот, после чего воспользоваться алгоритмом быстрого преобразования Фурье для вычисления $P(t, x_r, y_r, z_r)$ по формуле

$$P(t, x_r, y_r, z_r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\omega, x_r, y_r, z_r) \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \,. \tag{1.17}$$

Технически такого рода вычисление является совершенно элементарным (оно подробно описано в [73]), так что мы не будем здесь останавливаться на его детальном описании.

[5] Часто в качестве z_r мы будем брать ту же глубину, на которой находится источник звука, т.е. полагать $z_r = z_s$

1.3.2. Учет затухания в уравнении Гельмгольца: комплексная добавка к скорости звука

Легко показать, что решение в виде затухающей плоской волны может быть получено из уравнения Гельмгольца, если его модифицировать с помощью мнимой добавки к скорости звука

$$\rho\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla\hat{P}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}(1+\mathrm{i}\eta\beta)^2P=-\delta(x,y,z-z_s)\,, \tag{1.18}$$

где $\eta = 1/(40\pi\log_{10}\mathrm{e})$ – постоянная величина, а $\beta = \beta(x, y, z)$ есть затухание звука в данной точке среды (в дБ на длину волны). Напомним, что эта величина связана с добротностью Q соотношением (1.5).

Для низкочастотного звука (до 1 кГц) затуханием акустических волн в морской воде можно пренебречь, так что β обычно принимается равной нулю в водном слое, т.е. для $z < h(x, y)$ (на более высоких частотах затухание описывается формулой Торпа и начинает играть важную роль даже в водном слое). Величина β, вообще говоря зависящая от всех пространственных переменных (хотя на практике ее чаще всего считают постоянной в дне либо зависящей только от глубины z), является, наряду с плотностью $\rho(x, y, z)$ и скоростью звука $c(x, y, z)$ одной из важнейших величин, характеризующих донный слой жидких осадков. Обычно ее значения лежат в диапазоне от 0,1 до 0,5 дБ$/\lambda$. Этот параметр особенно важен в акустике мелкого моря, и фактически именно он определяет скорость убывания уровней акустического поля при удалении от источника.

Важно отметить, что, вообще говоря, β зависит также и от частоты звука, и для некоторых типов пород эта зависимость может быть достаточно сложной. Тем не менее, во многих случаях ее считают постоянной величиной в широкой полосе низких частот и для многих типов донных осадков. Исследование характера этой зависимости ни коим образом не относится к целям и задачам настоящей работы. Для нас достаточно лишь отметить, что эта зависимость (коль скоро она определена) ни коим образом не влияет на сложность решения вычислительных задач акустики океана в частотной области. Методика учета этой зависимости во временной области разработана нами в [41] и изложена выше в разделе 1.2.1.

1.3.3. Краевая задача для уравнения Гельмгольца: граничные условия

Граничные условия для уравнения Гельмгольца (1.15) и (1.18) в точности совпадают с аналогичными условиями для волнового уравнения. При $z = 0$ мы имеем условие мягкой границы

$$P|_{z=0} = 0\,. \tag{1.19}$$

Аналогичным образом на уравнение Гельмгольца в точности переносятся и условия (1.11) на границе раздела сред $z = h(y)$ (условие непрерывности давления и нормальной компоненты колебательной скорости).

Во многих случаях по ряду причин удобнее сделать область конечной по глубине z (подробнее причины этого ограничения будет обсуждаться в главе 3). С этой целью на достаточно большой глубине $z = H$ (существенно превышающей глубину моря $h(x, y)$ и такой, чтобы отражениями от нее можно было пренебречь) вводится фиктивная граница, на которой ставится условие Дирихле

$$P|_{z=H} = 0 \tag{1.20}$$

или условие Неймана

$$P_z|_{z=H} = 0\,. \tag{1.21}$$

Конкретный вид условия не важен, т.к. мы требуем, чтобы H было достаточно большим для того, чтобы отражения от данного горизонта не “портили” решение в водном слое. Задачу с фиктивным дном мы будем называть задачей для уравнения Гельмгольца в слое $z \in [0, H]$.

1.3.4. Условия излучения и условия в особых точках

Перечисленных до сих пор граничных и интерфейсных условий недостаточно для того, чтобы обеспечить единственность решения краевой задачи для трехмерного уравнения Гельмгольца (1.15) в полупространстве $z \geq 0$ или полосе $0 \leq z \leq H$. Этот факт объясняется тем, что уравнению и всем указанным условиям могут удовлетворять как волны, уходящие от источника на бесконечность, так и волны, приходящие из бесконечности. Известно, что в свободном пространстве (и, например, в однородном полупространстве) единственность решения краевой задачи для уравнения (1.15) можно обеспечить, дополнив ее условием излучения Зоммерфельда при $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_s)^2} \to \infty$ (на бесконечном удалении от источника). Это условие в трехмерном случае имеет вид [73, 92]

$$R \left(\frac{\partial}{\partial R} - ik_\infty \right) P \to 0 \text{ при } R \to \infty \,, \tag{1.22}$$

оно позволяет исключить из решения волны, приходящие к источнику с бесконечности. Величина $k_\infty = \omega / c_\infty$ в условии (1.22) есть волновое число в среде на бесконечном удалении от источника звука. Данное условие подходит и для задач распространения волн в безграничной среде, неоднородности которой локализованы внутри некоторого компактного подмножества трехмерного пространства.

В рассматриваемых в настоящей диссертации задачах, однако, среда ограничена в направлении z плоскостями $z = 0$ и $z = H$. В данной ситуации классические условия Зоммерфельда не обеспечивают единственности решения краевых задач для уравнения Гельмгольца. В случае, если трехмерный слой, ограниченный указанными плоскостями (для определенности будем пока считать, что на этих границах ставятся условия Дирихле (1.19) и (1.20)), является однородной средой, вопрос о единственности решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца был исследован Свешниковым [93, 94]. Им было показано, что единственность решения такой задачи можно установить, дополнив краевые условия на границах слоя т.н. парциальными условиями излучения при $r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik_j\right) p_j = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right) \text{ при } r \to \infty\,, \quad j = 1, 2, \ldots, N_m\,, \tag{1.23}$$

где $p_j(x, y)$ суть коэффициенты разложения решения $P(x, y, z)$ трехмерного уравнения Гельмгольца (1.15) в ряд Фурье по переменной z:

$$P(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(x, y) \sin\frac{j\pi}{H}\,, \tag{1.24}$$

константы k_j определяются соотношением $k_j = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{j^2\pi^2}{H^2}}$, а N_m равно целой части числа $\frac{\omega H}{\pi c}$. Нетрудно заметить, что парциальные условия излучения фактически задают характер поведения коэффициентов разложения акустического поля в слое постоянной толщины по вертикальным модам $\sin\frac{j\pi}{H}$, причем для единственности решения достаточно, чтобы (1.23) выполнялись лишь для распространяющихся мод (т.е. таких мод, для которых волновые числа k_j вещественны).

Хотя может показаться, что условия Свешникова (1.23) относятся к лишь к предельно идеализированному частному случаю, на самом деле установленный им результат допускает далекоидущие обобщения. Именно идея, состояшая в том, что условия излучения должны ставиться отдельно для различных компонент модового разложения акустического поля, лежит в основе описанных ниже более общих результатов [95, 96]. Во многих практически важных случаях достаточно лишь заменить разложение в стандартный ряд Фурье в условиях (1.23) разложением в ряд по вертикальным модам.[6]

В задачах акустики океана среда, как правило, не только является ограниченной, но и имеет некоторую вертикальную стратификацию на любых удалениях от источника. Таким образом, в океанических волноводах обычно не

[6] С точки зрения физики, переход от классических условий Зоммерфельда к условиям Свешникова и их дальнейшим обобщениям на самом деле соответствует переходу от расходящихся волн в безграничной среде к волноводным модам.

существует предела k_∞ величины $\omega/c(x,y,z)$ при $R \to \infty$. Имея в виду расчет звукового поля в некоторой ограниченной области, обычно имеет смысл говорить о том, что такая стратификация становится постоянной на некотором удалении от источника звука, т.е. что, например $c = c(x,y,z) = c_\infty(z)$ при $r > r_{\max}$, где $r_{\max}$ – некоторое достаточно большое число. Таким образом, требуется, чтобы стратификация среды была постоянной вне некоторого достаточно большого цилиндра $r \le r_{\max}$, $0 \le z \le H$ (или $z \ge 0$). В этом случае единственность решения краевой задачи для уравнения (1.15) можно обеспечить, потребовав выполнения условий, полученных в недавней работе [97] (двумерный аналог представлен в работе [96])

$$\left(\frac{\partial}{\partial R} - ik_\infty(z)\right) P_f = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \text{ при } R \to \infty\,,$$
$$P_f = O\left(\frac{1}{R}\right) \text{ при } R \to \infty\,,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik_{j,\infty}\right) P_j = O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) \text{ при } r \to \infty\,, \tag{1.25}$$

где P_j – j-ая модальная компонента поля (проекция акустического поля на одну из мод дискретного спектра волновода со стратификацией “на бесконечности”)[7], $P_f = P - \sum P_j$ – расходящаяся компонента поля[8], $k_\infty(z) = \omega/c_\infty(z)$ – зависимость волнового числа от глубины при $r \to \infty$, $k_{j,\infty}$ – волновое число j-ой моды дискретного спектра в таком волноводе.

Условия (1.25), однако, также не подходят для отдельных модельных задач, рассмотренных в настоящей работе, например, для задачи распространения звука над подводным каньоном, решение которой представлено в третьей главе работы (см. раздел 3.3). Непригодность условия излучения из [97] связана с тем, что звуковое поле в этой задаче имеет модовую структуру не только в

[7] Подробное рассмотрение понятий, относящихся модовому описанию распространения звука, приведено в главе 3. Здесь мы вынуждены обратиться к ним несколько заранее для формулировки условий излучения.

[8] Эта компонента равна нулю в случае решения задачи в слое $0 \le z \le H$, однако условие для нее необходимо при решении задач в полупространстве $z \ge 0$.

вертикальном, но и в горизонтальном сечении волновода. По-видимому, условие излучения, подходящего для обеспечения единственности решения задачи распространения звука в мелком море с подводным каньоном (а также для других задач акустики океана, где стратификация среды при удалении от источника на бесконеное расстояние по горизонтали зависит от направления), до сих пор не было получено. Вероятно при некотором развитии результатов работ [95, 97], такие условия могут быть выведены, хотя подходящая для всех возможных сценариев распространения звука в океане формулировка может оказаться весьма громоздкой. Мы оставляем здесь это утверждение в качестве гипотезы, т.к. соответствующий вопрос не лежит на магистральном направлении настоящего диссертационного исследования.

Отметим еще, что в большинстве работ по акустике океана, в т.ч. в ставших классическими монографиях [73, 75], подходящие для установления единственности решения трехмерных задач распространения звука условия излучения не формулируются, по-видимому, как раз вследствие того, что этот вопрос не является решенным полностью, и лишь в недавних работах [95–97] на него дан частичный ответ. Следуя этой общепринятой практике, при построении решений конкретных задач в следующих главах диссертации мы будем часто опираться на физические соображения (как правило, эти соображения так или иначе выражают тот факт, что волны, из которых состоит решение, должны двигаться от источника на бесконечность, но не наоборот).

Также заметим, что в задачах распространения звука в областях типа клина, имеющих особые точки (ребро клина) корректная постановка краевой задачи для уравнения Гельмгольца должна также включать условие Мейкснера[98, 99] в окрестности таких точек (это условие гарантирует, что энергия звукового поля ограничена в окрестности ребра клина или других подобных точек). В работах по акустике океана это условие, как правило, вовсе не упоминается ввиду того, что соответствующие рассмотрения часто выполняются на физическом уровне строгости.

1.4. Решение уравнения Гельмгольца в клиновидном прибрежном волноводе

Как было сказано выше, по настоящее время в практических (особенно трехмерных) задачах акустики океана не представляется возможным использовать прямые конечноразностные и конечноэлементные методы для дискретизации трехмерных волновых уравнений (как волнового уравнения, так и уравнения Гельмгольца). По этой причине общепринятой является практика расчетов акустических полей с использованием различного рода приближений, например, метода параболических уравнений [73] (см. также следующие главы работы).

В то же время, любые приближенные и численные методы расчета требуют предварительного тестирования на некоторых модельных задачах, решение которых может быть найдено с высокой точностью. Например, в случае трехмерных параболических уравнений всегда необходимо выяснять, какие члены аппроксимаций операторного квадратного корня существенны для правильного учета различных эффектов, связанных с распространением звука (горизонтальной рефракции, взаимодействия мод и др.), а какими из этих членов можно пренебречь [28, 47]. Заметим, что вопрос об исключении некоторых “перекрестных членов” [28] критически важен для существенного снижения вычислительной стоимости соответствующих алгоритмов. Разобраться в таких вопросах обычно можно, сравнивая результаты численных расчетов с аналитическими решениями некоторых модельных задач о трехмерном распространении звука. Известно лишь очень ограниченное количество такого рода тестовых решений, и наиболее важным из них является, безусловно, решение задачи о распространении звука в трехмерном клиновидном волноводе полученное Дином и Бакингемом в 1993 году с использованием метода изображений [15].

В основе этого метода лежит представление акустического поля в виде суммы вкладов семейства изображений источника (мнимых источников). Каждое изображение соответствует волнам, излученным реальным источником и испытавшим некоторое количество отражений от границ клина [15], т.е. от поверхности и дна моря (см. следующий раздел). Данный метод в случае непроницаемых границ (на которых поставлены, например, условия Неймана или Дирихле) иногда излагается даже в школьных учебниках физики. В работе [15], однако, этот метод применяется к гораздо более сложной задаче, в которой одна из границ клина (граница раздела вода-дно) является частично проницаемой для падающих волн благодаря обычным условиям непрерывности давления и нормальной компоненты колебательной скорости.

Как было указано ранее, основной областью приложений решения, полученного с помощью метода изображений, является тестирование численных моделей трехмерного распространения звука в океанических волноводах [27, 47]. До настоящего времени такого рода тесты, как правило, выполнялись лишь для моделей с жидким дном [27, 28, 100, 101]. Очевидно, однако, что в ближайшем будущем будут весьма востребованы аналитические решения для трехмерных задач распространения сейсмоакустических волн, по мере того как появляются вычислительные методы и расчетные программы, учитывающие сдвиговые волны в дне.

Заметим, что в реальном океане невозможно найти прибрежный волновод, имеющий форму идеального клина. По этой причине Коракасом, Стюрмом и Сессарего был поставлен лабораторный эксперимент для проверки адекватности наших теоретических представлений о распространении звука в таком волноводе [102, 103].

К сожалению, в работе [15] нами был обнаружен ряд неточностей. Кроме того, там опущены некоторые нетривиальные вопросы, связанные с расчетом поля в прибрежном клине с помощью метода изображений. В наших работах [54, 69] мы последовательно рассмотрели все эти нюансы. Кроме того, мы провели расчеты и качественный анализ звуковых полей, формируемых точечным источником в клине в случае, когда дно является упругой средой, в которой присутствуют волны сдвига. В этом разделе, следуя [54, 69], мы рассмотрим решение задачи о клине с помощью метода изображений. Полученное решение будет использоваться в качестве эталона в последующих главах.

1.4.1. Постановка задачи и представление решения в виде суммы по изображениям источника

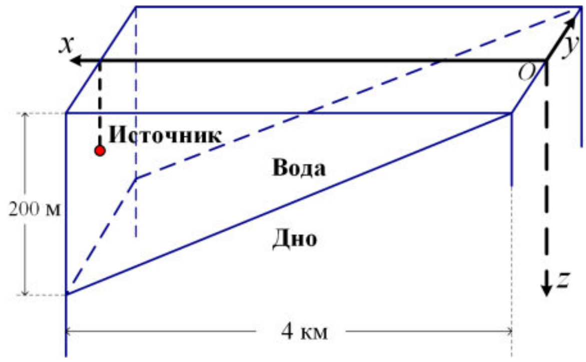


Рис. 1.3. Схематическое изображение клиновидного прибрежного волновода с проницаемым дном.

Рассмотрим волновод мелкого моря, показанный на Рис. 1.3. Он представляет собой водный слой, имеющий форму клина и ограниченный снизу проницаемым дном, а сверху – поверхностью моря. При этом угол раскрытия клина обозначается α_w. Скорость звука и плотность в водном слое равны c_1и ρ_1, а соответствующие параметры дна суть c_2 и ρ_2; затухание звуковых волн в дне составляет β_2 (эта величина задается в децибелах на длину волны). В случае упругого дна мы также обозначим скорость S-волн символом c_{2s}, а их затухание как β_{2s}. Здесь и далее мы рассматриваем задачу расчета акустического поля, сформированного гармоническим точечным источником звука частоты f, расположенным внутри водного слоя в таком клиновидном волноводе (далее для простоты именуемом клином).

Хотя данная задача выглядит очень простой, при ее решении обнаруживаются весьма интересные и сложные эффекты, связанные с распространением звука, такие как, например, взаимодействие мод, горизонтальная рефракция и дифракция звука в вершине (на ребре) клина. Точное воспроизведение всех этих эффектов при моделировании звукового поля требует привлечения исключительно сложных математических методов (см., например, [99]). До некоторой степени данная задача представляет собой собрание всех основных вычислительных сложностей, с которыми можно столкнуться при проведении расчетов в подводной акустике.

По-видимому, самой значительной из них является учет дифракции в окрестности вершины клина, в особенности в случае малого угла раскрытия [99]. К нашему счастью, однако, вклад дифрагированной волны пренебрежимо мал при типичных для акустики океана пространственных масштабах задачи (т.е. в случае, когда угол раскрытия очень мал, а ребро клина находится очень далеко от источника звука).

Согласно работе Дина и Бакингема [15], акустическое поле в клине может быть представлено в виде ряда по так называемым изображениям источника $S_{n_b,l}$, которые нумеруются двумя индексами (см. объяснение в следующем разделе). Поле, связанное с каждым изображением $S_{n_b,l}$ мы обозначаем $p_{n_b,l}$. В этом случае суммарное поле внутри клина может быть найдено по формуле

$$p(x,y,z) = p_{0,-1}(x,y,z) + p_{0,2}(x,y,z) + \sum_{n_b=1}^{N}\sum_{l} p_{n_b,l}(x,y,z). \tag{1.26}$$

Вклад от каждого изображения источника может быть записан в виде разложения сферической волны по плоским волнам

$$p_{n_b,l} = (-1)^{n_s}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\prod_{b=1}^{n_b} V\left(\varphi_b\right)\right]\frac{\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}\right)}{k_z}dk_x dk_y, \tag{1.27}$$

где n_s есть число отражений от поверхности моря, которое, в свою очередь, определяется значениями n_b и l; произведение в квадратных скобках представляет собой итоговый коэффициент отражения, ассоциированный с данным изображением. Волновой вектор $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ в уравнении (1.27) имеет компоненты k_x, k_y и k_z в направлениях координатных осей x, y и z соответственно, они удовлетворяют соотношению $k_z = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$, где $k = \omega/c_1$, ω – циклическая частота источника. Положение приемника в координатной системе, начало которой совпадает с данным изображением источника, мы обозначим $\mathbf{R} = (x_r, y_r, z_r)$ (см. Рис. 1.4). Для $z_r \geq 0$ мы выбираем ветвь квадратного корня, для которой $\mathrm{Im}(k_z) \geq 0$, чтобы гарантировать выполнение условия излучения (1.22) на бесконечности.

С помощью перехода к сферическим координатам

$$\begin{aligned} k_x &= k\sin\theta\cos\phi, \quad x_r = R\sin\zeta\cos\xi, \\ k_y &= k\sin\theta\sin\phi, \quad y_r = R\sin\zeta\sin\xi, \\ k_z &= k\cos\phi, \qquad\quad z_r = R\cos\zeta, \end{aligned} \tag{1.28}$$

уравнение (1.27) может быть переписано в более удобном для численной реализации виде:

$$p_{n_b l} = \\ (-1)^{n_s}\frac{ik}{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2-i\infty}\exp\left[i\Omega_z\left(\theta\right)\right]\sin\theta\int\limits_0^{2\pi}\left[\prod_{b=1}^{n_b}V\left(\varphi_b\right)\right]\exp\left[i\Omega\left(\theta\right)\cos\left(\phi-\xi\right)\right]d\theta d\phi, \tag{1.29}$$

где $\Omega_z\left(\theta\right) = kR\cos\theta\cos\zeta$, $\Omega\left(\theta\right) = kR\sin\theta\sin\zeta$. Для дальнейшего разложим последнюю экспоненту в (1.29) в ряд по функциям Бесселя (детали см. в [15]):

$$p_{n_b l} = (-1)^{n_s}\frac{ik}{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2-i\infty}\exp\left[i\Omega_z\left(\theta\right)\right]\sin\theta\left[\frac{a_0 J_0\left(\Omega\right)}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}i^{\nu}a_{\nu}J_{\nu}\left(\Omega\right)\right]d\theta, \tag{1.30}$$

где коэффициенты a_ν определяются по формуле

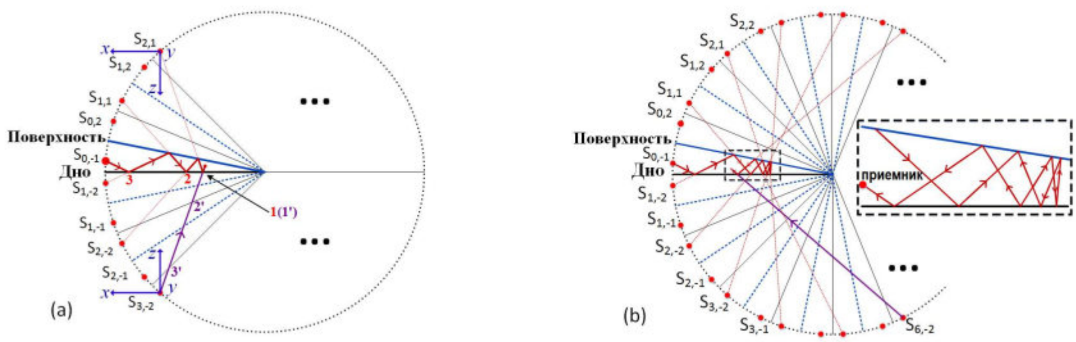
$$a_\nu = 2\cos\left(\nu\xi\right)\int\limits_0^{\pi}\left[\prod_{b=1}^{n_b}V\left(\varphi_b\right)\right]\cos\left(\nu\phi\right)d\phi\,. \tag{1.31}$$

1.4.2. Координаты изображений источника и дна

Здесь мы обсуждаем вопрос о положении изображений источника, суммируемых в основной формуле (1.26) предыдущего раздела. Отметим, что в оригинальной работе [15] формула, описывающая координаты изображений, содержит две опечатки, что не позволяет использовать ее без воспроизведения ее вывода. Введем декартовы координаты (x, y, z) таким образом, что ось y параллельна ребру клина, ось z перпендикулярная поверхности моря и направлена вниз, а источник находится в точке $(x_s, 0, z_s)$ (см Рис. 1.3). В вертикальной плоскости xOz мы также будем использовать полярные координаты (R, Φ), такие что полярная ось совпадает с границей раздела вода-дно, а полюс находится в вершине клина (см. Рис. 1.4). Таким образом, положение источника можно задать полярным радиусом R_s и углом α_s:

$$R_s = \sqrt{z_s^2 + x_s^2}, \tag{1.32}$$

$$\alpha_s = \alpha_w - \arctan\left(z_s/x_s\right). \tag{1.33}$$



(а) (б)

Рис. 1.4. Положение изображений дна и поверхности моря. Изображения поверхности отмечены пунктирными линиями, а изображения дна – сплошными. Жирные радиальные линии показывают, где находятся настоящие дно и поверхность. (а) Ломаная линия $S_{0,-1}$-3-2-1 показывает луч некоторой плоской волны, распространяющейся от источника к приемнику. Ему соответствует прямой луч $S_{3,-2} - 3' - 2' - 1'$, идущий от изображения $S_{3,-2}$ в приемник. На рисунке также показаны локальные системы координат, связанные с изображениями, расположенными выше и ниже дна. Направление оси y при этом определяется по правилу правой руки. (б) Картина лучей для волн от изображения $S_{6,-2}$. Рядом показано их поведение вблизи ребра клина.

В каждой точке водного слоя звуковое поле формируется прямой волной, распространяющейся непосредственно от источника, и волнами, испытавшими множественные последовательные отражения от дна и поверхности. Идея метода изображений состоит в замене поля одиночного точечного источника в волноводе с отражающими границами полем некоторой последовательности мнимых источников в безграничной однородной среде. При этом каждое изображение источника соответствует определенному числу отражений от поверхности и дна сферической волны, излученной реальным (физическим) источником звука. Это соответствие проиллюстрировано на Рис. 1.4.

Используя обозначения из работы [15], угловые координаты $\Phi_{n_b,l}$ изображений источника $S_{n_b,l}$ можно записать как

$$\Phi_{n_b,l} = \begin{cases} -2\left(n_b-1\right)\alpha_w - \alpha_s, & l=-2, \\ -2n_b\alpha_w + \alpha_s, & l=-1, \\ 2n_b\alpha_w + \alpha_s, & l=1, \\ 2\left(n_b+1\right)\alpha_w - \alpha_s, & l=2, \end{cases} \tag{1.34}$$

где n_b есть количество отражений, испытанных волной из уравнения (1.26), соответствующей данному изображению $S_{n_b,\ \ l}$ (заметим, что каждое из отражений от дна соответствует ровно одному сомножителю $V(\varphi_b)$ в уравнении (1.27)). Волны, соответствующие некоторому числу отражений от дна n_b описываются четверкой изображений источника, нумеруемых индексом l. Исключение составляет лишь случай $n_b = 0$, для которого имеется два члена ряда (1.26) с $l = 1, 2$. Они соответствуют реальному источнику $S_{0,-1}$ и его отражению от поверхности моря $S_{0,2}$. Четверка изображений для $n_b = 1$ получается следующим образом. Во-первых, волны от источников $S_{0,-1}$ и $S_{0,2}$ могут попадать в приемник после одного отражения от дна, из-за чего возникают изображения $S_{1,-2}$ и $S_{1,-1}$ (второй индекс принимает отрицательные значения, когда изображение находится ниже границы раздела). Соответствующие им угловые координаты получаются обращением $\Phi \to -\Phi$ полярных углов для $S_{0,-1}$ и $S_{0,2}$, например, $\Phi_{1,-2} = -\Phi_{0,-1}$. Во-вторых, волны от $S_{1,-2}$ и $S_{1,-1}$ могут вновь отразиться от поверхности, в результате чего получаются изображения $S_{1,1}$ и $S_{1,2}$. Легко видеть, что при таком отражении полярные углы преобразуются по формуле $\Phi \to 2_w - \Phi$, например, $\Phi_{1,1} = 2\alpha_w - \Phi_{1,-2}$. На этом четверка с $n_b = 1$ заканчивается, и новые пути можно получить лишь с большим количеством отражений от дна. Следующая четверка $S_{2,l}$ получается схожим образом, т.е. путем последовательного отражения $S_{1,1}$ и $S_{1,2}$ относительно дна, а затем отражения полученных образов относительно поверхности (см. Рис. 1.4).

Обсудим теперь местоположение так называемых изображений дна, которые связаны с изображениями источника. В работе [15] выражение для их угловых координат не согласуется с формулой для звукового поля, соответствующего некоторому изображению источника (уравнение (1.27) настоящей работы).

Волны, которые на самом деле излучаются реальным источником $S_{0,-1}$, а затем испытывают некоторое количество отражений от реальных дна и поверхности, можно рассматривать как излученные изображением $S_{n_b,l}$, а затем пересекающие при движении по прямой линии некоторое количество изображений дна и изображений поверхности, как это показано на Рис. 1.4 (включая, разумеется, реальные дно и поверхность). Изображения дна и поверхности можно получить следующим образом. Когда $S_{0,-1}$ и $S_{0,2}$ симметрично отображаются относительно дна с целью получения $S_{1,-2}$ и $S_{1,-1}$, как это описано выше, поверхность моря также необходимо симметрично отразить относительно дна, получив таким образом ее изображение. После этого, когда $S_{1,-2}$ и $S_{1,-1}$ зеркально отражаются относительно поверхности для получения $S_{1,1}$ и $S_{1,2}$, относительно нее мы также зеркально отражаем реальное дно и найденное ранее изображение поверхности, что дает нам второе изображение поверхности и первое изображение дна.

В общем случае, при зеркальном отражении некоторой пары мнимых источников от дна (или поверхности) для получения следующей пары изображений, все уже имеющиеся изображения дна и поверхности (включая настоящие дно и поверхность клина), находящиеся на той же стороне дна (соответственно, поверхности), что и указанная пара мнимых источников, должны быть зеркально отражены относительно дна (поверхности) для получения новых изображений. Примеры цепочек изображений дна и поверхности показаны на Рис. 1.4.

Заметим, что при расчете поля, «порождаемого» некоторым изображением источника, по формуле (1.27), используется локальная система координат, начало которой совпадает с данным изображением. Для мнимых источников, лежащих выше и ниже линии дна (и именуемых далее верхними и нижними изображениями соответственно), такие локальные системы координат показаны на Рис. 1.4(а). Легко видеть, что углы наклона изображений дна Θ_b относительно оси x в плоскости xOz локальной системы координат могут быть определены по формуле:

$$\Theta_b = \begin{cases} 2\,(b-1)\,\alpha_w, & l < 0 \\ 2b\alpha_w, & l > 0 \end{cases}, \quad 1 \le b \le n_b \quad . \tag{1.35}$$

Заметим, что координатные системы, используемые нами для верхних изображений, несколько отличаются от описанных в работе [15]. Это различие позволяет нам существенно упростить рассмотрение вопроса о выборе ветви квадратного корня в следующем разделе (см. более подробное изложение в [54]), так как в нашем варианте угол Θ_b всегда положителен.

Для иллюстрации того, как изображения дна и поверхности используются при расчетах звукового поля, мы показали на Рис. 1.4(а) луч, распространяющийся от реального источника к приемнику, а также эквивалентный ему прямолинейный луч, исходящий из изображения источника $S_{3,-2}$. Три отражения от настоящего дна (обозначенные как 1, 2, и 3), которые в реальности испытывает волна, при этом соответствуют трем отражениям эквивалентной волны (1', 2' и 3'), «излученной» изображением $S_{3,-2}$, от соответствующих изображений дна. Аналогичным образом для эквивалентного луча заменяются и два отражения от поверхности. Для полноты картины на Рис. 1.4(б) мы также изобразили «настоящий» и эквивалентный ему лучи для изображения источника, находящегося справа от вершины клина (т.е. такого, что $\Phi > \pi/2$). Волны, соответствующие этому изображению, физически сначала движутся в сторону вершины клина от реального источника, затем заворачивают и движутся в обратном направлении и лишь после этого попадают в приемник.

1.4.3. Коэффициент отражения $V(\varphi_b)$ для жидкого и упругого дна

В этом разделе мы обсуждаем вопрос о расчете коэффициента отражения $V(\varphi_b)$ для каждого из сомножителей в формуле (1.27).

Для простоты мы начинаем со случая жидкого дна, для которого коэффициент отражения имеет вид [74]

$$V(\varphi) = \frac{(\rho_2/\rho_1)\,\gamma_1 - \gamma_2}{(\rho_2/\rho_1)\,\gamma_1 + \gamma_2}. \tag{1.36}$$

Здесь γ_1и γ_2суть компоненты волнового вектора падающей и преломленной волны, ортогональные к границе раздела. Они могут быть вычислены как

$$\gamma_1 = k\cos\varphi\,, \tag{1.37}$$

$$\gamma_2 = k_2\cos\varphi_t\,, \tag{1.38}$$

где k_2 есть волновое число в дне, φ_t – угол преломления. В нашем случае угол падения φ может быть определен из соотношения [15]

$$\cos\varphi = \sin\theta\sin\Theta\cos\phi + \cos\theta\cos\Theta, \tag{1.39}$$

где Θ есть угол наклона границы раздела в локальной системе координат. Уравнение (1.39) также устанавливает связь между присутствующими в (1.27) углами Θ_b и φ_b.

Единственной величиной, которую нужно еще вычислить для расчета $V(\varphi)$ является γ_2. Ее можно найти (через φ_t), используя закон Снеллиуса, который с учетом затухания в дне может быть записан в виде

$$\frac{c_1}{c_2/\left(1 + i\eta\beta_2\right)} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_t}, \tag{1.40}$$

где $\eta = 1/(40\pi\log_{10}(e))$. Выражая косинус φ_t через его синус, окончательно получаем

$$\gamma_2 = \pm k_2\sqrt{\frac{c_2 \sin\varphi}{c_1(1+i\eta\beta_2)}}\,, \tag{1.41}$$

где ветвь квадратного корня выбирается таким образом, чтобы удовлетворить условия излучения (1.22) на бесконечности. Установление того, какая именно ветвь соответствует этому условию, в практическом вычислительном алгоритме является нетривиальной задачей, исчерпывающее решение которой представлено в [54] (мы не воспроизводим здесь соответствующий раздел этой статьи).

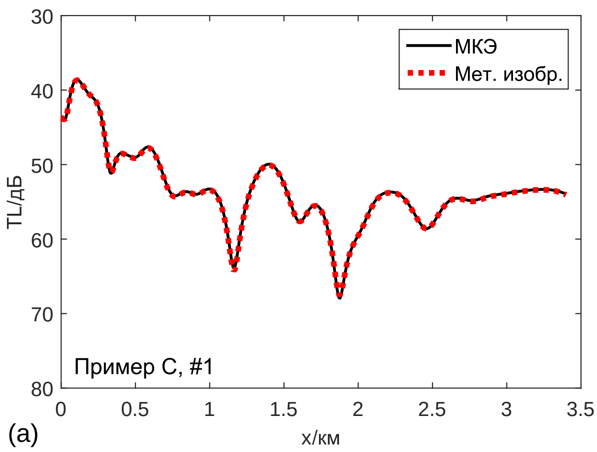
Решение по методу изображений легко обобщается на случай жидкого клина, лежащего на упругом дне, с помощью прямой замены коэффициентов отражения в (1.27) для границы раздела жидкость-жидкость на коэффициенты, соответствующие границе жидкости и твердого тела. Эти коэффициенты могут быть найдены по формуле [74]

$$V = \frac{\rho_2\cos^2 2\varphi_s/\gamma_2 + \rho_2\sin^2 2\varphi_s/\gamma_{2s} - \rho_1/\gamma_1}{\rho_2\cos^2 2\varphi_s/\gamma_2 + \rho_2\sin^2 2\varphi_s/\gamma_{2s} + \rho_1/\gamma_1}, \tag{1.42}$$

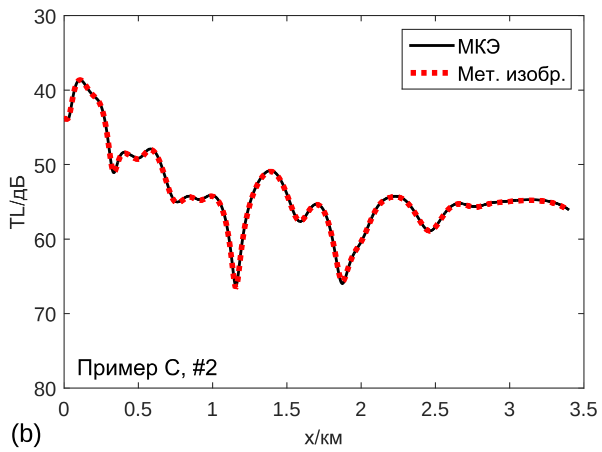
где γ_2и γ_{2s} суть вертикальные волновые числа P- и S-волн соответственно, а φ_s угол преломления для S-волны. Выражение для γ_{2s} может быть получено простой заменой c_2 и β_2 в уравнении (1.41) на c_{2s}и β_{2s}. Таким образом, условия для выбора правильной ветви квадратного корня при расчете γ_{2s} в точности такие же, как для γ_2 (как для $c_{2s} < c_1$, так и для $c_{2s} > c_1$).

1.4.4. Сравнение с решением методом конечных элементов в двумерном случае

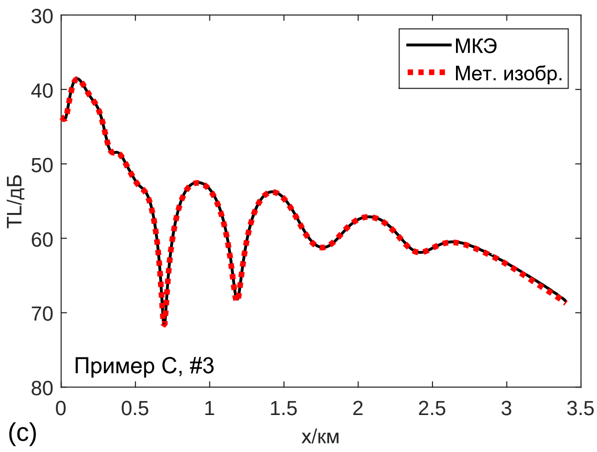
Несмотря на то, что решение задачи в клине, описываемое формулами (1.26) и (1.27) является аналитическим, оно содержит в себе несобственный интеграл и ряд по функциям Бесселя, так что его желательно проверить сравнением с решением, полученным другим методом (по возможности, без дополнительных упрощений исходной задачи). Решение для трассы, ориентированной вдоль наклона дна (вдоль оси x) может быть получено с помощью метода конечных элементов, так как в этом случае задачу можно считать двумерной. Мы выполняем сравнение, выбрав параметры как в известном двумерном тестовом примере ASA[9]. Этот пример был впервые описан в работе [104] и с тех пор постоянно используется для тестирования разнообразных математических моделей распространения в акустике океана как в двумерном (в т.ч. в работах автора настоящей диссертации), так и в трехмерном случае (см., например, [27, 43, 48, 73, 105, 106]). Разумеется, трехмерные эффекты в этой задаче обнаруживаются при ориентации акустической трассы вдоль изобат.



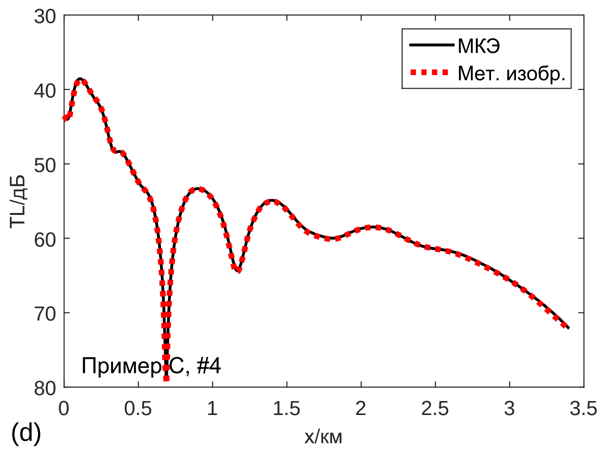
(*а*) случай 1 (жидкое дно без поглощения)



(*б*) случай 2 (жидкое дно с поглощением)



(*в*) случай 3 (упругое дно без поглощения)



(*г*) случай 4 (упругое дно с поглощением)

Рис. 1.5. Результаты сравнения звуковых полей в задаче распространения звука вдоль наклона дна в клиновидном волноводе, рассчитанных с помощью метода изображений (формулы (1.26),(1.30)) и программы COMSOL (метод конечных элементов, осесимметричный случай).

---

[9] Acoustical society of America, Американское акустическое общество

Параметр	Значения			
	#1	#2	#3	#4
ρ_2 (г/см^3)	1.5			
c_2 (м/с)	1700			
β_2 (дБ/λ)	0	0,5	0	0,5
c_{2s} (м/с)	0	0	500	500
β_{2s} (дБ/λ)	0	0	0	0,5

Таблица 1.1. Значения параметров дна в примере из раздела 1.4.4

Здесь мы приводим детальное описание параметров волновода в данном тестовом примере, так как он неоднократно будет использован для иллюстрации наших результатов в последующих главах. Геометрия клиновидного волновода, как и ранее, соответствует Рис. 1.3. Параметры водного слоя имеют следующие значения: $c_1 = 1500$ м/с, а $\rho_1 = 1$ г/см^3. Точечный тональный источник с частотой 25 Гц расположен в точке $x = 4000$ м, $y = 0$, $z = 100$ м, где глубина моря составляет $h = 200$ м. Глубина $h = h(x)$ линейно меняется по x, причем $h(0) = 0$, как и показано на Рис. 1.3 (тем самым прямая $x = 0$ есть береговая линия).

Параметры дна для четырех случаев, рассмотренных нами в этом примере, представлены в Таблице 1.1. В исходном варианте эта задача рассматривалась только в случае жидкого дна как при наличии, так и в отсутствие в нем поглощения (случаи 1 и 2 соответственно). Мы расширили пример, добавив в него также случаи 3 и 4, в которых дно является упругой средой со скоростью распространения сдвиговых волн $c_{2s} = 500$ м/с. В случае 3 затухание продольных и поперечных волн в дне отсутствует, а в случае 4 имеет величины $\beta_2 = \beta_{2s} = 0,5$ дБ/λ.

Мы рассчитали относительные потери $TL(x)$ вдоль прямой $z = 30$ м, $y = 0$ с помощью метода изображений, а также с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Результаты расчетов представлены на Рис. 1.5. Решение по МКЭ было получено с помощью подпрограммы для двумерного осесимметричного случая из коммерческого пакета COMSOL [107].

Для всех четырех случаев результаты расчетов с помощью МКЭ и с использованием метода изображений находятся в полном согласии (кривые на Рис. 1.5 практически не различимы). Этот результат еще раз подтверждает достоверность результатов расчета акустических полей с помощью метода изображений как в случае жидкого дна, так и в случае, когда в нем могут распространяться поперечные волны.

1.4.5. Качественное описание звукового поля в трехмерном клине при различных значениях скорости сдвиговых волн в дне

В этом разделе мы представляем пример, в котором акустические поля вычисляются в четырех различных клиновидных волноводах с одинаковыми значениями скоростей c_2 и c_1, но с различными значениями скорости упругих волн сдвига в дне c_{2s}. В некотором смысле эти четыре случая включают в себя все качественно различные (с точки зрения поведения звукового поля) соотношения между скоростями c_1, c_2 и c_{2s}. Во всех рассмотренных здесь случаях мы фиксируем следующие значения параметров: $c_1 = 1500$ м/с , $c_2 = 3400$ м/с, $\rho_1 = 1$ г/см^3, $\rho_2 = 1,5$ г/см^3, при этом затухание звука в дне мы для простоты считаем равным нулю, т.е. $\beta_2 = \beta_{2s} = 0$. Заметим, что вопрос о возбуждении различных типов упругих волн в дне источником звука, расположенным вблизи от берега, исследовался в экспериментах, описанных, например, в работах [108–110]. По-видимому, основной их практической целью является оценка возможности определения местоположения таких источников с помощью различных принимающих устройств на берегу (например, лазерных деформографов). Попытки качественного и количественного оъяснения результатов этих исследований с помощью трехмерного моделирования распространения звука предприняты в недавней работе [111].

Геометрические параметры клина и координаты источника имеют те же значения, что в предыдущем разделе, однако в этом примере нас будут интересовать трехмерные эффекты, связанные с распространением звука в направлении оси y (поперек наклона дна или, что то же самое, вдоль изобат).

Наша цель состоит в исследовании качественного изменения относительных потерь $TL(x,y)$ в клиновидном волноводе на горизонте $z_r = 30$ м при изменении величины c_{2s} от 0 до 1700 м/с (другими словами, мы исследуем характер зависимости акустического поля в клине от модуля сдвиговой упругости). Хотя глубина в клине, разумеется, не является постоянной, некоторые рассуждения о структуре поля, тем не менее, полезно провести на языке модовой теории. Ниже мы неоднократно упоминаем моды, возбуждаемые источником звука. При этом подразумеваются водные (захваченные) моды волновода сравнения, т.е. волновода типа Пекериса [73] с постоянной глубиной 200 м (мы вычислили их, используя широко известную программу Kraken).[10]

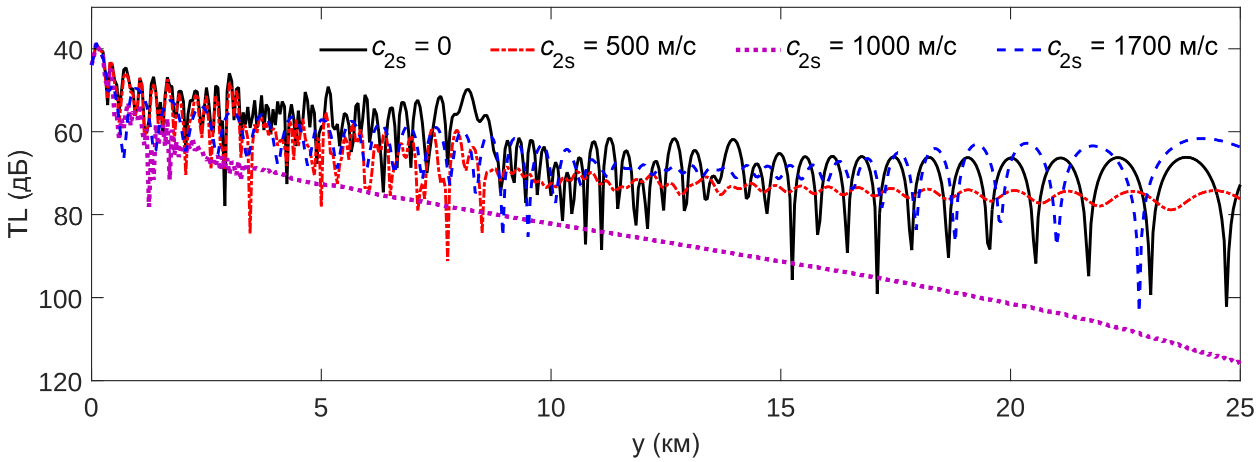


Рис. 1.6. Графики относительных потерь $TL(y)$ на глубине $z = 30$ м в направлении вдоль ребра (ось y) клина при скорости волн сдвига в дне, равной $c2s = 0, 500, 1000$ и 1700 м/с (см. обозначения на рисунке).

Мы начинаем со случая $c_{2s} = 0$ (случай D1[11]), т.е. со случая клина над жидким полупространством. В этой ситуации источник возбуждает 6 водных

[10] Основные понятия и положения модовой теории океанических волноводов (метода нормальных волн) мы рассматриваем в третьей главе работы.

[11] Рассматриваемый пример является примером D из работы [54], а рассматриваемые в нем случаи – D1,D2,D3,D4. В целях приемственности обозначений здесь мы обозначаем их так же.

мод, амплитуды которых достаточно медленно убывают при удалении от него. График относительных потерь $TL(x, y)$ в плоскости $z = 30$ м обнаруживает обычную для горизонтальной рефракции картину звукового поля [15]. Относительные потери $TL(y)$, рассчитанные вдоль прямой $z = 30$ м, $x = 4$ км для этого случая, показаны на Рис. 1.6 сплошной линией, а контурный график $TL(x, y)$ в плоскости $z = 30$ м представлен на Рис. 1.7(а). Каустики, имеющие форму гипербол, формируются точками поворота горизонтальных лучей [2, 58] (см. Рис. 1.7(а)). Заметим также, что последовательность почти эквидистантных максимумов на Рис. 1.6 в дальнем поле $y > 20$ км есть результат самоинтерференции в распределении амплитуды первой моды. Это явление возникает, когда волны, соответствующие прямым горизонтальным лучам для этой моды, интерферируют с волнами, которые соответствуют лучам, первоначально двигавшимся в сторону вершины клина, а затем рефрагированным обратно [2, 58] (на языке мнимых источников эта геометрия распространения объяснена на Рис. 1.4(б)).

В случае D2 мы полагаем $c_{2s} = 500$ м/с, и, таким образом, он характеризуется неравенством $c_{2s} \ll c_1 < c_2$. Соответствующие данному случаю относительные потери TL(y) вдоль прямой $z = 30$ м, $x = 4$ км (график показан штрихпунктирной линией на Рис. 1.6) в дальнем поле на 10-15 дБ выше, чем в предыдущем случае $c_{2s} = 0$. Заметим еще, что положения интерференционных максимумов (см. Рис. 1.6) и каустик горизонтальных лучей (см. Рис. 1.7(б)) почти такие же, как в случае жидкого дна. Таким образом, мы заключаем, что для небольших значений c_{2s} (даже на низких частотах) интерференционную картину звукового поля можно изучать в рамках модели жидкого дна. Присутствие сдвиговой упругости в этом случае проявляется лишь в более быстром убывании амплитуды звукового поля по мере увеличения расстояния от источника в связи с потерями, вызванными переходом энергии акустических волн в воде в энергию сдвиговых волн в дне. Несмотря на то, что в этом случае затухание в дне отсутствует, волновые числа водных мод непременно имеют ненулевую мнимую часть.

Рассмотрим теперь случай D3, для которого $c_{2s} = 1000$ м/с, т.е. $c_{2s} < c_1 < c_2$ (c_1 все еще превосходит c_{2s}, однако эти величины имеют один порядок). Относительные потери для направления поперек клина на этот раз показаны пунктирной линией на Рис. 1.6, а контурный график $TL(x, y)$ в плоскости $z = 30$ м представлен на Рис. 1.7(в). В этом случае мнимые части волновых чисел мод, возбужденных источником, приблизительно в 10 раз больше, чем соответствующие величины для Случая D2. Таким образом, амплитуда звукового поля убывает приблизительно в 10 раз быстрее (в dB на 1 км дистанции распространения), чем для $c_{2s} = 500$ м/с. Очевидно, причиной этого является существенно более высокий уровень потерь энергии звуковых колебаний на возбуждение S-волн в дне.

В завершение этого примера положим $c_{2s} = 1700$ м/с, т.е. рассмотрим случай $c_1 < c_{2s} < c_2$(Случай D4). Относительные потери при распространении в направлении поперек наклона дна для этого случая показаны штриховой линией на Рис. 1.6, а контурный график горизонтального среза $TL(x, y)$ в плоскости $z = 30$ м показан на Рис. 1.7(г). Уровень звукового поля вдали от источника здесь сопоставим с наблюдаемым в Случае D1, однако интерференционная картина в горизонтальной плоскости отличается от последнего радикально. Во-первых, в данном случае источник возбуждает всего 4 моды, волновые числа которых не имеют мнимой части при условии, что β_2 и β_{2s} равны нулю. Три волновых числа при этом с высокой степенью точности совпадают с волновыми числами, вычисленными для случая жидкого дна, скорость звука в котором равна $c_2 = 1700$ м/с. Четвертое волновое число соответствует волне Шольте и имеет существенно большую вещественную часть, чем остальные три. Волна Шольте, однако, не может быть эффективно возбуждена источником, находящимся вдали от дна, и потому интерференционная картина на Рис. 1.7(г) получается в результате интерференции полей трех «водных» мод. Заметим, что каустики горизонтальных лучей в этом случае имеют более сложную геометрию, чем для

D1, и мы планируем изучить ее в ходе дальнейшей работы. Заметим также, что и в этом случае на расстояниях более 20 км от источника картина поля определяется самоинтерференцией первой моды, и его уровень даже превосходит наблюдаемый в Случае D1 на больших расстояниях от источника (см. Рис. 1.6).

1.5. Выводы к первой главе

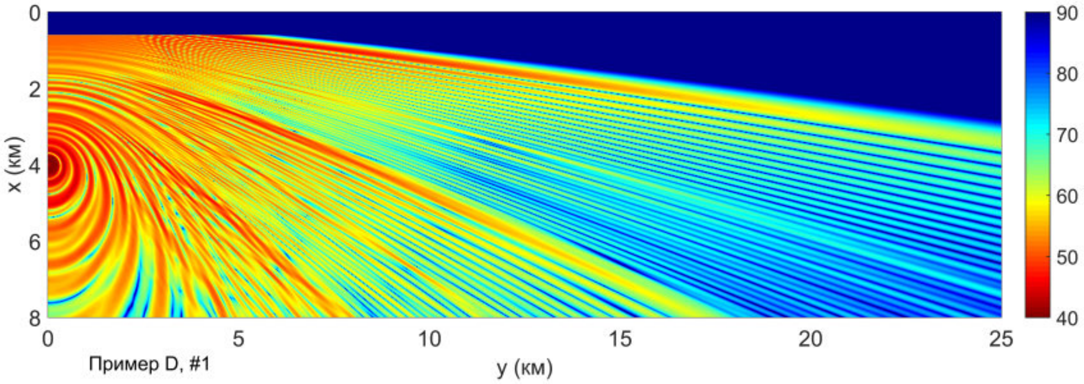
Первая глава настоящей работы частично является вводной, так как в ней мы даем математические формулировки основных задач вычислительной подводной акустики, которые будут решаться в последующих главах. В акустике океана нестационарные задачи (задачи распространения импульсных сигналов), как правило, имеют вид начально-краевых задач для волнового уравнения, а стационарные задачи (задачи расчета волновых полей, формируемых тональными источниками звука) – вид краевых задач для уравнения Гельмгольца. В некоторых случаях (особенно для частот ниже 100 Гц) учет сдвиговых волн в дне требует подключения динамических уравнений теории упругости; в настоящей работе, однако, соответствующие эффекты обсуждаться не будут (единственное исключение – раздел 1.4), и в дальнейшем мы будем иметь дело только с моделью жидкого дна.

Кроме этого, первая глава также посвящена описанию результатов ряда оригинальных работ автора, непосредственно примыкающих к вопросам математической постановки задач подводной акустики и их прямому численному решению, например, методом конечных разностей. Исключительно важным с нашей точки зрения является тот факт, что стандартное волновое уравнение не дает возможности сколь-нибудь адекватно моделировать распространение звука, если эффекты его взаимодействия с дном играют заметную роль (во всяком случае, эта проблема имеет место во всех задачах акустики мелкого моря при частотах звука до 200 Гц). Действительно, в этом случае нет никакой возможности правильно моделировать зависимость затухания звука в дне (даже в случае, если его можно считать жидким). Математическим инструментом минимальной сложности, позволяющим решить эту проблему, является вязкоупругое волновое уравнение, предложенное в [41]. Это уравнение уже содержит интегральный оператор сверточного типа, который существенно повышает требования к вычислительным ресурсам, необходимым для его прямого решения с помощью метода конечных разностей.

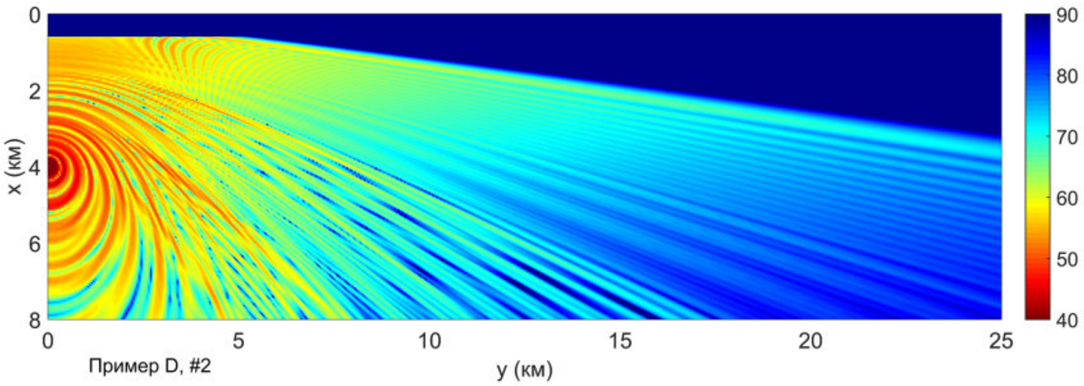
Наш опыт решения практических задач [42], связанных с моделированием распространения сейсморазведочных импульсов и мотивированных необходимостью оценки их параметров по данным опорных измерений при проведении акустического мониторинга, показал, что даже в случае использования простейших явных численных схем второго порядка решение двумерных задач требует вычислений продолжительностью несколько часов. Отчасти эффективность вычислительных алгоритмов можно повысить, например, используя условия искусственной (поглощающей) границы, в т.ч. предложенные в [39, 40], однако каких-либо надежд на то, что прямое решение волнового уравнения может быть осуществлено в задачах, где трехмерные эффекты играют существенную роль, к сожалению, быть не может. Этот неутешительный вывод стал исходной точкой наших дальнейших исследований, результаты которых составляют следующие главы данной диссертации. В этих исследованиях мы применяем различные асимптотические методы для упрощения исходных задач для волнового уравнения или уравнения Гельмгольца, чтобы свести их к задачам, численное решение которых уже будет выполнимо за разумное время.

Тем не менее, такого рода решения нуждаются в верификации путем сравнения с решениями исходных уравнений хотя бы в некоторых относительно простых случаях, для которых такие решения можно вычислить. Наиболее важным случаем такого рода является задача о распространении звука в клине, которая может быть решена с помощью метода изображений, предложенного в [15]. Нами предложен [54] ряд поправок и обобщений к этой работе и разработан программный код для вычисления ее решения. В этой задаче проявляется целый ряд замечательных эффектов, связанных с распространением звука, в число которых входит и горизонтальная рефракция, выражающаяся в отсутствии центральной симметрии в горизонтальных разрезах звукового поля $P_{dB}(x, y)$ и появлении зон акустической тени в горизонтальной плоскости (см. Рис. 1.7). В дальнейшем мы будем рассматривать этот эффект с разных точек зрения и использовать решение задачи о клиновидном прибрежном волноводе в качестве эталонного при развитии различных математических методов.

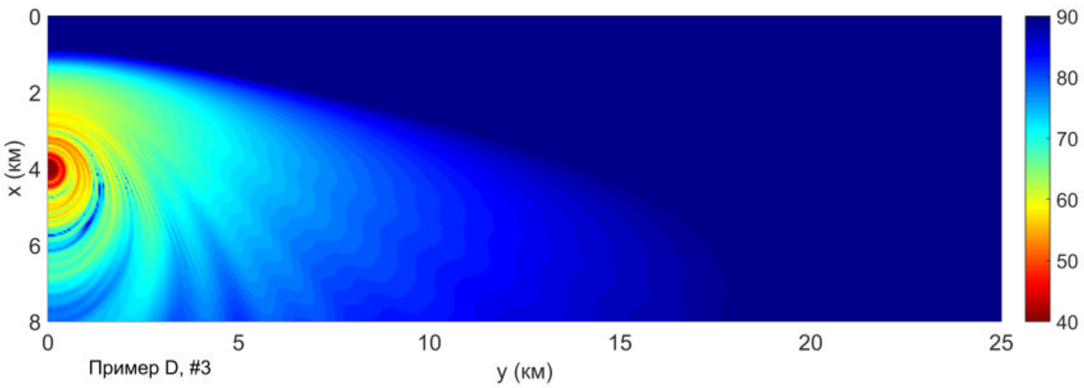
Результаты первой главы опубликованы в работах [39, 41, 42, 54, 69].



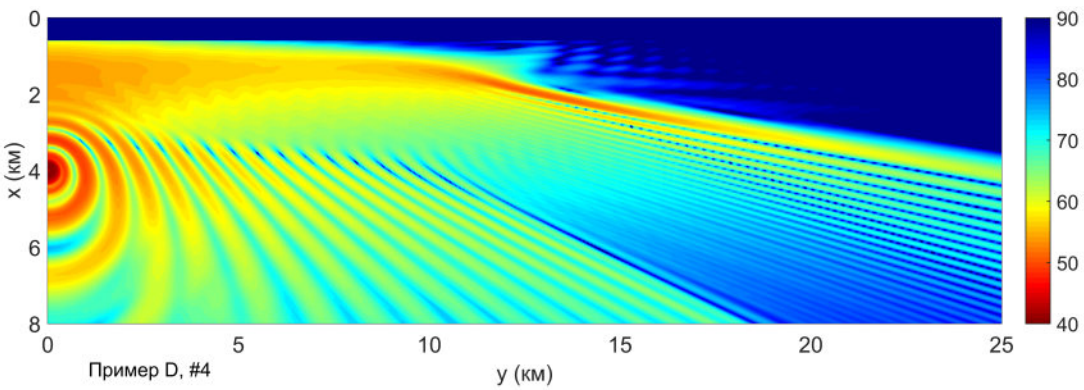
(a) $c_{2s} = 0$



($б$) $c_{2s} = 500$ м/с



($в$) $c_{2s} = 1000$ м/с



($г$) $c_{2s} = 1700$ м/с

Рис. 1.7. Горизонтальный разрез поля относительных потерь на глубине 30 м для клиновидных волноводов, где скорость волн сдвига в дне $c_{2s} = 0$ (а), 0,5 (б), 1 (в) и 1,7 (г) км/с.

Глава 2

Описание трехмерных звуковых полей в океане в рамках лучевой теории с использованием метода канонического оператора Маслова

Как неоднократно отмечалось в предыдущей главе, по ряду объективных причин прямое численное решение волнового уравнения в трехмерных задачах подводной акустики не представляется возможным. Тем не менее, применяя те или иные асимптотические методы, можно упростить смешанную (начально-краевую) задачу для волнового уравнения таким образом, чтобы необходимые вычисления частично производились аналитически.

Важнейший подход такого типа реализуется в рамках *лучевой теории распространения звука* (или геометрической акустики). Сама по себе эта теория, разумеется, появилась задолго до того, как прямое решение волновых или параболических уравнений стало возможным благодаря взрывному росту производительности компьютеров. Ее классическое изложение может быть найдено в любом учебнике по теоретической и вычислительной подводной акустике, например, в [73, 75] (более подробное и в некоторых аспектах строгое изложение можно найти, например, в книге [112], большая часть результатов которой переносится на акустический случай без каких-либо изменений). Как правило, эта теория развивается для уравнения Гельмгольца, что в настоящее время не слишком актуально (по крайней мере для низкочастотных акустических сигналов), так как практически во всех случаях метод параболического уравнения [27, 28, 113, 114] позволяет получить более гибкие и надежные вычислительные алгоритмы (мы позволим себе называть их более *всеядными*, имея в виду последние два качества). Перечислим основные сложности, которые возникают при решение задач акустики океана в рамках лучевого приближения

- необходимость нахождения собственных лучей (т.е. соединяющих источник и приемник), возможность потери части лучевых приходов из-за недостаточной плотности веера лучей и их сложной геометрии;

- невозможность выполнить расчет поля в фокальных точках семейства лучей (т.е. для точек на каустиках)[1];

- проявление лучевого хаоса при расчете лучей в средах с малыми случайными неоднородностями (таковые всегда присутствуют в океане, например, малые случайные неоднородности поля скорости звука могут быть обусловлены присутствием в волноводе внутренних волн).

Отметим, что метод параболического уравнения, несмотря на существенно большую вычислительную трудоемкость, не имеет всех перечисленных недостатков, что и обеспечило ему наибольшую популярность в последние годы среди акустиков-вычислителей. Все указанные проблемы существенно усугубляются при переходе от двумерных задач к трехмерным, что делает разработку универсальной трехмерной расчетной модели, основанной на лучевой теории распространения звука, исключительно сложной задачей. Можно отметить некоторые успехи в этом направлении, достигнутые в последние годы группой Родригеса (Университет Алгарве) [33, 68, 115] (последняя работа выполнена при участии автора настоящей диссертации), развивающей модель TRACEO3D. Отметим также, что при анализе распространения звука в натурных и лабораторных экспериментах лучевые модели использовались в недавних работах Баллард и Сэйджерса [116, 117].

В 70-80е годы двадцатого века в работах представителей ленинградской школы по распространению волн, в т.ч. Бабича, Кирпичниковой, Попова, Качалова [118–120] (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, ранее ЛОМИ), впервые появился идейно близкий лучевой теории метод суммирования гауссовых пучков. Пионерские работы по

[1] Это утверждение относится к расчетам во временной области.

его применению в задачах вычислительной геофизики принадлежат Попову [119, 121]. В акустическом сообществе очень популярен основанный на методе суммирования гауссовых пучков код Портера (компания Heat, Light, and Sound Research, Inc.) BELLHOP [34, 73].

Как показали недавние результаты исследований по моделированию волн на воде (например, цунами) [37, 122, 123], полученные в Лаборатории механики природных катастроф Института проблем Механики им. Ишлинского (Доброхотовым, Назайкинским и другими), часть связанных с лучевыми расчетами проблем (например, вычисление поля в фокальной точке семейства лучей) может быть успешно устранена путем использования современных асимптотических методов, в частности, метода модифицированного канонического оператора Маслова [124] (МКОМ). В указанных выше работах были получены асимптотические представления решения волнового уравнения с локализованной правой частью (либо с локализованным начальным условием) в терминах МКОМ.

В наших работах [52, 53, 58] асимптотические формулы, основанные на МКОМ, были применены к решению задач распространения импульсных сигналов в волноводах глубокого океана [52, 53] и мелкого моря [58]. Оказалось, что формулы Доброхотова и его соавторов могут быть существенно упрощены, если источник звука считать точечным [58]. Развитое нами обобщение лучевой теории распространения звука позволяет получить решение нестационарных задач акустики океана непосредственно во временной области как для регулярных, так и для фокальных точек семейства лучей (что невозможно в рамках стандартного варианта лучевого метода).

Заметим, что хотя в работе [58] была продемонстрирована возможность решения с помощью данных асимптотик трехмерных задач акустики мелкого моря, до сих пор мы ограничивались случаем идеально отражающего дна (с условиями Неймана и Дирихле). Это ограничение продиктовано нашим желанием решать задачи именно во временной области, а коэффициент отражения акустических волн от проницаемого дна, как известно, зависит не только от угла падения, но и от частоты звука. По-видимому, формулы из [53, 58] могут быть модифицированы так, чтобы учесть трансформацию формы импульсного сигнала при отражениях и от проницаемого дна, но эти вычисления мы намерены проделать в ходе дальнейших исследований. Развитая нами методика расчета импульсных сигналов на основе лучевой теории и МКОМ может быть успешно использована в задачах, где альтернативные методы расчета, учитывающие проницаемость дна в мелком море, не могут быть использованы ввиду размеров расчетной области. Действительно, применение, например, метода параболического уравнения для практических расчетов распространения широкополосных сигналов с центральными частотами 0,5 кГц и выше в волноводах с трехмерными неоднородностями, а также на протяженных трассах в сотни километров в настоящее время полностью исключено. Сигналы такого рода, однако, находят приложение в задачах подводной навигации и связи [125, 126], которые в последнее время приобретают все большее значение в связи с разработкой и активным использованием автономных подводных аппаратов. При моделировании распространения навигационных и коммуникационных сигналов [125, 126] зачастую можно пренебречь, например, строением дна и ограничиться приближением акустически мягкой (либо жесткой) границы, поскольку звуковые поля на высоких частотах и на удалениях в десятки и сотни километров от источника так или иначе характеризуются, в основном, углами скольжения, близкими к нулю, при которых наблюдается полное внутреннее отражение от дна. При этом, однако, учет рельефа дна и гидрологических условий остается необходимым [125, 126], так как обусловленная ими вертикальная и горизонтальная рефракция звука весьма сильно сказывается на геометрии распространения, дальности приема и формировании вертикальных и горизонтальных зон акустической тени.

В этой главе мы впервые обсуждаем физический эффект, вынесенный в заглавие настоящего диссертационного исследования – горизонтальную рефракцию. Несмотря на упомянутое выше ограничение для применимости наших результатов, основные черты этого явления и закономерности его возникновения успешно отслеживаются в рамках лучевой теории распространения звука. По-видимому, само понятие о горизонтальной рефракции было впервые введено Вестоном при исследовании поведения трехмерных лучей в мелком море с наклонным дном в фундаментальной работе [1]. В этой статье показано, что при трассировке луча над наклонным дном его угол скольжения[2] и направление распространения в горизонтальной плоскости плоскости связаны через величину, которая является инвариантом вдоль каждого фиксированного луча и определяется только соответствующими углами на выходе из точки излучения. Отметим, что вариации угла скольжения луча вдоль его траектории фактически определяются лишь изменением глубины моря в разных ее точках [127]. Таким образом, отклонения горизонтальных лучей от прямолинейного распространения также определяются в основном именно вариациями глубины. Исследованию того, как именно интерференционная структура поля в горизонтальной плоскости зависит от трехмерных неоднородностей глубины, фактически и посвящено данное диссертационное исследование. В последующих главах мы будет рассматривать этот вопрос, используя различные математические инструменты.

2.1. Начально-краевая задача и асимптотика ее решения

Моделирование распространения импульсного сигнала в волноводе мелкого моря с непроницаемым дном сводится к решению задачи Коши для трехмерного волнового уравнения для акустического давления $P = P(t, x, y, z)$ в области $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < z < h(x, y)$ (граница $z = 0$ соответствует поверхности моря,

[2] Углом скольжения принято называть угол между волновым вектором и горизонталью. В трехмерном случае этот термин может оказаться двусмысленным, так как направление волнового вектора необходимо характеризовать уже двумя углами. В этом случае во избежание путаницы мы иногда будем называть угол скольжения вертикальным углом.

поверхность $z = h(x, y)$ описывает батиметрию) со скоростью $c = c(x, y, z)$. В этой главе мы запишем волновое уравнение в виде

$$\frac{1}{c^2}P_{tt} - \Delta P = Q(\mathbf{r}, t),\ \mathbf{r} = (x, y, z). \tag{2.1}$$

Как и прежде $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ есть оператор Лапласа, а нижние индексы означают частные производные по соответствующим переменным (отметим также, что буквы, соответствующие векторным величинам, мы выделяем жирным шрифтом)[3]. Начальные условия задачи Коши мы задаем в виде

$$P|_{t=0} = P_t|_{t=0} = 0\,. \tag{2.2}$$

На поверхности жидкости ставится условие Дирихле $P|_{z=0} = 0$, а на дне ставится условие Неймана $P_{\mathbf{n}}|_{z=h(x,y)} = 0$ ($\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности $z = h(x, y)$).

Правая часть $Q(r, t)$, описывающая источник, представляется в виде произведения (этот источник был введен в работах [37, 122]):

$$Q(\mathbf{r}, t) = \lambda^2 g_0'(\lambda t)\frac{1}{\mu^3}V\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^0}{\mu}\right).$$

Выбор такой правой части уравнения означает, что в точке $\mathbf{r}^0$ располагается источник звука с малым характерным размером μ, и в начальный момент времени источник излучает импульсный сигнал длительности $1/\lambda$. Такое представление излучаемого сигнала $f(t) = \lambda^2 g_0'(\lambda t)$ необходимо для использования асимптотик из [37, 53, 122], и, как будет видно далее, в конечные формулы для акустического давления войдет только функция $f(t)$.

Вещественные функции $V(\mathbf{w})$ ($\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$) и $g_0(\tau)$ ($\tau \in [0, \infty)$) выбираются такими, что

$$|V^{(\alpha)}(\mathbf{w})| \leq C_\alpha(1 + |w|)^{-|\alpha|-\kappa},\quad |\alpha| = 0, 1, 2, \ldots,\ \int\limits_{\mathbb{R}^3} V(\mathbf{w})d\mathbf{w} = 1,$$

[3] В рамках этой главы мы будем стараться придерживаться обозначений работы [58] кроме случаев, когда они вступают в противоречия с обозначениями главы 1.

$$g_0(0) = 0, \quad \int\limits_0^\infty g_0(\tau)d\tau = 1, \quad |g_0^{(k)}(\tau)| \le C_k e^{-\nu\tau}, \quad k = 0, 1, 2\dots$$

для некоторых $\kappa > 1$, $\nu > 0$ и положительных констант C_α, C_k. Относительно параметров μ и λ будем предполагать, что $\mu \ll 1$, $u = \frac{c_0}{\lambda\mu} \le const$.

Нас интересует асимптотическое решение задачи (2.1), (2.2) при $\mu \to 0+$ $\lambda \to \infty$. Физически эта асимптотика описывает сигнал, излучаемый точечным источником, расположенным в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0$. На основании асимптотических формул мы строим временную историю звукового сигнала в заданной точке $\mathbf{r}^*$, в которой располагается приемник сигнала.

Как показано в [37], решение задачи распадается на два слагаемых: быстрозатухающую часть P_{trans}, локализованную в окрестности точки $\mathbf{w}^0$, и распространяющуюся часть P_{prop}. Мы будем интересоваться только распространяющейся частью (именно она фактически и представляет собой решение на расстояниях, существенно превышающих характерную длину волны, обычно представляющих интерес в задачах подводной акустики).

Отметим, что указанные ограничения относительно параметров μ, λ не являются существенными, и что описанные ниже асимптотические формулы применимы для решения практически любых задач вычислительной подводной акустики.

2.2. Асимптотика распространяющейся части решения в регулярной точке

Вывод асимптотического решения использует понятие канонического оператора Маслова и его модификации. Метод построения канонического оператора представляет собой обобщение лучевого метода и метода ВКБ. Канонический оператор позволяет строить глобальные асимптотические решения и позволяет получать асимптотику в окрестности фокальных точек и каустик, где метод

ВКБ уже неприменим. Однако мы не имеем возможности в данной работе дать точное определение канонического оператора и подробно рассмотреть его свойства, и потому приведем только окончательные формулы для асимптотического решения.

Для начала определим поверхность Λ_s в фазовом пространстве $(\mathbf{r},\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^6$. Рассмотрим гамильтониан $H(\mathbf{r},\mathbf{p}) = c(x,y,z)\sqrt{(p^x)^2+(p^y)^2+(p^z)^2}$ и определим поверхность Λ_s как объединение концов всех траекторий соответствующей системы Гамильтона, выпущенных с единичным импульсом из точки $\mathbf{r}^0$, и отражающихся по обычным правилам от поверхности и дна моря. Более точно, пусть $\mathcal{R}(s,\theta,\varphi) = (X(s,\theta,\varphi), Y(s,\theta,\varphi), Z(s,\theta,\varphi))$, $\mathcal{P}(s,\theta,\varphi) = (P^x(s,\theta,\varphi), P^y(s,\theta,\varphi), P^z(s,\theta,\varphi))$ есть решение гамильтоновой системы

$$\frac{d\mathcal{R}}{ds} = H_{\mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathcal{P}}{ds} = -H_{\mathbf{r}}, \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$\mathcal{R}(0,\theta,\varphi) = r^0\,, \quad \mathcal{P}(0,\theta,\varphi) = \mathbf{n}(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$$

(θ и φ — долгота и широта на двумерной сфере единичных импульсов). При этом, если в некоторый момент s_0: $Z(s_0,\theta,\varphi) = 0$ или $Z(s_0,\theta,\varphi) = h(X,Y)$ (то есть траектория достигла дна или поверхности жидкости), то она должна отразиться таким образом, что $P^z(s_0-0,\theta,\varphi) = -P^z(s_0+0,\theta,\varphi)$. Тогда

$$\Lambda_s = \left\{ (\mathbf{r},\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^6_{\mathbf{r},\mathbf{p}} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = \mathcal{R}\left(s,\theta,\varphi\right) \\ \mathbf{p} = \mathcal{P}\left(s,\theta,\varphi\right) \end{array} \right., \theta \in \left(0,\ 2\pi\right), \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}. \tag{2.4}$$

Эта поверхность не гладкая, она терпит разрыв там, где траектории выходят на границу области.

Фронтом в конфигурационном пространстве называется множество $\gamma_s = \{(x,y,z) = \mathcal{R}(s,\theta,\varphi) : 0 \le \theta < 2\pi, -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$, являющееся проекцией в фиксированный момент времени s поверхности Λ_s на конфигурационное пространство. Лучом называется множество $\{(x,y,z) = \mathcal{R}(s,\theta_0,\varphi_0) : s > 0\}$. При

$s = 0$ фронт γ_0 представляет собой точку $\mathbf{r}^0$, при малых временах s фронт γ_s представляет собой просто сферу. В каждый момент времени t, распространяющаяся часть решения P_{prop} локализована в окрестности γ_t, геометрия которого усложняется с увеличением t.

Зафиксируем точку $\mathbf{r}^*$ (точку приема сигнала, в которой мы хотим вычислить его временной ряд), тогда на конечном отрезке $s \in [0, s_0]$ уравнение $\mathcal{R}(s, \theta, \varphi) = \mathbf{r}^*$ будет иметь конечное число k решений $\alpha_j^* = (s_j^*, \theta_j^*, \varphi_j^*)$, $j = 1, \dots, k$. Пусть все точки $\alpha_j^*, j = 1, \dots, k$ являются регулярными, т.е. в этих точках якобиан $|\frac{\partial \mathcal{R}(t,\theta,\varphi)}{\partial(t,\theta,\varphi)}|$ не равен нулю.

Построим следующие функции

$$F(\eta, \theta, \varphi) = \int\limits_0^\infty \rho \mathrm{e}^{i\eta\rho} \overline{\overline{g}_0} \left(\frac{c_0}{\lambda\mu} \rho \right) \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\theta, \varphi)) d\rho. \tag{2.5}$$

Здесь $\tilde{V}(\xi)$ и $\overline{\overline{g}}(s)$ суть преобразования Фурье функций $V(\mathbf{r})$ и $g_0(\tau)$:

$$\tilde{V}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i\xi\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \overline{\overline{g}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty e^{is\tau} g_0(\tau) d\tau.$$

Для каждого $j = 1, \dots, k$ в окрестности $\mathbf{r}^*$ существует решение $s = s_j(\mathbf{r})$, $\theta = \theta_j(\mathbf{r})$, $\varphi = \varphi_j(\mathbf{r})$ уравнения $\mathcal{R}(s, \theta, \varphi) = \mathbf{r}$ такое, что $s_j^* = s_j(\mathbf{r}^*)$, $\theta_j^* = \theta_j(\mathbf{r}^*)$, $\varphi_j^* = \varphi_j(\mathbf{r}^*)$. Далее определим число $m_j = m_j(s_j^*, \theta_j^*, \varphi_j^*)$ для траектории $\mathcal{R}(s, \theta_j^*, \varphi_j^*)$ $(s \in (0, s_j^*])$, как число перемен знака якобиана $\left|\frac{\partial \mathcal{R}(s,\theta,\varphi)}{\partial(s,\theta,\varphi)}\right|$ на полуоткрытом интервале $(0, t_j^*]$ (с учетом того, что якобиан на траектории может иметь разрывы и меняет знак при отражении траектории от дна и поверхности) минус число отражений траектории от границы, на которой поставлено условие Неймана (дно), плюс число отражений от границы, на которой поставлено условие Дирихле (поверхность).

Тогда распространяющаяся часть асимптотического решения задачи имеет вид

$$P_{prop}\left(\mathbf{r},t\right)=\\ \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\mu^2}\sqrt{\frac{c_0^5}{c(\mathbf{r})}}\sqrt{\frac{\cos\varphi}{|\mathcal{R}_\theta\times\mathcal{R}_\varphi|}}\mathrm{Im}\left[e^{-\frac{i\pi m_j}{2}}F\left(\frac{c_0(s-t)}{\mu},\theta,\varphi\right)\right]\Bigg|_{s=s_j(\mathbf{r}),\theta=\theta_j(\mathbf{r}),\varphi=\varphi_j(\mathbf{r})}, \tag{2.6}$$

где функция F определяется согласно формуле (2.5).

Отметим еще раз, что формула (2.6) представляет собой наиболее общий вид для асимптотики при общих предположениях. Дальнейшее упрощение этой формулы связано с конкретными предположениями о виде функций $V(\mathbf{r})$ и $g_0(\tau)$ (см., например, [53]).

2.3. Упрощение формул для регулярной точки и вычислительные аспекты

В типичной постановке задач подводной акустики размеры источника звука, как правило, пренебрежимо малы по сравнению с размерами расчетной области. Рассмотрим, как упрощаются формулы для решения, если мы формально устремим размер источника к нулю. В этом случае можно считать, что $V\left(\mathbf{r}\right)=\delta(\mathbf{r})$; таким образом, $\tilde{V}\left(\xi\right)=1/(2\pi)^{\frac{3}{2}}$, и, используя свойства преобразования Фурье, мы получаем следующее выражение для функции $F(\eta,\theta,\varphi)$

$$F\left(\eta,\theta,\varphi\right)=\frac{-i\lambda^2\mu^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}{c_0}^2}{g'}_0\left(\frac{\lambda\mu\eta}{c_0}\right). \tag{2.7}$$

Подставив данное выражение (2.7) в формулу (2.6), получим окончательную формулу для акустического давления в регулярной точке

$$P_{prop}\left(\mathbf{r},t\right)=\\ -\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\frac{c_0}{c(\mathbf{r})}}\sqrt{\frac{\cos\varphi}{(2\pi)^3|\mathcal{R}_\theta\times\mathcal{R}_\varphi|}}\mathrm{Re}\left[e^{-\frac{i\pi m_j}{2}}f\left(s-t\right)\right]\Bigg|_{s=s_j(\mathbf{r}),\theta=\theta_j(\mathbf{r}),\varphi=\varphi_j(\mathbf{r})}. \tag{2.8}$$

Формула (2.8) соответствует стандартной лучевой теории распространения звука в океане, фактически суммирование в ней ведется по всем лучам, приходящим в данную точку.

2.4. Асимптотика решения для фокальной точки

Рассмотрим теперь случай, когда точка волнового фронта $\alpha^* = \alpha_j^*$ является фокальной. В этом случае векторы $\mathcal{R}_\theta(\alpha^*)$,$\mathcal{R}_\varphi(\alpha^*)$ линейно зависимы, и формула (2.6) оказывается неприменимой по тем же причинам, что и стандартная лучевая теория распространения звука [73, 78]. Решение волнового уравнения, описывающего распространение звука в глубоком океане для этого случая получено в работе [53] в терминах канонического оператора Маслова. Оно сводится к формуле, аналогичной (2.6). Ниже мы приводим лишь результат упрощения этой формулы для случая точечного источника (аналог формулы (2.8)), который, несмотря на некоторую громоздкость, вполне пригоден для практических вычислений. Читателя, интересующегося техникой вывода этих формул, мы приглашаем ознакомиться с ним в работах [37, 53].

Обозначим $rk \equiv \operatorname{rank}(\mathcal{R}_\theta(\alpha^*), \mathcal{R}_\varphi(\alpha^*))$ (rank обозначает ранг матрицы, составленной из данных векторов) в точке $\alpha^* = (s^*, \theta^*, \varphi^*)$. Приведем формулы для фокальной точки, где $rk = 1$ (это устойчивая особенность). Пусть $\mathcal{R}_\theta(\alpha^*) \neq 0$. Рассмотрим систему уравнений

$$(\mathcal{P}(s,\theta,\varphi), \mathbf{r} - \mathcal{R}(s,\theta,\varphi)) = 0\,, \quad (\mathcal{R}_\theta(s,\theta,\varphi), \mathbf{r} - \mathcal{R}(s,\theta,\varphi)) = 0$$

($(\cdot,\cdot)$ — евклидово скалярное произведение). По теореме о неявных функциях, из этой системы можно выразить s и θ как функции от $\mathbf{r}, \varphi$, т.е. найти такие гладкие функции $s = s\,(\mathbf{r},\varphi)\,,\ \theta = \theta(\mathbf{r},\varphi)$ в окрестности точки $(\mathbf{r}^*, \varphi^*)$, что $\mathbf{r}^* = \mathcal{R}(\alpha^*)\,,\ s^* = s(\mathbf{r}^*,\varphi^*)\,,\ \theta^* = \theta(\mathbf{r}^*,\varphi^*)$. В такой окрестности определитель матрицы M, составленной из векторов $\mathcal{P}, \mathcal{R}_\theta, \mathcal{P}_\varphi - \frac{(\mathcal{R}_\theta,\mathcal{R}_\varphi)}{|\mathcal{R}_\theta|^2}\mathcal{R}_\theta$ не равен нулю.

Определим теперь якобиан $J^\varepsilon(s,\theta,\varphi) = \frac{1}{c_0\cos\varphi}\det\left|\frac{\partial(\mathcal{R}-i\varepsilon\mathcal{P})}{\partial(s,\theta,\varphi)}\right|$. Затем определим число m следующим образом (для простоты рассмотрим случай, когда соответствующая траектория при $s \in (0, s^*)$ не достигает дна и поверхности):

$$m = \frac{1}{\pi}\left(\arg J^{\varepsilon}(\alpha_0)|_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} + \mathrm{var}_{\gamma} \arg J^1(\alpha) - \sum_{s=1}^{4} \arg \lambda_s\right), \tag{2.9}$$

где $\gamma(s)$ ($s \in [0,1]$) – путь, соединяющий фиксированную точку $\gamma(0) = \alpha_0 = (0^+, \phi_0, \varphi_0)$ с точкой $\gamma(1) = \alpha^* = (s^*, \theta^*, \varphi^*)$, и λ_s – собственные значения 4×4 матрицы

$$\begin{pmatrix} E_3 - i\ s_{\mathbf{rr}}(\mathbf{r}^*, \varphi^*) & -i\ s_{\mathbf{r}\varphi}(\mathbf{r}^*, \varphi^*) \\ -i\ s_{\varphi\mathbf{r}}(\mathbf{r}^*, \varphi^*) & -i\ s_{\varphi\varphi}(\mathbf{r}^*, \varphi^*) \end{pmatrix},$$

где $\arg \lambda_j \in [-\pi/2, \pi/2]$ (здесь обозначено $\mathrm{var}_{\gamma} \arg$ — приращение аргумента вдоль пути γ и E_3 — единичная матрица 3×3).

Тогда формула для соответствующего слагаемого в асимптотическом решении имеет вид

$$P_{prop}(\mathbf{r}, t) =$$
$$\frac{c_0^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{Im}\left[e^{-\frac{i\pi m}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|\cos\varphi \det M|}}{|\mathcal{R}_\theta|} \chi(\mathbf{r}, \varphi) F_2\left(c_0(s-t), \theta, \varphi\right)|_{s=s(\mathbf{r},\varphi), \theta=\theta(\mathbf{r},\varphi)} d\varphi\right], \tag{2.10}$$

где

$$F_2(z, \theta, \varphi) = \int\limits_0^{\infty} e^{i\rho z} \overline{\tilde{g}_0} \left(\frac{c_0\rho}{\lambda}\right) \rho^{\frac{3}{2}} d\rho,$$

$\chi(\mathbf{r}, \varphi)$ — гладкая срезающая функция такая, что $\chi = 1$ на множестве $\{(\mathbf{r}, \varphi) : t_\varphi = 0\}$ и $\chi(\mathbf{r}, \cdot)$ имеет компактный носитель для любого $\mathbf{r}$.

2.5. Горизонтальная рефракция звука, геометрия трехмерных лучей и инварианты Вестона

Формулы (2.8) и (2.10) являются аналитическими представлениями звукового поля, формируемого точечным источником в слое жидкости, ограниченном сверху поверхностью моря $z = 0$, а снизу – полностью отражающим дном

$z = h(x, y)$. Эти формулы, однако, могут быть применены только после расчета лучевых траекторий, т.е. после решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3). В общем случае, разумеется, эта система может быть проинтегрирована только с использованием численных методов (например, методов Рунге-Кутты), однако все прочие вычисления уже выполняются аналитически. Кроме того, процедура трассировки лучей является полностью параллелизуемой, и это качество в настоящее время приобрело особую важность ввиду развития аппаратных и программных средств гетерогенных высокопроизводительных вычислений.

Во многих случаях, однако, оказывается возможным получить некоторые представления о геометрии лучей, используя разработанный в 60-70х годах двадцатого века метод инвариантов Вестона [1, 2, 127]. В простых модельных задачах (подобных задаче о распространении звука в прибрежном клине) метод инвариантов Вестона иногда позволяет получить аналитические формулы для лучевых траекторий и даже аналитические оценки интенсивности поля. Такого рода вычисления дают, в частности, хорошее геометроакустическое представление о механизме и последствиях проявления горизонтальной рефракции звука.

В этом разделе мы кратко обсудим основные результаты работ Вестона, опишем явление горизонтальной рефракции с точки зрения трехмерной лучевой теории, а также применим теорию инвариантов для исчерпывающего описания геометрии лучей в клиновидном прибрежном волноводе.

2.5.1. Инварианты Вестона

Здесь и далее мы будем придерживаться обозначений и терминологии из статьи [1]. Предположим, что в некоторой небольшой области геоакустического волновода горизонтальная ось x ориентирована вдоль изобат и ортогональна градиенту глубины. Вестон описывает трехмерные лучи, распространяющиеся от источника звука, двумя углами: φ – угол скольжения, образуемый лучом и горизонтальной плоскостью (измеряется в вертикальной плоскости, содержащей в себе некоторый малый отрезок луча), а θ – угол, образуемый проекцией луча на горизонтальную плоскость и осью x. Для простоты будем считать, что скорость звука в воде постоянна (вообще говоря, результаты Вестона применимы и при наличии в водном слое неоднородностей скорости звука, однако в этом случае формулы для инвариантов существенно усложняются, а описание теряет качественную простоту и изящность).

Следующие факты были установлены Вестоном в его работах [1, 127].

1. Для каждого луча величина
$$T = \frac{h \sin \varphi}{c} \tag{2.11}$$
в однородной среде является инвариантом (инвариант Вестона), где $h(x, y)$ – глубина моря в данной точке (x, y, z) траектории луча, φ – угол скольжения луча относительно поверхности в данной точке траектории. Как следует из этого факта, угол скольжения луча не зависит от траектории его распространения, а определяется лишь глубиной h в данной точке, глубиной в начальной точке h_0 и начальным углом скольжения φ_0 (в этом смысле распространение консервативно).

2. Вдоль траектории луча величина
$$\kappa = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{c} \tag{2.12}$$
является инвариантом и определяется только начальными углами запуска луча φ_0 и θ_0.

Заметим, что инвариантность T и κ, в частности, означает, что если луч был запущен с изобаты $y = y_s$ и после некоторого путешествия вернулся на эту же ось (в точке с другой координатой x), то соответствующий угол φ будет тем же, что угол запуска луча в источнике, а соответствующий угол θ будет составлять $\pm\theta_0$. В частности, это утверждение верно, разумеется, для лучей в задаче о распространении звука в прибрежном клине.

2.5.2. Проекции трехмерных лучей на горизонтальную плоскость в случае прибрежного клина

На языке лучевой теории распространения звука горизонтальной рефракцией называется явление искривления проекций трехмерных лучей на горизонтальную плоскость. Разумеется, сами лучи не являются прямыми даже в случае геоакустического волновода с постоянной скоростью звука и глубиной (они являются ломаными, так как отражаются от поверхности и дна), однако их проекции на горизонтальную плоскость в этом случае – прямые линии, для которых величины углов θ и φ в формулах (2.11),(2.12) постоянны.

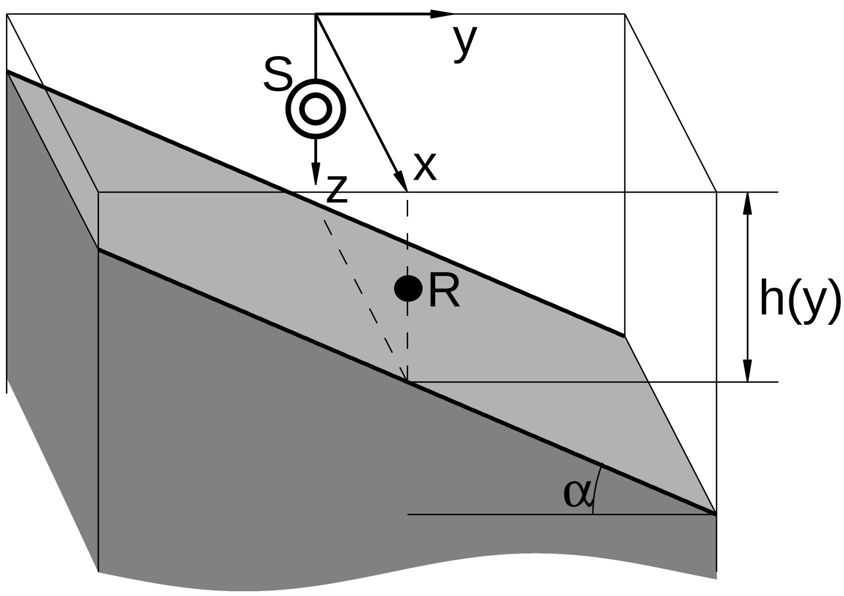


Рис. 2.1. Схема клиновидного волновода, для которого мы исследуем геометрию лучей.

Рассмотрим прибрежный клин, показанный на Рис. 2.1 и предположим, что источник звука находится на расстоянии L от ребра клина вдоль оси y. Пусть двугранный угол при вершине (ребре) клина имеет величину α. Для дальнейшего рассмотрения важно, что угол α мал (в реальных задачах акустики мелкого моря угол наклона дна обычно меньше 1° (элементы рельефа дна, для которых угол наклона составляет несколько градусов встречаются относительно редко). При выводе уравнений для проекций лучей на горизонтальную плоскость удобно считать, что ось x совпадает с ребром клина (т.е. ребро клина имеет уравнение $y = 0$, $z = 0$), а источник находится в точке $y = y_s$, $x = 0$, $z = z_s$.

Исключая угол скольжения φ из уравнения (2.11) и (2.12), получим следующее уравнение для лучевой траектории

$$\cos\theta \left(1 - \left(\frac{cT}{\alpha y}\right)^2\right)^{1/2} = \kappa c\,.$$

Это уравнение есть в работе Вестона [1], однако сделать из него вывод о форме лучевой траектории все еще непросто. Будем теперь искать уравнение для проекции луча на горизонтальную плоскость в виде $y = y(x)$. Тогда в любой точке выполняется условие

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta\,.$$

Выразив $\tan\theta$ из предыдущего уравнения и подставив в это, мы получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для проекции луча

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{\kappa^2 c^2} - 1 - \frac{T^2}{\alpha^2\kappa^2 y^2}}\,, \tag{2.13}$$

допускающее разделение переменных. В результате разделения получаем

$$dx = \pm\frac{\kappa c\alpha}{2}\frac{d(y^2)}{\sqrt{y^2(\alpha^2 - \alpha^2\kappa^2c^2) - T^2c^2}}\,,$$

после чего выполняем интегрирование

$$x = \pm\frac{\kappa c}{\alpha(1-\kappa^2c^2)}\sqrt{y^2(\alpha^2 - \alpha^2\kappa^2c^2) - T^2c^2}\,\Bigg|_{y=y_s}^{y=y}$$

и немного преобразуем результат

$$x = \pm\frac{\kappa c}{\sqrt{1-\kappa^2c^2}}\sqrt{y^2 - \frac{y_s^2\sin^2\varphi_0}{1-\kappa^2c^2}}\,\Bigg|_{y=y_s}^{y=y}\,.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{(x \pm d)}{\kappa c} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2c^2}}\sqrt{y^2 - \frac{y_s^2\sin^2\varphi_0}{1-\kappa^2c^2}}\,,$$

где постоянная d получается в нижнем пределе интегрирования правой части:

$$d = y_s \frac{\kappa c}{1 - \kappa^2 c^2} \sqrt{1 - \kappa^2 c^2 - \sin^2 \varphi_0} = y_s \frac{\cos^2 \varphi_0 \cos \theta_0 \sin \theta_0}{1 - \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \theta_0} \,.$$

Возводя в квадрат и упрощая, получаем уравнения двухпараметрического семейства гипербол

$$\frac{y^2}{1 - \kappa^2 c^2} - \frac{(x \pm d)^2}{\kappa^2 c^2} = \frac{y_s^2 \sin^2 \varphi_0}{(1 - \kappa^2 c^2)^2} \,. \tag{2.14}$$

Параметры семейства – κ и φ_0, причем κ тоже можно пересчитать через углы:

$$\kappa = \frac{\cos \varphi_0 \cos \theta_0}{c} \,,$$

так что можно считать семейство параметризованным углами θ_0 и φ_0.

Таким образом, проекции трехмерных лучей на горизонтальную плоскость в задаче о распространении звука в клиновидном волноводе имеют форму гипербол. По-видимому, впервые этот результат был установлен в работе [1]. Важно отметить, что гиперболы (2.14) лишь приближают реальные проекции лучей. В случае постоянной скорости звука в воде они на самом деле состоят из коротких прямолинейных отрезков.

Проекции лучей с общим меридианальным углом выхода из источника φ_0 имеют огибающую, которая тоже является гиперболой. Именно, рассмотрим однопараметрическое семейство гипербол, задаваемых (2.14) с фиксированным углом скольжения φ_0. Огибающая этого семейства гипербол имеет вид [2]

$$\left(\frac{y}{L \sin \varphi_0} \right)^2 - \left(\frac{x}{y_s \cos \varphi_0} \right)^2 = 1 \,. \tag{2.15}$$

Система координат, в которой ось x совпадает с ребром клина (а источник имеет координату $y = y_s$), удобна для вывода уравнений (2.14) и (2.15), однако в практических задачах и общих построениях в дальнейшем мы будем совмещать ось x с акустической трассой, так чтобы источник и приемник имели координату $y = 0$. Это соглашение (ранее уже обсуждавшееся в главе 1) будет действовать и для всех рисунков в этой главе, представленных ниже. Отметим,

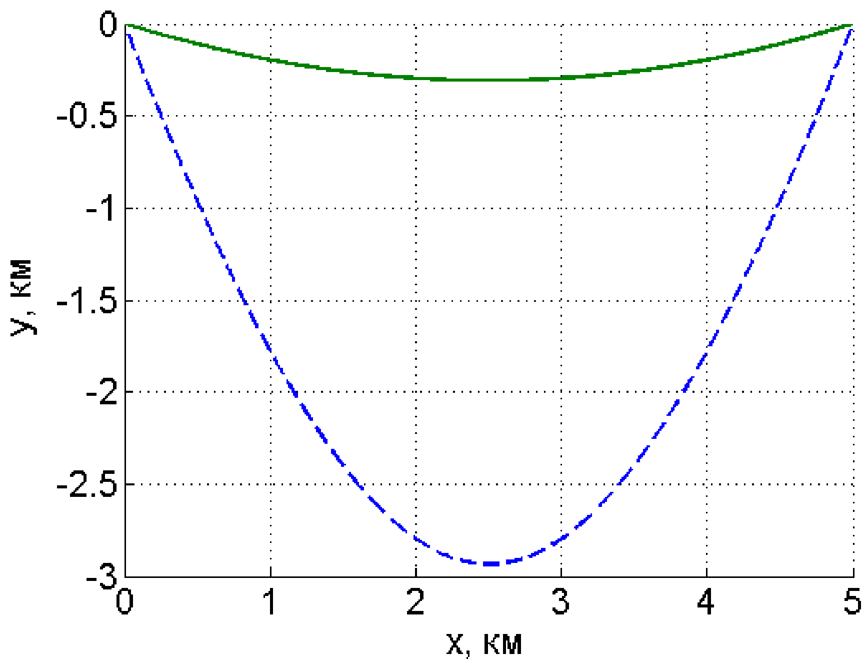


Рис. 2.2. Две различные гиперболы, описываемые уравнением (2.14), соединяющие источник и приемник, которые расположены на одной изобате в клиновидном волноводе мелкого моря.

что проекции семейства лучей с некоторыми фиксированными значениями φ_0 можно ассоциировать с горизонтальными лучами акустических мод. Таким образом, огибающие, определяемые формулой (2.15), позволяют судить о зонах тени, формируемых различными модальными компонентами звукового поля в горизонтальной плоскости (эти огибающие и соответствующие зоны тени хорошо видны на рисунках в разделе 1.4 предыдущей главы). Мы еще вернемся к этому вопросу при рассмотрении уравнений горизонтальной рефракции и их решений в следующих главах.

Из уравнения (2.14) также следует, что для каждой пары точек источник-приемник в клиновидном волноводе существует ровно два луча, горизонтальные проекции которых соединяют эти пары точек (вернее, их проекции на горизонтальную плоскость). Один из этих лучей соответствует практически прямолинейному распространению от источника к приемнику, в то время как длина второго существенно превышает расстояние между ними.

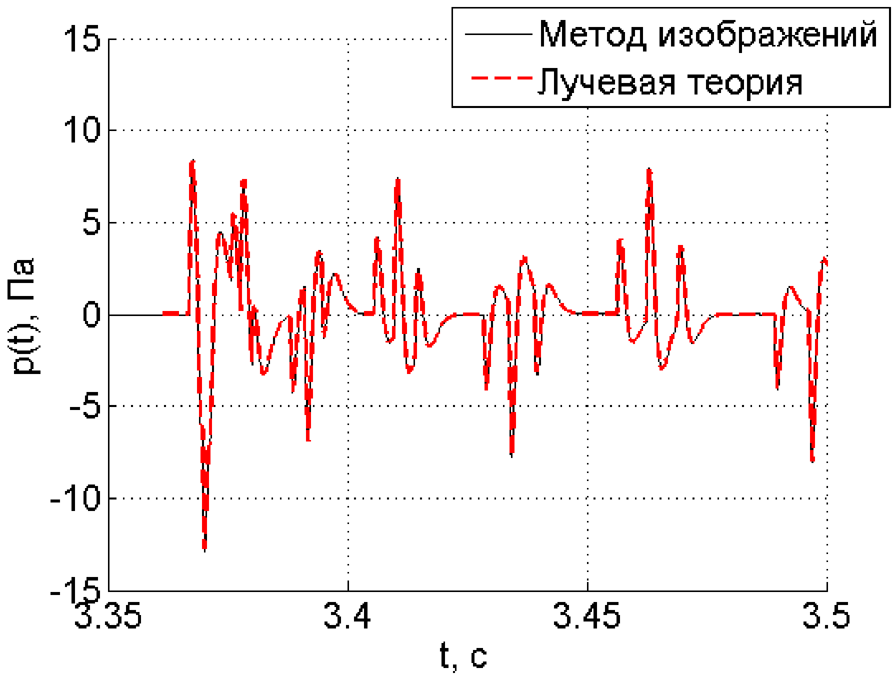


Рис. 2.3. Временной ряд в точке приема для случая $x_r = 5$ км, временной отрезок от 3,35 до 3,5 с от начала отсчета времени, рассчитанный по методу изображений (сплошная линия) и с помощью лучевой теории (пунктирная линия), т.е. по формуле (2.8).

2.5.3. Пример расчета импульсных сигналов в точке приема в задаче о прибрежном клине

В этом разделе мы рассмотрим пример расчета временных рядов импульсных сигналов в прибрежном клиновидном волноводе мелкого моря с использованием формулы (2.8) (случай фокальной точки рассмотрен в статье [53], результаты моделирования мы здесь не приводим).

Зафиксируем параметры задачи следующим образом: пусть $\alpha = 0,5°$, $c = 1485$ м/с, глубина моря в точке излучения $h_0 = 100$ м. Рассмотрим акустическую трассу длиной 5 км, ориентированную вдоль изобаты (т.о., $x_r = 5$ км, $y_r = 0$). Для примера на Рис. 2.2 показаны проекции на горизонтальную плоскость двух лучей (в дальнейшем мы называем эти кривые просто горизонтальными лучами, объяснение этому термину будет дано в следующей главе), соединяющих источник и приемник, и соответствующих значению $\varphi_0 = 45°$. Видно, что одна из гипербол соответствует почти прямолинейному распространению

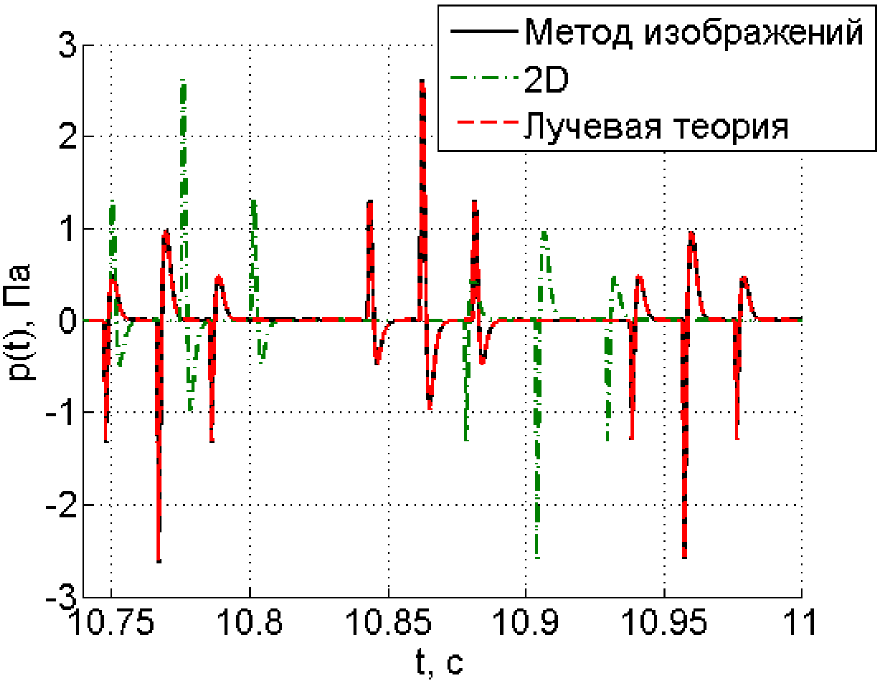


Рис. 2.4. Временной ряд в точке приема для случая $x_r = 5$ км, временной отрезок от 10,75 до 11 с от начала отсчета времени, рассчитанный по методу изображений (сплошная линия) и с помощью лучевой теории (пунктирная линия). Дополнительно показано решение на этом интервале в случае, если дно параллельно поверхности (штрихпунктирная линия).

в горизонтальной плоскости, в то время как вторая соответствует сигналу с горизонтальным лучом, имеющим точку заворота вблизи ребра клина. Если зафиксировать все прочие параметры, то как при уменьшении θ_0, так и при стремлении α к нулю «ближняя» гипербола (сплошная линия на Рис. 2.2) будет стремиться к прямой $y = 0$, а точка заворота дальней «гиперболы» (пунктирная линия на Рис. 2.2) будет удаляться от этой прямой. Если зафиксировать α и уменьшать θ_0, то точка заворота будет стремиться к ребру клина.

Рассмотрим теперь распространение короткого импульса того же вида

$$f(t) = \lambda^2 g_0'(\lambda t) = \lambda^2 a e^{-\lambda t}(-\sin(m\lambda t + \Phi_0) + \cos(m\lambda t + \Phi_0) + \sin\Phi_0)\,, \quad (2.16)$$

что в работе [53] в описанном волноводе (сигнал, подобный по своей форме и спектру сейсморазведочному импульсу [42]). Параметры импульса имеют следующие значения $a = -29/4$, $\lambda = 100$, $m = 0{,}4$, $\Phi_0 = \pi/2$.

Результаты расчета временного ряда импульсного сигнала по формуле

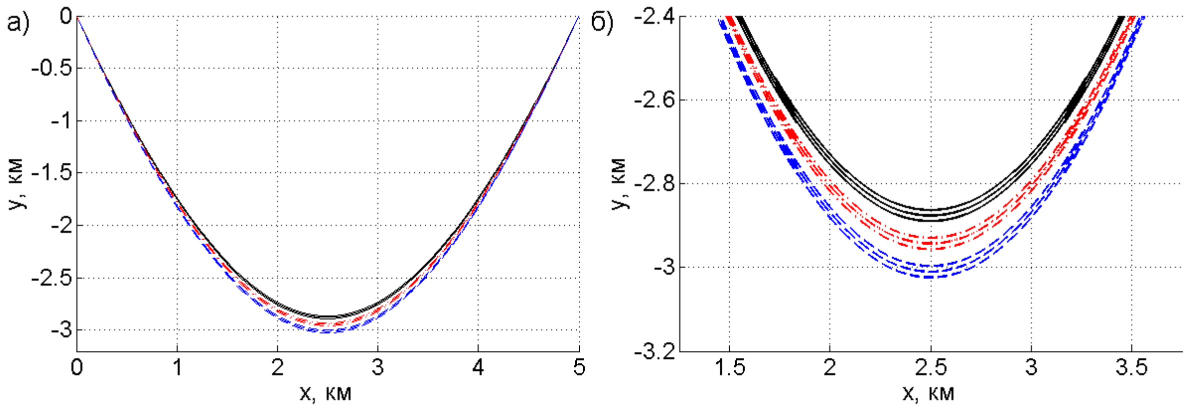


Рис. 2.5. (а) Проекции лучей на горизонтальную плоскость для приходов на Рис. 2.4. (б) увеличенное изображение горизонтальных лучей поблизости от точки заворота. На рисунке выделяется три группы по 4 луча (два луча в каждой группе фактически сливаются), изображенные сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями. Каждая группа лучей соответствует «трезубцу» приходов на Рис. 2.4.

(2.8) принимаемого на расстоянии $x_r = 5$ км (трасса ориентирована вдоль изобаты) показаны на Рис. 2.3 (пунктирная линия) для временного интервала от 3,35 до 3,5 секунд с начала отсчета времени. Для сравнения на этом же рисунке представлен временной ряд, рассчитанный по методу изображений (сплошная линия). Рисунок показывает идеальное совпадение результатов, полученных двумя методами. Заметим, что представленные на Рис. 2.3 первые приходы импульсного сигнала в приемник соответствуют «ближним» гиперболам и малым углам θ_0 (т.е. распространению почти вдоль прямой y=0), поэтому они практически совпадают с решением на этом интервале, рассчитанным для случая, когда дно параллельно поверхности. Таким образом, наклон дна и трехмерность рассматриваемой задачи в этой части сигнала не проявляются. Сигналы, распространяющиеся по «дальним» гиперболам, приходят в приемник существенно позднее. Соответствующий им фрагмент временного ряда в точке приема показан, например, на Рис. 2.4 (интервал от 10,75 до 11 секунд от начала излучения). Показанные на рисунке сигналы соответствуют углам θ_0, близким к $\pm 45°$. Горизонтальные проекции соответствующих им лучей показаны на Рис. 2.5, они весьма близки к «дальней» гиперболе на рис. 2.2. Как и в двумерном случае, приходы формируют четверки, имеющие форму «трезубцев», показанных на Рис. 2.4, и соответствующих группам очень близких друг к другу лучей. Три эти группы показаны сплошной, пунктирной и штрих-пунктирной линией на Рис. 2.5. Для сравнения на Рис. 2.4 также представлен соответствующий фрагмент временного ряда решения, рассчитанный по методу изображений, идеально совпадающий с вычисленным с помощью лучевой теории.

Также на Рис. 2.4 представлено решение задачи для случая, когда дно параллельно поверхности. Видно, что в отличие от интервала времени на Рис. 2.3 в данном случае оно радикально отличается от решения в клине. Таким образом, трехмерность задачи начинает существенным образом сказываться лишь для приходов с большим запаздыванием и большими значениями θ_0, которые в реальной ситуации соответствуют большим потерям, связанным с взаимодействием с дном. Для лучей с малыми углами распространения к горизонтали трехмерностью задачи обычно можно пренебречь. По этой причине горизонтальной рефракции подвержены обычно лишь компоненты сигнала, соответствующие модам наивысших номеров.

2.6. Выводы ко второй главе

В данной главе диссертации показано, каким образом неразрешимые с использованием прямого численного моделирования нестационарные задачи акустики океана могут быть решены асимптотически. Описанное здесь асимптотическое решение строится на основе метода модифицированного канонического оператора Маслова, а также результатов работ [37, 122, 123], причем в рамках этого формализма удается получить решение как для регулярной, так и для фокальной точки семейства лучей. Данный метод, однако, применим лишь в случае начально-краевых задач для волнового уравнения с условиями Дирихле или Неймана, иными словами, лишь для модели полностью отражающего дна. Несмотря на это ограничение, рассмотренные здесь асимптотики могут быть полезны для моделирования дальнего (сотни километров) и сверхдальнего (тысячи километров) распространения импульсных акустических сигналов в сложных волноводах, включающих шельфовый и глубоководный участки в многомодовом режиме (для частот в несколько сотен Герц) и особенно в условиях, когда высшими модами можно пренебречь ввиду их затухания, связанного с взаимодействием с дном. Ввиду размеров расчетной области такие задачи, как правило, не могут быть решены изложенными в следующих главах методами (например, методом параболического уравнения). Тем не менее, для сигналов, значительная часть энергии которых приходится на частоты до 200 Гц, модель непроницаемого дна ни в коей мере не может быть признана адекватной, и в этом случае лучевая теория распространения звука должна строиться для уравнения Гельмгольца (в частотной области), что существенно снижает привлекательность метода и нивелирует его достоинства, связанные с вычислительной эффективностью.

Отметим также, что использование геометроакустических моделей распространения звука в океане в реальных условиях может быть затруднено хаотическим поведением лучевых траекторий (особенно при дальнем распространении). Такое поведение может быть следствием, например, присутствия в волноводе случайных неоднородностей скорости звука, обусловленных внутренними волнами. По-видимому, впервые хаотизация лучевых траекторий в волноводе глубокого океана была рассмотрена в работах Заславского и Абдуллаева [128, 129]. Качественное и количественное описание различных проявлений лучевого хаоса в акустике океана представлено в работах Вировлянского, Пранца, Макарова и других авторов [130–135]. В рамках лучевой теории и метода канонического оператора Маслова учет рассеяния звука на случайных неоднородностях в океане может быть выполнен с помощью процедуры усреднения [136, 137], однако данный вопрос остался за рамками настоящей диссертационной работы.

Важнейшим эффектом, связанным с распространением звука в волноводе мелкого моря с трехмерными неоднородностями дна является горизонтальная рефракция, которая проявляется в искривлении проекций трехмерных лучей на горизонтальную плоскость. Характер этого искривления определяется горизонтальным направлением луча (угол θ), вариациями которого управляет изменение угла скольжения φ (связь устанавливается через второй инвариант Вестона (2.12), [1]), в свою очередь обусловленное изменениями глубины (через первый инвариант Вестона (2.11)). Фактически второй инвариант Вестона определяет закон Снеллиуса для горизонтальных лучей (эту связь мы подробнее рассмотрим в следующей главе). Аналогичные инварианты в случае криволинейных изобат (например, круговых) соответствуют законам Снеллиуса для слоистых сред с криволинейными границами слоев (например, цилиндрически-слоистых). Один инвариант такого типа мы рассмотрим в следующей главе при описании волн шепчущей галереи, локализованных в окрестности криволинейной изобаты.

Результаты второй главы опубликованы в работах [52, 53, 58].

На результаты этой главы опирается следующее выносимое на защиту положение

- Предложено обобщение лучевого метода моделирования распространения импульсных сигналов точечного источника звука в волноводах мелкого моря с неоднородной батиметрией и идеальными границами, позволяющее выполнять расчеты временных рядов акустического давления как в регулярных, так и в фокальных точках семейства лучей.

Глава 3

Модовое представление звукового поля и уравнение горизонтальной рефракции

В данной главе мы вводим объект, находящийся на магистральном направлении настоящего диссертационного исследования – уравнение горизонтальной рефракции. Данное уравнение определяет распределение интенсивности и интерференционную структуру отдельной модальной компоненты звукового поля как функцию от горизонтальных переменных x, y (т.е. в горизонтальной плоскости). Расчет зависимости поля акустического давления от горизонтальных координат в трехмерных задачах подводной акустики таким образом сводится к вычислению комплексных амплитуд отдельных его модальных компонент. Как уже говорилось ранее, термин *горизонтальная рефракция* был, по-видимому, первые введен в работе Вестона [1] в 1961 году. В этой работе было представлено исключительно геометроакустическое описание этого эффекта, которое подробно обсуждалось нами в предыдущей главе.

В течение следующих 50 лет различные трехмерные эффекты, в основном являющиеся проявлениями горизонтальной рефракции, изучались теоретически и наблюдались в экспериментах. К числу таких эффектов можно отнести изменение угла горизонтальной рефракции в прибрежном клине [1, 4], фокусировку/дефокусировку звукового поля нелинейными внутренними волнами [16, 138], фокусировку звука над подводным каньоном и связанную с этим множественность приходов [45, 116, 139, 140], появление в горизонтальной плоскости интерференционной картины, сходной с возникающей в зеркале Ллойда [18, 138], а также поведение звукового поля в окрестности криволинейного фронта внутренней волны [141, 142].

Теоретическое описание звукового поля в трехмерных задачах акустики океана удобно проводить, используя отделение вертикальной переменной (глубины z) в уравнении Гельмгольца и представление звукового поля в виде разложения по локальным модам (т.е. модовым функциям нормальных волн в данной точке волновода) [73, 75]. Коэффициенты в таком разложении – так называемые *модовые амплитуды*, в дальнейшем всегда обозначаемые $A_j(x, y)$ – зависят от горизонтальных координат x, y и удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца, которое, в свою очередь, может быть решено различными методами (в частности, с помощью параболических приближений [35], лучевой теории [3], а также с помощью метода разделения переменных в некоторых частных случаях [45]). Это двумерное уравнение Гельмгольца и называется уравнением горизонтальной рефракции.

В этой главе мы рассмотрим вывод уравнения горизонтальной рефракции (раздел 3.1), некоторые его упрощения, а также два случая, в которых решение данного уравнения допускает аналитическое представление (т.е. выражения для модовых амплитуд $A_j(x, y)$ могут быть получены в виде явных формул).

В первом случае рассматривается задача распространения звука в волноводе мелкого моря с неоднородностью дна в виде подводного каньона [45]. В этом случае результатом проявления горизонтальной рефракции является фокусировка энергии звукового поля над каньоном, а распространение в горизонтальной плоскости можно считать волноводным. Соответствующие горизонтальные моды могут быть описаны в терминах гипергеометрических функций (для захваченных мод формулы упрощаются до элементарных функций).

Во втором случае мы рассматриваем эффекты, связанные с горизонтальной рефракцией звука в окрестности семейства искривленных изобат. Оказывается, что в этом случае уравнение горизонтальной рефракции допускает частные решения специального вида, подобные по своим свойствам модам шепчущей галереи [38]. Мы подробно рассматриваем свойства этих мод, а также методику расчета формируемой ими компоненты звукового поля точечного тонального источника, расположенного в окрестности семейства криволинейных изобат.

Важную роль в представлениях о горизонтальной рефракции играет лучевая теория для двумерного уравнения Гельмгольца для модовых амплитуд. Соответствующие этому уравнению лучи (в плоскости xOy) называются горизонтальными лучами и обсуждаются в разделе 3.2. Оказывается, что в случае постоянной скорости звука в водном слое эти лучи в точности совпадают с проекциями на горизонтальную плоскость трехмерных лучей, рассмотренных в предыдущем разделе, если в качестве вертикального угла выбрать угол скольжения, соответствующий данной вертикальной моде.

Заметим, что в разделах 3.1 и 3.2 настоящей главы приводятся необходимые для дальнейшего изложения понятия и известные результаты, в то время как в разделах 3.3 и 3.4 описаны результаты, полученные в наших работах и непосредственно связанные с защищаемыми положениями.

3.1. Вывод уравнения горизонтальной рефракции и постановка краевых задач для него

В этом разделе мы вводим основные понятия, связанные с модовым представлением акустического поля (волновые числа, спектральная задача, модовые функции), а также коротко обсуждаем процедуру вывода адиабатического уравнения горизонтальной рефракции из трехмерного уравнения Гельмгольца.

3.1.1. Акустическая спектральная задача

Рассмотрим снова краевую задачу для трехмерного уравнения Гельмгольца (1.18), описанную в первой главе. Предположим для начала, что все параметры задачи не зависят от горизонтальных координат (x, y). В этом случае, используя метод Фурье, легко показать [73], что решение краевой задачи для (1.18) имеет вид

$$P(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{4\rho_s} \phi_j(z_s) H_0^{(1)}(k_j r) \phi_j(z) \,, \tag{3.1}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, ρ_s – плотность среды окрестности источника (обычно она равна 1 г/см^3 для источников, расположенных в водном слое), а $\phi_j(z)$ и k_j суть модовые функции и волновые числа акустической спектральной задачи [73]

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2\phi_j}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi_j = k_j^2\phi_j\,, \\ \phi_j\big|_{z=0} = 0\,, \\ \phi_j\big|_{z=h^-} = \phi_j\big|_{z=h^+}\,, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=h^-} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=h^+}\,, \\ \phi_j\big|_{z=H} = 0\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

Задача (3.2) может быть получена из однородного аналога (1.18) и связанных с ним граничных и интерфейсных условий через анзац метода Фурье $A(x,y)\phi(z)$.

Заметим, что данная спектральная задача является самосопряженной, если пренебречь затуханием акустических волн в среде ($\beta \equiv 0$ в (1.18)), и в этом случае собственные значения k_j^2 вещественны, а собственные функции образуют ортогональный базис в пространстве $L^2_\rho[0,H]$ со скалярным произведением

$$(f,g)_\rho = \int\limits_0^H \frac{f(z)g(z)}{\rho(z)}dz\,. \tag{3.3}$$

В случае ограниченного по z слоя толщины H множество собственных функций $\phi_j(z)$ и собственных значений k_j^2 является счетным, причем лишь конечное число последних больше нуля (бесконечное число собственных значений отрицательны). Для определенности мы будем считать, что собственные функции $\phi_j(z)$ нормированы относительно скалярного произведения (3.3), т.е. что

$$\int\limits_0^H \frac{\phi_j(r,z)\phi_\ell(r,z)}{\rho(z)}dz = \delta_{j\ell}\,. \tag{3.4}$$

Заметим, что математические вопросы, связанные с решением задачи (3.2), исчерпывающим образом рассмотрены в монографии [94] (в частности, это касается функционально-аналитических аспектов решения этой задачи).

Однородный аналог уравнения Гельмгольца (1.18) в плоскослоистом случае допускает частные решения вида $e^{i(k_x x+k_y y)}\phi_j(z)$, где $k_x^2+k_y^2=k_j^2$. Решения такого типа называются нормальными волнами, или модами. Для $k_j^2 > 0$ они представляют собой бегущие волны в горизонтальных направлениях и стоячую волну по вертикали, и потому такие моды называют распространяющимися. Для $k_j^2 < 0$ (т.е. мнимых k_j) эти волны экспоненциально затухают в горизонтальных направлениях, и потому эти моды называют затухающими. Решение уравнения Гельмгольца (3.1) в плоскослоистом случае может быть представлено в виде суперпозиции нормальных волн, если входящую в него цилиндрическую функцию разложить по плоским волнам (в широком смысле члены разложения (3.1) также называют нормальными волнами).[1]

Вклад затухающих мод необходимо учитывать только в ближнем поле источника звука, и в большей части задач подводной акустики при суммировании в формуле (3.1) ограничиваются только распространяющимися модами (более того, обычно для расчета поля достаточно лишь некоторого их подмножества, о чем пойдет речь далее).

Вообще говоря, решение акустической спектральной задачи может быть получено, например, с помощью метода конечных разностей. Данный метод сводит спектральную задачу (3.2) для дифференциального оператора второго порядка к задаче на собственные значения разреженной матрицы. В частности, если использовать конечноразностные аппроксимации второго порядка точности для дифференциального оператора в (3.2), то результирующая матрица будет трехдиагональной [73, 94, 143, 144]. Ее собственные значения могут быть найдены, например, методом Арнольди-Ланцоша или методом Штурма. Во всех примерах, рассматриваемых в данной работе, вычисления проводились с использованием программы AC_MODES (программа MATLAB, разработана автором настоящей диссертации) и пакета программ CAMBALA на языке C++, разработанного автором совместно с О.С. Заикиным и А.Г. Тыщенко (математический алгоритм, лежащий в основе вычислительных подпрограмм пакета,

[1] Разумеется, в виде суперпозиции нормальных волн $e^{i(k_x x+k_y y)}\phi_j(z)$ можно представить любое решение уравнения Гельмгольца, а не только имеющее вынуждающий член в виде дельта-функции.

описан в работе [145]).

Важно отметить также, что при наличии в дне поглощения [146, 147] задача (3.2) становится несамосопряженной, и собственные значения k_j^2 становятся комплексными даже для распространяющихся мод (хотя мнимая часть в этом случае много меньше вещественной для мод малых номеров). Затухание звука в мелком море (и, соответственно, появление мнимой добавки у собственных значений мод) может быть обусловлено и другими физическими механизмами, например, присутствием пузырьковых облаков в приповерхностном слое воды [148]. Это затухание играет заметную роль в формировании поля, и учет его совершенно необходим для адекватного моделирования распространения звука. Учесть его можно двумя различными способами. С одной стороны, можно просто включить поглощение $\beta(z)$ в профиль скорости звука $c(z)$ и рассматривать несамосопряженную спектальную задачу [149] (в частности, этот вариант реализован в известных программах ORCA и KRAKEN). Другой способ учесть поглощение звука предоставляет теория возмущения. В рамках этого подхода сначала решается самосопряженная задача (3.2), а затем мнимые добавки к волновым числам k_j вычисляются с помощью обычной теории возмущений [73]. Поскольку методика решения акустической спектральной задачи сама по себе не является предметом исследования нашей диссертации, здесь и далее мы ограничимся вторым методом, как более простым в реализации и требующим меньших вычислительных затрат.

В случае упругого дна (наличия сдвиговых волн) спектральная задача (3.2) оказывается несамосопряженной, волновые числа k_j – комплексными даже при отсутствии поглощения в дне. Тем не менее, методика решения акустической спектральной задачи хорошо разработана и в этом случае [73, 94, 143, 150, 151], а ее программная реализация имеется в программах ORCA и KRAKEN.

Двухслойный волновод конечной глубины: водные и донные моды

В этом разделе мы вводим понятия водных и донных мод. Эти понятия исключительно важны для дальнейшего изложения, хотя и не являются в полной мере общепринятыми. До некоторой степени они соответствуют нормальным волнам дискретного и непрерывного спектра в случае, когда общая глубина расчетной области H является конечной. В этом случае все распространяющиеся моды делятся на два класса сообразно интервалам, на которых лежат их волновые числа.

Рассмотрим для начала двухслойный волновод, в котором в водном (верхнем) слое $0 \leq z \leq h$ скорость звука и плотность имеют постоянные значения $c = c_w$ и $\rho = \rho_w$, а в нижнем (донном) слое $h \leq z \leq H$ эти параметры принимают значения $c_b > c_w$ и $\rho_b > \rho_w$ соответственно.

В этом случае наша задача (3.2) имеет, вообще говоря, два типа решений. Собственные значения k_j^2 решений первого типа удовлетворяют неравенству $\frac{\omega^2}{c_b^2} < k_j^2 < \frac{\omega^2}{c_w^2}$, а соответствующие собственные функции имеют вид

$$\phi_j(z) = \begin{cases} A\sin\left(\kappa_{w,j} z\right) \text{ если } z \leq h\,; \\ B\mathrm{e}^{-\kappa_{b,j} z} + C\mathrm{e}^{\kappa_{b,j} z} \text{ если } z > h\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $\kappa_{w,j} = (k_w^2 - k_j^2)^{1/2}$ и $\kappa_{b,j} = (k_j^2 - k_b^2)^{1/2}$ суть вертикальные компоненты волнового вектора j-ой моды в воде и дне соответственно, а $k_w = \omega/c_w$ и $k_b = \omega/c_b$ суть волновые числа в этих средах. Коэффициенты A, B, C в формуле (3.5) определяются из интерфейсных условий, условий на границе $z = H$ (см. (3.2)), а также из условия нормировки (3.4) собственных функций. Решения спектральной задачи этого типа мы будем называть водными модами.

Собственные значения, которые соответствуют решениям второго типа, лежат в интервале $0 < k_j^2 < \frac{\omega^2}{c_b^2}$

$$\phi_j(z) = \begin{cases} A\sin\left(\kappa_{w,j} z\right) \text{ если } z \leq h\,; \\ B\cos(\kappa_{b,j} z) + C\sin(\kappa_{b,j} z) \text{ если } z > h\,, \end{cases} \tag{3.6}$$

где используются те же обозначения, что в уравнении (3.5), и лишь $\kappa_{b,j}$ на этот раз имеет вид $\kappa_{b,j} = (k_b^2 - k_j^2)^{1/2}$. Как и прежде, A, B, C могут быть легко найдены из граничных и интерфейсных условий в (3.2), а также из условия нормировки (отметим, что граничное условие на поверхности $z = 0$ уже учтено в представлениях решения (3.5) и (3.6) путем исключения косинуса из компоненты решения в водном слое). Решения вида (3.6) мы будем называть донными модами.

Эта терминология оправдывается следующими соображениями. Вообще говоря, мы выбираем значение H достаточно большим, чтобы конкретное положение этой границы не влияло на поведение решения уравнения Гельмгольца на горизонтах $z \ll H$. Например, если речь идет о задаче акустики мелкого моря, где глубина меняется в пределах от 20 до 60 м, то значение H по нашему опыту можно выбрать равным 200 м. В этом случае водные моды будут практически неотличимы от мод дискретного спектра (см. следующий раздел), т.е. в выражении (3.5) C будет много меньше B. Большая часть энергии таких мод сосредоточена в водном слое (так как в дне решение мало отличается от затухающей экспоненты), а мнимая часть собственного значения (обеспечивающая учет затухания) будет много меньше вещественной. В свою очередь, львиная доля нормы (3.4) донных мод (3.6) обеспечивается вкладом донного интервала $h \leq z \leq H$, где и сосредоточена большая часть переносимой ими энергии. Мнимые части волновых чисел у донных мод существенно больше, чем у водных, и потому в реальных условиях потери на распространение компонент сигнала, переносимых донными модами, существенно выше, чем у водных мод.

Волновод Пекериса: моды дискретного и непрерывного спектра

Будем теперь считать, что толщина донного слоя стремится к бесконечности (другими словами, дно является жидким полупространством). Такую двухслойную среду принято называть волноводом Пекериса [152]. Заменим граничное условие $\psi_j|_{z=H} = 0$ требованием ограниченности собственных функций при

$z \to \infty$.

В этом случае водные моды перейдут в моды дискретного спектра, модовые функции для которых имеют вид [73, 153]

$$\phi_j(z) = \begin{cases} C_j^{-1} \sin\left(\kappa_{w,j} z\right) \text{ если } z \leq h\,; \\ C_j^{-1} \sin\left(\kappa_{w,j} h\right) \mathrm{e}^{\kappa_{b,j}(h-z)} \text{ если } z > h\,, \end{cases} \tag{3.7}$$

где C_j – нормирующая константа (определяемая из (3.4)), которые в данном случае могут быть вычислены по формуле

$$C_j = \left(\frac{h_0}{2\rho_w} - \frac{\sin(\kappa_{w,j} h_0)\cos(\kappa_{w,j} h_0)}{2\rho_w \kappa_{w,j}} + \frac{\sin^2(\kappa_{w,j} h_0)}{2\rho_b \kappa_{b,j}}\right)^{1/2}.$$

Волновые числа мод дискретного спектра k_j, $1 \leq j \leq N_d$ (здесь и далее N_d будет обозначать количество водных моды/мод дискретного спектра), для такой задачи могут быть определены из дисперсионного соотношения (см., например, [154]):

$$\tan\left(\kappa_{w,j} h\right) \rho_w \kappa_{b,j} + \rho_b \kappa_{w,j} = 0\,. \tag{3.8}$$

Отметим, что при постепенном увеличении значения H до бесконечности количество водных мод остается постоянным (они быстро становятся неотличимыми от мод дискретного спектра в волноводе Пекериса). В то же время количество донных мод возрастает при $H \to \infty$ на интервале $0 < k_j^2 < \frac{\omega^2}{c_b^2}$. Поскольку этот интервал остается фиксированным, плотность собственных значений на нем растет с увеличением H, и в конце концов он заполняется ими полностью (чисто дискретный спектр донных мод волновода конечной глубины переходит в непрерывный спектр волновода Пекериса).

В практических расчетах, приводимых в настоящей работе, мы будем всегда пользоваться методом конечных разностей для решения задачи (3.2) (в случае конечноразностной аппроксимации второго порядка спектральная задача сводится к задаче на собственные значения трехдиагональной матрицы, которая может быть решена стандартными методами линейной алгебры). По этой причине во всех случаях мы будем иметь дело со спектральной задачей на конечном интервале глубин $z \in [0, H]$, однако полезно иметь в виду два следующих факта.

1. На значительных расстояниях от источника (особенно, если речь идет о десятках и сотнях километров) звуковое поле формируется почти исключительно водными модами.

2. Водные моды при правильном выборе H практически неотличимы от мод дискретного спектра в волноводе Пекериса и, таким образом, для вычислений вполне можно использовать явную формулу (3.7), а собственные значения находить путем численного решения трансцендентного уравнения (3.8).

Таким образом, вертикальная компонента решения всегда может считаться вычислимой с помощью элементарных приемов, а в случае волновода Пекериса это вычисление можно считать аналитическим.

Замечание о водных и донных модах в общем случае

Описанное в двух предыдущих подразделах для простого двухслойного случая разграничение типов мод может быть с некоторыми оговорками перенесено на общий случай, когда в водном слое скорость звука $c = c(z)$ зависит от глубины, а в дне имеется несколько слоев с различными значениями скорости звука и плотности.

Предположим для определенности, что дно состоит из нескольких слоев, скорости звука в которых постоянны и равны $c_{b,1} < c_{b,2} < \cdots < c_{b,s}$, причем в более глубоких слоях они больше, чем в находящихся ближе к поверхности. Пусть скорость звука в воде удовлетворяет условию $c(z) < c_{b,1}$. Тогда водными мы будем называть моды, волновые числа которых удовлетворяют условию $\frac{\omega^2}{c_{b,1}^2} < k_j^2 < \frac{\omega^2}{c_{\min}^2}$, где $c_{\min}$ – минимальное значение скорости звука в воде, т.е.

$\min\limits_{0\leq z<h} c(z)$. В дне соответствующие модовые функции будут близки к затухающим экспонентам, а по меньшей мере на некоторой части интервала $[0,h]$ они будут иметь осциллирующий характер. Все прочие моды (не являющиеся водными) мы будем называть донными.

Отметим, в описанной здесь ситуации могут существовать такие донные моды, для которых $\frac{\omega^2}{c_{b,\ell}^2} < k_j^2 < \frac{\omega^2}{c_{b,1}^2}$, где $\ell < s$. Энергия, переносимая этими модами, оказывается распределенной между водным слоем и несколькими верхними слоями дна, в то время как в более глубоких слоях они будут близки к затухающим экспонентам. Такие моды иногда коллоквиально называют водно-донными. Соответствующие им компоненты сигналов распространяются быстрее, чем у водных мод, и на достаточно низких частотах (десятки Гц) могут формировать так называемый предвестник (головную волну) импульса [42].

3.1.2. Теория возмущений для акустических мод на неоднородностях дна

В следующих главах мы будем неоднократно пользоваться представленными ниже формулами, впервые опубликованными в книге Бреховских и Година [155] (см. также [155–157]), а также полученными независимо с помощью метода многих масштабов Трофимовым [36, 158] (см. также вывод в работе [105]). Формулы устанавливают связь вариаций горизонтальных волновых чисел (собственных значений задачи (3.2)) с изменениями глубины моря (или, более общо, неоднородностями границ раздела сред).[2]

Предположим, что в пределах некоторой акватории профиль скорости звука в воде остается постоянным, однако рельеф дна имеет неоднородности $h(x,y) = h_0 + \Delta h(x,y)$, где $|\Delta h|/h \ll 1$. Тогда волновые числа мод $k_j(x,y)$ в каждой точке будут определяться исключительно значением глубины в этой точке, т.е. можно сказать, что $k_j = k_j(h) = k_j(h(x,y))$. Предположим, что нам

---

[2] Можно также сказать, что приведенные ниже формулы линеаризуют зависимость k_j от глубины $h(x,y)$.

известно значение $k_j(h_0)$, и поставим задачу линеаризации функции $k_j(h)$, т.е. определения производной dk_j/dh, которая позволила бы нам заменить функцию $k_j(h)$ следующим линейным приближением

$$k_j^2(h(x,y)) = k_j^2(h_0) + \frac{d(k_j^2)}{dh}(h_0)\Delta h + o((\Delta h^2)\,. \tag{3.9}$$

Выражение для dk_j/dh может быть получено посредством формального переноса интерфейсных условий спектральной задачи (3.2) на невозмущенную границу раздела $z = h_0$. Действительно, используя формулу Тейлора и пренебрегая членами порядков $(\Delta h)^2$ и выше, получим

$$\begin{cases} \phi_j + \Delta h \frac{\partial \phi_j}{\partial z}\Big|_{z=h_0^-} = \phi_j + \Delta h \frac{\partial \phi_j}{\partial z}\Big|_{z=h_0^+}\,, \\ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial z} + \Delta h \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=h_0^-} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial z} + \Delta h \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=h_0^+}\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Таким образом, для малых Δh возмущенные модовые функции $\phi_j^h(z)$ (верхний индекс h указывает на параметрическую зависимость этих функций от глубины моря h) и соответствующие им собственные значения $k_j^2(h)$ могут быть получены из решения той же самой спектральной задачи (3.2), что и $\phi_j^{(0)}(z)$, но с модифицированными условиями на интерфейсе (3.10).

Выполним теперь умножение равенства

$$\frac{d^2\phi_j^h}{dz^2} + \frac{\omega^2}{(c(z))^2}\phi_j^h = (k_j(h))^2\phi_j^h$$

на $\phi_j^{(0)}(z)/\rho(z)$ и проинтегрируем по z от 0 до H. Применяя правило интегрирования по частям и используя интерфейсные условия (3.10) при $z = h_0$, мы получим следующее равенство

$$\begin{aligned} \Delta h \left[\left(\frac{1}{\rho(h_0^+)}\frac{\partial^2 \phi_j^h}{\partial z^2}(h_0^+) - \frac{1}{\rho(h_0^-)}\frac{\partial^2 \phi_j^h}{\partial z^2}(h_0^-)\right)\phi_j^0(h_0)\right] \\ + \Delta h \frac{1}{\rho(h_0^-)}\frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial z}(h_0^-)\left(\frac{\partial \phi_j^h}{\partial z}(h_0^-) - \frac{\partial \phi_j^h}{\partial z}(h_0^+)\right) \\ + \left(k_j^{(0)}\right)^2 \int\limits_0^H \frac{1}{\rho(z)}\phi_j^h\phi_j^{(0)}dz = (k_j^h)^2 \int\limits_0^H \frac{1}{\rho(z)}\phi_j^h\phi_j^{(0)}dz\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Так как $(k_j^h)^2 - \left(k_j^{(0)}\right)^2 = k_j^{(0)} \Delta h \left.\frac{dk_j}{dh}\right|_{h=h_0} + O(\Delta h^2)$, а $\phi_j^h(z) = \phi_j^{(0)} + O(\Delta h)$, то мы можем переписать последнее равенство, отбросив все члены порядка $O((\Delta h)^2)$ и выше. Таким образом будет получено уравнение для $\frac{dk_j}{dh}$, которое содержит модовые функции невозмущенной спектральной задачи $\phi_j^{(0)}$:

$$
\begin{aligned}
2\Delta h k_j^{(0)} \left.\frac{dk_j}{dh}\right|_{h=h_0} \int\limits_0^H \frac{1}{\rho(z)} \phi_j^{(0)} \phi_j^{(0)} dz \\
= \Delta h \left[\left(\frac{1}{\rho(h_0^+)} \frac{\partial^2 \phi_j^{(0)}}{\partial z^2}(h_0^+) - \frac{1}{\rho(h_0^-)} \frac{\partial^2 \phi_j^{(0)}}{\partial z^2}(h_0^-) \right) \phi_j^0(h_0) \right] \\
+ \Delta h \frac{1}{\rho(h_0^-)} \frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial z}(h_0^-) \left(\frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial z}(h_0^-) - \frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial z}(h_0^+) \right) . \quad (3.12)
\end{aligned}
$$

Поделим это уравнение на Δh, принимая во внимание условие нормировки, и преобразуем его правую часть следующим образом (используя (3.2). Таким образом, получим финальный результат данного раздела

$$
\begin{aligned}
2k_j \left.\frac{dk_j}{dh}\right|_{h=h_0} = (\phi_j(h_0^+))^2 \left[\frac{1}{\rho(h_0^+)} \left(k_j^2 - \frac{\omega^2}{\left(c(h_0^+)\right)^2} \right) - \frac{1}{\rho(h_0^-)} \left(k_j^2 - \frac{\omega^2}{\left(c(h_0^-)\right)^2} \right) \right] \\
- \left(\frac{1}{\rho(h_0^+)} \frac{d\phi_j}{dz}(h_0^+) \right)^2 \left[\rho(h_0^+) - \rho(h_0^-) \right] . \quad (3.13)
\end{aligned}
$$

Теоретически данная формула позволяет заменить многократное решение спектральной задачи в волноводе с неоднородным дном $z = h(x,y) = h_0 + \Delta h(x,y)$ однократным решением при $h = h_0$ и оценкой волновых чисел во всех прочих точках акватории с помощью формулы (3.9). Отметим, что в работах [36, 156, 158] аналогичные формулы приведены и для возмущенных модовых функций $\phi_j^h(z)$.

3.1.3. Модовое представление поля

Перейдем теперь к общему случаю трехмерного волновода, параметры которого, вообще говоря, зависят от всех координат x, y, z. Важной особенностью задач подводной акустики является то, что изменение этих параметров по координатам x, y является намного более медленным, чем по глубине z. На этом наблюдении базируется квазиразделение переменных, являющееся попыткой обобщить метод Фурье (см. предыдущий подраздел) на случай неоднородного по x, y волновода. В двумерных задачах этот метод также известен как метод поперечных сечений. Это название кажется нам менее удачным в трехмерном случае, и в дальнейшем мы будем говорить о квазиразделении переменных или о разложении по локальным модам.

Локальными модами в данной точке акватории x, y[3] мы будем называть решения спектральной задачи $k_j, \phi_j(z)$ (3.2), вычисленные для профиля скорости звука $c = c(z)$, параметров дна и прочих параметров, взятых для данных значений x, y. Иногда такие моды называют модами волновода сравнения, т.е. однородного волновода с независящими от x, y параметрами, имеющими такие же значения, как в данной точке нашего неоднородного волновода. Обычно мы не будем использовать этот термин, так как нам будут нужны лишь локальные значения k_j и локальный базис из собственных функций $\{\phi_j(z)\}$, а не сами моды, понимаемые как частные решения уравнения Гельмгольца для однородного волновода сравнения.

Мы будем подчеркивать тот факт, что моды неоднородного волновода имеют локальный смысл с помощью записи $k_j = k_j(x, y)$ и $\phi_j(z, x, y)$.[4]. Для каждого фиксированного значения x, y функции $\{\phi_j(z)\}$ образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $L^2_\rho[0, H]$ (значение H мы считаем постоянным и не зависящим от горизонтальных координат в рамках каждой фиксированной задачи) со скалярным произведением, заданным (3.3).

[3] В двумерных задачах принято говорить о локальных модах в некотором *сечении* неоднородного волновода. В трехмерном случае, исходя из практических соображений, мы будем говорить о локальных модах в *точке акватории*, имея в виду точку горизонтальной плоскости, определяемую координатами x, y, которые можно отождествить с точкой на карте и пересчитать из обычных географических координат.

[4] Порядок записи аргументов функций ϕ_j выбран именно таким, чтобы подчеркнуть, что они являются функциями z, которые зависят от x, y как от параметров (иными словами, это набор функций вертикальной переменной, который немного меняется при переходе от одной точки акватории к другой).

По этой причине акустическое поле в неоднородном волноводе, описываемое уравнением Гельмгольца (1.18), может быть представлено в виде разложения по (локальным) модовым функциям [73, 75]

$$P(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(x, y)\phi_j(z, x, y)\,, \tag{3.14}$$

где коэффициенты разложения $A_j(x, y)$ называются модовыми амплитудами. С точки зрения метода нормальных волн (модовой теории распространения звука в волноводе) задача расчета звукового поля, формируемого тональным источником (или тональной компоненты импульсного сигнала) в неоднородном волноводе, сводится к задаче вычисления модовых амплитуд $A_j(x, y)$. Уравнение для них будет получено в следующем разделе.

Заметим, что хотя формально для вычисления $P(x, y, z)$ по формуле (3.14) необходимо суммирование бесконечного ряда (по счетному множеству собственных функций $\phi_j(z, x, y)$), в практических расчетах мы всегда будем ограничиваться конечным числом мод N_m. Формально в этом случае акустическое поле в левой части равенства (3.14) приближается частичной суммой ряда в правой части. В дальнейшем мы всегда будем считать эту сумму конечной.

3.1.4. Уравнение горизонтальной рефракции и адиабатическое приближение

В этом разделе мы получим уравнение для модовых амплитуд $A_j(x, y)$ в представлении (3.14). С этой целью мы подставим это разложение в трехмерное уравнение Гельмгольца (1.18). После этого полученное равенство мы формально умножим на $\phi_j(z, x, y)$ в смысле скалярного произведения (3.3) (т.е. применим оператор $\int(\cdot)\frac{\phi_j(z,x,y)}{\rho(z,x,y}dz$). В результате получим соотношение [73]

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j}{\partial y^2} + k_j^2(x, y)A_j + \\ + \sum_{\ell} \mathcal{U}_{j\ell} A_\ell + 2\sum_{\ell} \mathcal{V}_{j\ell}\frac{\partial A_\ell}{\partial x} + 2\sum_{\ell} \mathcal{W}_{j\ell}\frac{\partial A_\ell}{\partial y} = -\delta(x)\delta(y)\phi_j(z_s, 0, 0)\,, \tag{3.15}$$

где элементы матриц $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ определяются формулами

$$\mathcal{U}_{j\ell}(x,y) = \int\limits_0^H \left(\frac{\partial^2 \phi_\ell}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_\ell}{\partial y^2} \right) \frac{\phi_j}{\rho} dz \,, \tag{3.16}$$

$$\mathcal{V}_{j\ell}(x,y) = \int\limits_0^H \frac{\partial \phi_\ell}{\partial x} \frac{\phi_j}{\rho} dz \,, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{W}_{j\ell}(x,y) = \int\limits_0^H \frac{\partial \phi_\ell}{\partial y} \frac{\phi_j}{\rho} dz \,. \tag{3.18}$$

В дальнейшем для сокращения записи мы будем полагать $\phi_j(z_s, 0, 0) = \phi_j(z_s)$ (т.е. опускать горизонтальные координаты точки расчета модовой функции в случае, когда речь идет о положении источника).

Матрицы $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ описывают перераспределение акустической энергии между модами при распространении звука. Как будет показано ниже, во многих ситуациях взаимодействием мод можно пренебречь, и в этом случае соответствующие суммы в уравнении (3.15) можно опустить. В результате получаем уравнение [3, 73]

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j}{\partial y^2} + k_j^2(x,y) A_j = -\delta(x)\delta(y)\phi_j(z_s) \,. \tag{3.19}$$

Это уравнение мы будем называть (адиабатическим) *уравнением горизонтальной рефракции* (термин соответствует англоязычному horizontal refraction equation из [73]). Описание поля в рамках модового представления (3.14), где амплитуды A_j вычисляются путем решения уравнения (3.19), предполагает, что перераспределением энергии между модами можно пренебречь (т.н. адиабатическое приближение).

Условия применимости этого приближения подробно обсуждались еще в классической работе [159]. Здесь мы не будем останавливаться на подробном воспроизведении изложенных там соображений и ограничимся замечанием следующего вида. Основным фактором, который может сделать адиабатическое приближение неприменимым, является т.н. резонансное взаимодействие мод.

Такое взаимодействие может стать результатом квазипериодического возмущения параметров среды, имеющего эффективное волновое число, близкое к разности волновых чисел k_j и k_ℓ двух различных мод. В практических задачах подводной акустики такая ситуация, как правило, не возникает. Более реалистичным и практически важным является случай резонансного взаимодействия мод, связанный с так называемой глубиной отсечки и подробно описанный в [105]. В этом случае может наблюдаться перекачка акустической энергии из водных мод в донные. Это происходит, если глубина моря уменьшается до некоторого критического значения (называемого глубиной отсечки), при котором количество водных мод уменьшается на единицу. Такая ситуация может возникнуть практически в любом волноводе мелкого моря с неоднородной батиметрией, причем интенсивность межмодового взаимодействия определяется углом наклона дна. Оценки влияния этого эффекта на интерференционную структуру акустического поля при очень больших углах наклона (от $5,7^\circ$ до нескольких десятков градусов) выполнены в работах [160–162]. Результаты проведенного в них моделирования показывают, что при таком наклоне дна адиабатическое приближение оказывается неприменимым. Кроме того, если дно является полностью отражающим (непроницаемым для акустических волн), в рассмотренных в [160] случаях наблюдается также и обратное рассеяние звука. Заметим, что в рамках данной диссертации мы будем иметь дело с волноводами, где дно является более пологим, чем в рассмотренных в [160, 161] примерах (также мы всегда будем использовать модель проницаемого дна). Выполненные в этой и последующих главах сравнения полученных нами решений с решеними, полученными другими методами (учитывающими взаимодействие мод), показывают, что в таких предположениях использование адиабатического приближения, как правило, оправданно.

Отметим еще работы [163, 164], где изучается взаимодействие мод, обусловленное случайными неоднородностями в водном слое.

Заметим, что с математической точки зрения уравнение (3.19) является двумерным уравнением Гельмгольца, которое имеет эллиптический тип и обычно должно решаться в безграничном пространстве. Краевая задача для него не содержит граничных условий, но подразумевает условие излучения на бесконечности, т.е. при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ (в этом случае задача будет корректной).

В заключение данного раздела отметим еще, что более строгий с математической точки зрения вывод уравнения горизонтальной рефракции, основанный на использовании операторного аналога разложения (3.14), представлен в недавней работе [165].

3.2. Лучевая теория для уравнения горизонтальной рефракции

В этом разделе мы вводим понятие *горизонтальный луч*, которое возникает при решение уравнения горизонтальной рефракции (3.19) с помощью лучевой теории, т.е. в высокочастотном приближении. Отметим, что высокочастотное приближение для (3.19) даже более адекватно, чем для (1.18), так как горизонтальные неоднородности акустических волноводов в океане почти всегда имеют существенно большие размеры, чем характерные длины волн, в то время как характерный размер волновода в вертикальном направлении зачастую сравним с длиной волны (так, например, для частоты звука 100 Гц при глубине моря 50 м длина волны укладывается на толщине водного слоя чуть более трех раз). На этом соображении основано представление поля, известное как “вертикальные моды и горизонтальные лучи”, впервые предложенное, по-видимому, Барриджем и Вайнбергом [3].

Эффективный показатель преломления, который определяет геометрию горизонтальных лучей, определяется зависимостью волнового числа $k_j(x, y)$ данной моды (т.е. моды, с которой ассоциирован веер лучей) от горизонтальных координат x, y. Введем некоторое отсчетное волновое число $k_{j,0}$ (обычно мы будем использовать значение волнового числа в окрестности источника, т.е.

положим $k_{j,0} = k_j(0,0)$). В данном разделе мы будем считать номер моды j фиксированным и для простоты опускать его в приведенных ниже формулах.

Следуя [73, 112] запишем лучевое приближение для решения (3.19) в виде

$$A(x,y) = M(x,y)\mathrm{e}^{ik_0 S(x,y)} + o(1/k_0)\,, \tag{3.20}$$

где $M(x,y)$ есть амплитуда нулевого порядка (первый член ряда, связанного с высокочастотной асимптотикой решения (3.14) при больших k_0), а $S(x,y)$ – фазовая функция). Тогда легко показать, что фаза S удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$(\partial_x S)^2 + (\partial_y S)^2 = n(x,y)\,, \tag{3.21}$$

где $n(x,y) \equiv k(x,y)/k_0$ – горизонтальный показатель преломления, связанный с данной модой.

После решения уравнения для фазовой функции (3.21) амплитуда M может быть найдена из уравнения переноса, имеющего вид

$$2(\partial_x S \partial_x M + \partial_y S \partial_y M) + (\partial_x^2 S + \partial_y^2 S)M = 0\,. \tag{3.22}$$

Уравнения (3.21) и (3.22) могут быть решены методом характеристик. Характеристические кривые определяются из следующей гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\ell} &= \frac{1}{n}\xi\,, \qquad & \frac{d\xi}{d\ell} &= \partial_x n\,, \\ \frac{dy}{d\ell} &= \frac{1}{n}\eta\,, \qquad & \frac{d\eta}{d\ell} &= \partial_y n\,, \end{aligned} \tag{3.23}$$

где ℓ есть натуральный параметр кривой (т.е. длина дуги характеристической кривой), а ξ, η суть переменные, сопряженные (x,y) (обобщенные импульсы).

Проекции характеристик, получаемых из системы (3.23), на (горизонтальную) координатную плоскость (x,y) называются горизонтальными лучами соответствующими вертикальной моде данного номера (той, для которой вычисляется модовая амплитуда $A = A_j$). Отметим, что вычисление модовых амплитуд с помощью лучевой теории было впервые осуществлено Барриджем и Вайнбергом [3]. В работе [106] Трофимов, Козицкий и Захаренко воспользовались с той же целью методом суммирования гауссовых пучков.

Семейство начальных условий для гамильтоновой системы (3.23) может быть задано в виде

$$\begin{aligned} x(0) = 0\,, \quad \xi(0) = \cos\alpha\,, \\ y(0) = 0\,, \quad \eta(0) = \sin\alpha\,. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Полученное в результате решения семейство характеристик (и, соответственно, горизонтальных лучей) оказывается, таким образом, параметризовано углами их выхода α относительно оси x в горизонтальной плоскости. Заметим, что (ℓ, α) локально задают систему криволинейных координат на плоскости xOy, называемых лучевыми координатами.

После решения системы (3.23) мы можем рассчитать значения фазы вдоль луча по формуле [73, 112]

$$S(\ell) = S(0) + \int\limits_0^\ell n(\ell)\, d\ell.$$

Амплитуда лучевой асимптотики решения $M(\ell)$ для случая $n = n(y)$ (в общем случае формулы лишь незначительно усложняются, см. [73]) может быть вычислена по формуле

$$M(\ell) = \frac{M_0}{n(\ell)} \sqrt{\frac{\cos\alpha}{\partial y(\ell,\alpha)/\partial\alpha}}\,, \tag{3.25}$$

где M_0 есть значение амплитуды на расстоянии 1м от источника.

Отметим еще, что в случае однородной по x, y среды (т.е. при $k_j(x, y) = k_{j,0} = const$, или $n \equiv 1$) горизонтальные лучи являются прямыми линиями, а решение амплитудного уравнения принимает исключительно простой вид

$$x(\ell) = \ell\cos\alpha\,, \quad y(\ell) = \ell\sin\alpha\,, \quad S(\ell) = \ell\,, \quad M(\ell) = \frac{M_0}{\sqrt{r}}\,, \tag{3.26}$$

где $M_0 = \mathrm{e}^{i\pi/4}/\sqrt{8\pi k_0}$ (нормировка для амплитуды M_0 выбрана таким образом, чтобы установить соответствие с фундаментальным решением уравнения Гельмгольца в однородной среде).

3.2.1. Связь горизонтальных лучей с проекциями трехмерных лучей

В этом разделе мы покажем, что проекции на горизонтальную плоскость трехмерных лучей уравнения Гельмгольца (1.18) (или волнового уравнения) с вертикальными углами выхода из источника φ_j, равными углам скольжения, ассоциированным с соответствующими вертикальными модами, представляют собой (двумерные) лучи для уравнений горизонтальной рефракции (3.19) (для соответствующих мод).

Углы распространения, связанные с вертикальными модами

Здесь мы коротко напомним о волновом векторе, ассоциированном с данной вертикальной модой, и соответствующих ему углах распространения относительно горизонтальной плоскости (угол скольжения) и вертикали.

Для простоты мы будем рассматривать случай полностью отражающего дна с условием Дирихле $p|_{z=h(x,y)} = 0$. Легко видеть, что в этом случае задача Штурма-Лиувилля (3.2) имеет решение вида

$$k_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 j^2}{h^2}\,, \tag{3.27}$$

$$\phi_j(z) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sin\left(\frac{\pi j z}{h}\right)\,. \tag{3.28}$$

Заметим, что зависимость волновых чисел k_j и модовых функций ϕ_j от горизонтальных координат в формулах (3.27) и (3.28) проявляется через функцию $h = h(x, y)$, описывающую рельф дна.

Поскольку мода представляет собой стоячую волну по z с волновым числом $\pi j/h$ и бегущую волну по x, y с волновым числом k_j, то с ней можно асооциировать угол скольжения

$$\varphi_j = \arccos(k_j c/\omega)\,, \tag{3.29}$$

так как волновое число в среде равно ω/c. В случае, когда скорость звука зависит от z, волновое число в среде также является переменной величиной (хотя k_j, разумеется, по-прежнему не зависит от z), и потому угол φ_j в соотношении (3.29) также становится функцией глубины, а само это равенство выражает закон Снеллиуса для трехмерных лучей в вертикальной плоскости.

Связь угла скольжения моды и первого инварианта Вестона

Основным предположением адиабатической модовой теории является сохранение “модовой идентичности” любой доли акустической энергии, излучаемой источником звука в волновод. Источник в своей окрестности порождает некоторый набор мод на глубине $h = h(0,0)$. Далее моды распространяются от источника, причем их вертикальные собственные функции “подстраиваются” под толщину водного слоя в данной точке акватории распространения $\phi_j = \phi_j(z,x,y)$ (зависимость от x, y – параметрическая). В случае идеально отражающего дна с условием Дирихле характер этих вариаций описывается равенством (3.28), подобная “подстройка” имеет место и в общем случае. При этом поле в каждой точке представляется в виде комбинации таких локальных мод (3.14).

В каждой точке ассоциированный с модой угол скольжения меняется сообразно условию (3.29), где $k_j = k_j(h) = k_j(x,y)$. Таким образом, как и в теории Вестона (см. предыдущую главу), получается, что угол $\varphi = \varphi(x,y)$ зависит только от глубины в данной точке:

$$\varphi = \varphi(h) = \arcsin(\pi j c/(h\omega))\,,$$

$$\sin\varphi = \frac{\pi j c}{h\omega}\,,$$

$$\frac{h\sin\varphi}{c} = \frac{\pi j}{\omega}\,.$$

Эта формула соответствует выражению для первого инварианта T Вестона (2.11) из предыдущей главы. И, таким образом, оказывается, что $T = \frac{\pi j}{\omega}$, т.е. фактически инвариант Вестона в однородном волноводе переменной глубины оказывается отношением номера моды к частоте звука.

Описанная здесь связь, в частности, указывает, что сохранение модовой идентичности определенных частей общей энергии акустического поля (т.е. привязка некоторой доли энергии к фиксированной моде) может быть объяснено тем, что эта энергия относится к одному и тому же вееру лучей с общим углом скольжения φ_0 на выходе из источника, распространяющему ее в горизонтальных направлениях (в зависимости от глубины в данной точке акватории (x, y) угол скольжения лучей из этого веера меняется согласно (2.11)).

Горизонтальные лучи и проекции трехмерных лучей

Первый инвариант Вестона, как мы видели выше, позволяет установить связь между модой и веером трехмерных лучей с некоторым общим вертикальным углом выхода из источника φ (углом скольжения). Эта связь, однако, может быть распространена и на индивидуальные лучи из этого веера. Более точно, проекция луча с углом скольжения на выходе из источника, равным углу скольжения данной (j-ой) моды и горизонтальным углом θ_0 совпадает с горизонтальным лучом, определяемым системой (3.23), с начальным условием (3.24), где $\alpha = \theta_0$.

Будем предполагать для простоты, мы имеем дело с волноводом мелкого моря, где изобаты ориентированы вдоль оси x (локально будем считать их прямыми), а скорость звука $c = c(y)$ в водном слое не зависит от z.[5] Тогда для горизонтальных лучей, определяемых системой Гамильтона (3.23), будет выполняться закон Снеллиуса

$$k_j(y) \cos\theta(y) = k_{j,0} \cos\theta_0 = const\,. \tag{3.30}$$

[5] Обсуждаемое соответствие можно установить и в общем случае, однако мы не будем здесь рассматривать этот вопрос подробно.

С другой стороны, из (2.12) (второй инвариант Вестона) следует, что для проекции соответствующего трехмерного луча выполняется соотношение

$$\frac{\cos\theta(y)\cos\varphi(y)}{c(y)} = \frac{\cos\theta_0\cos\varphi_0}{c(0)} = const\,. \tag{3.31}$$

Остается заметить, что угол φ связан с горизонтальным волновым числом соотношением

$$\frac{\cos\varphi(y)}{c(y)} = \frac{k_j(y)}{\omega}\,.$$

Таким образом, непосредственно видно, что уравнения (3.30) и (3.31) задают одну и ту же кривую в плоскости xOy.

3.3. Модовая структура решения уравнения горизонтальной рефракции: мелкое море с подводным каньоном

В этом разделе рассматривается пример волновода мелкого моря, для которого уравнение горизонтальной рефракции (3.19) допускает явное решение (по крайней мере в дальнем поле). Мы будем решать задачу расчета звукового поля, возбуждаемого точечным источником звука в мелком море с неоднородностью батиметрии в виде подводного каньона. В этом случае уравнение поверхности раздела вода-дно имеет вид $z = h(x,y)$, где

$$h(x,y) = h_0 + h_1(y) = h_0 + \Delta h F(\sigma y) = h_0 + \frac{\Delta h}{\mathrm{ch}^2(\sigma y)}\,. \tag{3.32}$$

Такой волновод схематично изображен на Рис. 3.1. Эта задача была решена нами в работе [45], и в ходе дальнейшего изложения мы будем в основном придерживаться принятых в ней обозначений (с небольшими изменениями, необходимыми для согласования с другими главами настоящей диссертации).

Для простоты будем полагать, что в водном слое скорость звука и плотность постоянны и равны c_w и ρ_w, в то время как соответствующие параметры в дне принимают значения c_b и ρ_b (как обычно, мы предполагаем, что $c_w < c_b$). Отметим, что данное ограничение не является существенным, и, как будет видно из построения, рассматриваемый здесь метод применим и в случае произвольной зависимости скорости звука от глубины (однако существенно, что от горизонтальных переменных в нашем волноводе зависит только глубина моря).

Будем предполагать, что точечный тональный источник с частотой f расположен в точке $x = 0$, $y = y_s$, $z = z_s$. Главным образом нас будет интересовать распространение звука в направлении оси x (оси симметрии каньона), так как именно в этом случае можно ожидать проявления трехмерных эффектов, связанных с горизонтальной рефракцией звука, обусловленной неоднородностью дна. Вообще говоря, дальнейшие рассуждения неявным образом основаны на предположении о том, что возмущение глубины моря Δh мало по сравнению с h_0 (т.е. $\Delta h \ll h_0$), а также о том, что $\sigma\lambda \ll 1$ (глубина медленно меняется по y).[6] Нашей задачей будет исследование трехмерной интерференционной

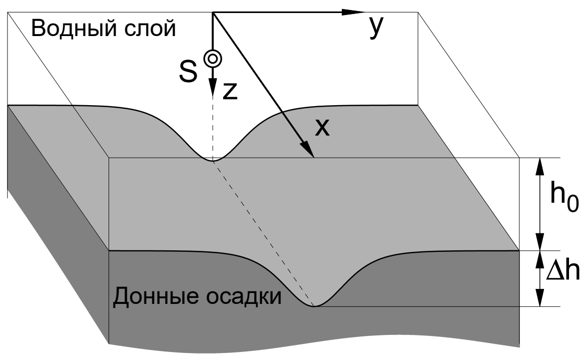


Рис. 3.1. Трехмерный волновод мелкого моря с подводным каньоном. Каньон ориентирован вдоль оси x. Точечный источник звука S расположен в точке $x = 0$, $y = 0$, $z = z_s$.

структуры звукового поля $P(x, y, z)$ в дальнем поле от источника звука.

[6] Здесь λ – длина волны звука, а σ – параметр, обратный ширине каньона. Соотношение $\sigma\lambda \ll 1$ в точности означает, что эта ширина много больше длины волны звука. Заметим, что указанные условия по существу и обеспечивают применимость адиабатического приближения.

3.3.1. Уравнения для модовых амплитуд

В данной задаче мы будем использовать модовое представление звукового поля $P(x, y, z)$:

$$P \approx \sum_{j=1}^{N_m} A_j(x, y)\phi_j(z, x, y)\,,$$

и сразу же запишем уравнения горизонтальной рефракции (3.19) для модовых амплитуд $A_j(x, y)$, воспользовавшись приближенной формулой (3.13) для линеаризации $k_j^2(x, y)$ по вариациям глубины

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j}{\partial y^2} + k_{j,0}^2 A_j + \frac{D}{\mathrm{ch}^2(\sigma y)} A_j = -\delta(x)\delta(y - y_s)\phi_j(z_s)\,, \tag{3.33}$$

где константа D может быть вычислена через волновые числа и модовые функции для волновода постоянной глубины $h(x, y) = h_0$ (волновода сравнения).

$$D = \Delta h(\phi_j(h_0^+))^2 \left[\frac{1}{\rho(h_0^+)} \left(k_j^2 - \frac{\omega^2}{\left(c(h_0^+)\right)^2} \right) - \frac{1}{\rho(h_0^-)} \left(k_j^2 - \frac{\omega^2}{\left(c(h_0^-)\right)^2} \right) \right] \\ - \Delta h \left(\frac{1}{\rho(h_0^+)} \frac{d\phi_j}{dz}(h_0^+) \right)^2 \left[\rho(h_0^+) - \rho(h_0^-) \right]\,. \tag{3.34}$$

Заметим, что с физической точки зрения уравнение (3.33) значительно лучше проясняет связь между параметрами среды (рельефом дна) и горизонтальной рефракцией звука, чем уравнение (3.19), где неоднородности волновода "зашиты" в вариациях волновых чисел.

3.3.2. Исследование уравнения горизонтальной рефракции методом разделения переменных

Здесь мы сделаем еще одно упрощение (принципиально несущественное), предположив, что соотношение частоты звука и глубины таково, что в нашем волноводе возбуждается всего одна водная мода. Таким образом, вдали от источника звуковое поле будет состоять из всего одной модальной компоненты $A_1(x, y)$.

Так как коэффициенты уравнения (3.33) зависят только от поперечной переменной y, то это уравнение может быть решено с помощью метода разделения переменных (метода Фурье). Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера вида

$$\psi_{yy} + \frac{D}{\operatorname{ch}^2(\sigma y)}\psi = \lambda\psi\,. \tag{3.35}$$

Это уравнение определяет спектральную задачу для определения энергетических уровней λ и соответствующих им волновых функций $\psi_\lambda(y)$. Вдали от источника (для достаточно больших x) звуковое поле будет, очевидно, определяться связанными состояниями данной системы, т.е. функциями дискретного спектра задачи Штурма-Лиувилля для уравнения (3.35). Таким образом, компоненту решения уравнения (3.33), соответствующую энергии звукового поля, сфокусированной над каньоном,[7] можно представить в виде комбинации собственных функций дискретного спектра задачи (3.35)

$$A_1 = \sum_{m=1}^{K_m} q_{1,m}(x)\psi_{1,\lambda_m}(y)\,. \tag{3.36}$$

В этом уравнении $\psi_{1,\lambda_m}(y)$ суть собственные функции дискретного спектра задачи (3.35), соответствующие собственным значениями λ_m, $m = 0, 1, 2, \ldots, K_m$ (из дальнейшего будет ясно, почему нумерацию функций удобно начать с нуля), а $K_m + 1$ – общее число таких функций.[8] В дальнейшем мы для краткости иногда будем опускать первый нижний индекс у функций ψ_{1,λ_m}, соответствующий номеру вертикальной моды.

Здесь уместно обратить внимание на схожесть представления модовой амплитуды в виде разложения по собственным функциями дискретного спектра задачи Штурма-Лиувилля для уравнения (3.35) и представления акустического поля в каждом сечении волновода в виде модового разложения по собственным функциям дискретного спектра задачи (3.2). В обоих случаях мы пренебрега-

[7] Используя квантовомеханическую аналогию, которая обоснована видом уравнения (3.35), можно сказать, что часть энергии поля захвачена каньоном.

[8] Собственные функции дискретного спектра удовлетворяют условию $\psi_{1,\lambda_m}(y) \to 0$ при $|y| \to \infty$.

ем непрерывным спектром, так как соответствующие компоненты поля быстро убывают при удалении от источника в связи с расходимостью. Таким образом, в дальнем (на достаточно большом расстоянии от излучателя) поле мы будем фиксировать только те волны, которые захвачены вертикальным волноводом, формирующимся благодаря отражениям звука от дна и поверхности, а также волноводом в горизонтальной плоскости, формирование которого обусловлено эффектом горизонтальной рефракции на неоднородном дне. Можно сказать, что каждая компонента звукового поля, соответствующая некоторой фиксированной вертикальной моде, также имеет модовую структуру (3.36) в горизонтальной плоскости. Можно сказать, это собственные функции дискретного спектра задачи Штурма-Лиувилля (3.35) соответствуют *горизонтальным модам, захваченным подводным каньоном.*

Решение уравнения (3.35) получено, в частности, в книге [166].[9] Оно выражается через гипергеометрическую функцию ${}_2F_1(c, a, b, y)$ (см., например, [167]):

$$\psi_\lambda(y) = \frac{1}{Q}(\mathrm{ch}(\sigma y))^{-\kappa}{}_2F_1(\kappa - s, \kappa + s + 1, \kappa + 1, (1 - \tanh(\sigma y))/2)\,, \qquad (3.37)$$

где

$$s = \frac{\sqrt{1 + \frac{4\Delta H B_{11}}{\sigma^2}} - 1}{2}\,, \quad \kappa = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sigma}\,. \qquad (3.38)$$

Это решение убывает на бесконечности в том и только том случае, когда $\kappa - s = -m$ – неположительное целое число (возможно, ноль). Таким образом, условие

$$\kappa_m = s - m > 0 \qquad (3.39)$$

определяет конечное число $K_m + 1$ собственных значений дискретного спектра $\lambda_m = \sigma^2\kappa_m^2$. При этом, очевидно, K_m равно целой части положительного числа s.

[9] В учебнике [166] уравнение (3.35) используется как пример квантовой системы с потенциальной ямой конечной глубины.

Коэффициент нормировки Q мы выбираем таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^2_{\lambda_m}(y)dy = 1\,.$$

Заметим, что гипергеометрическая функция ${}_2F_1(-m,a,b,y)$ обращается в полином $P^{a,b}_m(y)$ для целых значений m [167]. Для полноты изложения мы приводим здесь полиномы, соответствующие малым номерам m (те, что фактически будут использованы нами для вычислений)

Таблица 3.1. Многочлены $P^{a,b}_m(z) = {}_2F_1(-m,a,b,z)$ для $m = 0,1,2,3$

m	0	1	2	3
$P^{a,b}_m(z)$	1	$1-\frac{a}{b}z$	$1-2\frac{a}{b}z+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}z^2$	$1-3\frac{a}{b}z+3\frac{a(a+1)}{b(b+1)}z^2-\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}z^3$

Интересно также отметить, что коэффициент нормировки Q_m для каждой собственной функции $\psi_{\lambda_m}(y)$, как легко видеть из следующего соотношения, может быть выражен через гамма-функцию,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{ch}(\sigma y))^{-2\kappa}(\tanh(\sigma y))^n dy = \frac{1}{\sigma}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\kappa)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\kappa\right)}\,, \tag{3.40}$$

где n есть четное целое число (для нечетных n эти интегралы равны нулю).

Следующий шаг метода Фурье (разделения переменных) в нашей задаче состоит в решении уравнения для $q_{1,m}(x)$, определяющего зависимость решения от x. Стандартным способом легко показать, что это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 q_{1,m}}{dx^2} + (\lambda_m + k^2_{1,0})q_{1,m} = -\delta(x)\psi_{1,\lambda_m}(y_s)\phi_1(z_s)\,. \tag{3.41}$$

Заметим, что в последнем равенстве мы вернули функциям ψ_{1,λ_m} первый индекс, указывающий на номер вертикальной моды. Легко получить его решение

$$q_{1,m}(x) = \frac{i}{2\sqrt{k^2_{1,0}+\lambda_m}}\psi_{1,\lambda_m}(y_s)\phi_1(z_s)\exp\left(i\sqrt{k^2_{1,0}+\lambda_m}|x|\right)\,, \tag{3.42}$$

где $\phi_1 = \phi_1(z_s)$ – модовая функция, рассчитанная в точке расположения источника звука.

Таким образом, конечная формула для расчета трехмерного звукового поля $P(x, y, z)$ в нашей задаче будет иметь вид

$$P(x, y, z) \approx \phi_1(z, x, y) \sum_{m=1}^{K_m} q_{1,m}(x)\psi_{1,\lambda_m}(y)\,, \tag{3.43}$$

где функции $q_{1,m}(x)$ и $\psi_{1,\lambda_m}(y)$ определяются уравнениями (3.42) и (3.37) (разумеется, фактически при расчетах мы будем использовать полиномы, к которым редуцируется гипергеометрическая функция, см. Таблицу 3.1).

3.3.3. Пример расчета звукового поля в мелком море с подводным каньоном

Зафиксируем теперь следующие параметры волновода:

1. скорости звука в воде и дне будем считать постоянными и равными $c_w = 1500$ м/с, $c_b = 1700$ м/с соответственно;

2. значения плотности в воде и дне примем равными $\rho_w = 1$ г/см^3, $\rho_w = 1,7$ г/см^3;

3. невозмущенное значение глубины положим $h_0 = 50$ м (глубина вдали от оси каньона).

Будем считать, что источник звука находится на глубине $z_s = 10$ м, а его частота равна $f = 40$ Гц. Для этих значений параметров среды и источника для всех значений x, y имеется только одна (вертикальная) водная мода, для которой невозмущенное волновое число равно $k_{1,0} \approx 0,16129768$ м$^{-1}$.[10] Для расчетов

[10] Для простоты будем считать, что толщина донного слоя H велика по сравнению с h_0 и использовать формулы для волновода Пекериса из раздела (3.1.1). Разумеется, это никак не ограничивает общность формул из предыдущего раздела.

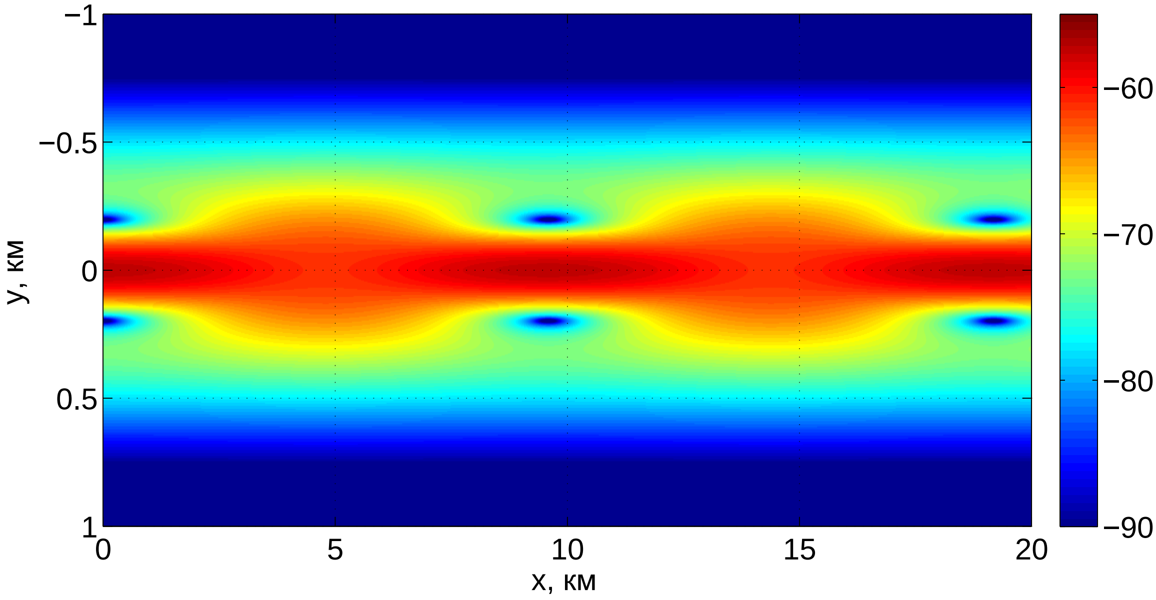
будем использовать следующие параметры каньона: глубина $\Delta h = 5$ м, параметр, задающий ширину: $\sigma = 0,005$ м$^{-1}$ (ширину каньона можно грубо оценить по формуле $2\sqrt{2}/\sigma \approx 550$ м).

Мы рассчитали акустическое поле $P(x, y, z_s)$ (точнее, его компоненту, сфокусированную каньоном) в дБ отн. 1 м на глубине $z = z_s = 10$ м в области $0 \le x \le 20$ км, -1 км $\le y \le 1$ км для двух положений источника относительно каньона: $y_s = 0$ (непосредственно над его осью) и $y_s = 300$ м (на некотором удалении от нее). Результаты расчетов показаны на Рис. 3.2.

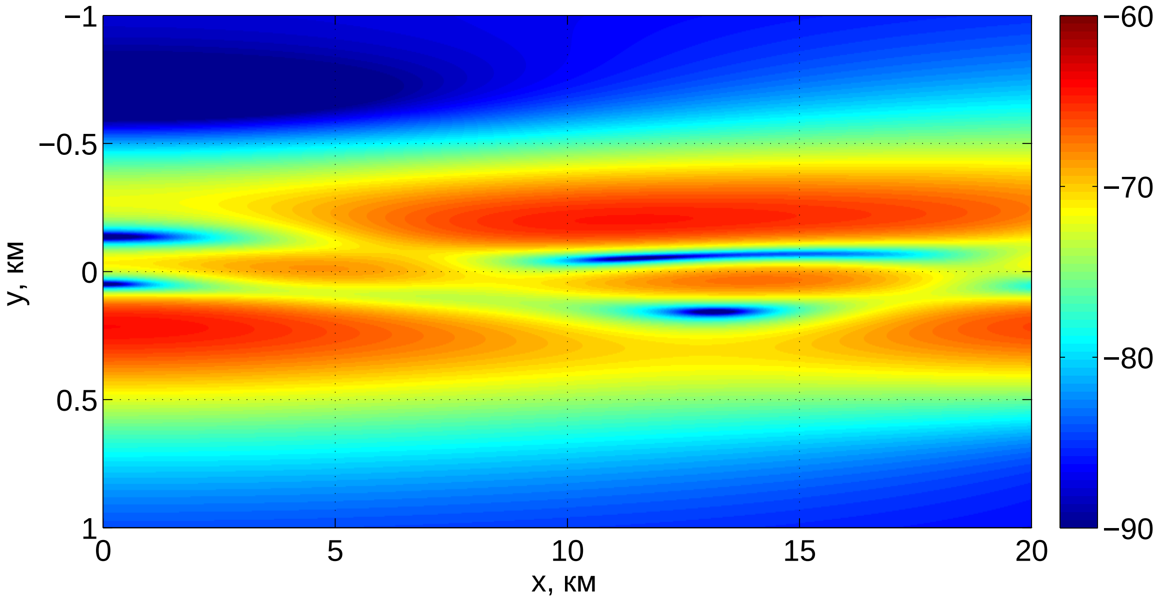
Еще раз подчеркнем, что мы пренебрегаем непрерывным спектром задачи (3.35), и следовательно наши расчеты дают адекватное представление об интерференционной структуре звукового поля только на больших расстояниях от источника (в данном случае это расстояние можно оценить как $10 \cdot 2\pi/k_{1,0} \sim 400$ м). В данном случае дискретный спектр задачи Штурма-Лиувилля для уравнения (3.35) состоит всего из четырех собственных значений λ_m. Заметим, что, поскольку собственные функции $\psi_{1,\lambda_1}(y)$ и $\psi_{1,\lambda_3}(y)$ являются нечетными, соответствующие им волны не возбуждаются в случае, когда $y_s = 0$. Таким образом, на Рис. 3.2(а) мы наблюдаем лишь интерференцию захваченных каньоном горизонтальных мод $\psi_{1,\lambda_0}(y)$ и $\psi_{1,\lambda_2}(y)$, в то время как интерференционная картина на Рис. 3.2(б) всеми четырьмя горизонтальными модами дискретного спектра.

3.3.4. Обсуждение результатов

Рассмотренный здесь пример волновода мелкого моря с неоднородностью дна в виде подводного каньона является исключительно простым, что и позволяет почти полностью исследовать его аналитически. Тем не менее, полученное нами решение иллюстрирует важный физический эффект, заключающийся в формировании модовой интерференционной структуры акустического поля в горизонтальной плоскости и обусловленный горизонтальной рефракцией звука. Разумеется, выражения для горизонтальных модовых функций, а также их



(*а*) $y_s = 0$



(*б*) $y_s = 300$ м

Рис. 3.2. Акустическое поле $TL(x, y, z = z_s)$ на глубине источника $z = z_s$, вычисленное по формуле (3.43) для $y_s = 0$ (а) и $y_s = 300$ м (б).

число будут зависеть от формы сечения каньона, и в общем случае их нельзя рассчитать аналитически. В этом случае задача (3.35) может быть решена численно или, например, с помощью метода ВКБ. Также очевидно, что форма сечения реальных подводных каньонов в океане, вообще говоря, зависит от x, и в более реалистичных постановках этой задачи нельзя ожидать разделения переменных, хотя можно ожидать, что достаточно точное описание захваченной каньоном компонеты поля может быть получено с помощью адиабатического приближения для горизонтальных мод и метода поперечных сечений.

Отметим еще, что потенциальная яма, описываемая (3.35) такова, что для нее в любом случае (при любых параметрах каньона) существует по крайней мере одна собственная функция дискретного спектра. Разумеется, эта функция может иметь очень большую "полуширину", однако в дальнем поле именно она будет определять характер распространения звука вдоль оси каньона. Этот факт имеет большое значение для волноводов, допускающих распространение нескольких вертикальных мод. Разумеется, все результаты этого раздела обобщаются на такой случай без каких-либо принципиальных изменений: необходимо лишь добавить еще одно внешнее суммирование в формуле для звукового поля (3.43) (по номеру вертикальной моды j). При этом наиболее благоприятные условия для формирования горизонтальных мод каньона обеспечиваются водными вертикальными модами наивысших номеров. Элементарные расчеты показывают, что для вертикальных мод низших номеров (при многомодовом характере распространения) будет существовать единственная горизонтальная мода каньона – нулевая. Таким образом, в этом случае фактически нужно говорить не о горизонтальной модовой структуре поля, а лишь о некоторой фокусировке акустической энергии.

Еще раз подчеркнем, что рассчитанная нами компонента поля (см. форулу (3.43)) не является решением трехмерного уравнения Гельмгольца (1.15), поскольку не включает в себя волны с цилиндрической расходимостью фронта, соответствующие непрерывному спектру (3.35). Формула (3.43) лишь представление о том, как будет устроено решение вдали от источника, где вклад таких волн будет незначительным.

Как было отмечено выше, фактически основные границы применимости полученного нами решения определяются адиабатическим приближением. Сравнение результатов наших расчетов с результатами расчетов, сделанными с учетом взаимодействия мод, выполнено авторами работы [105]. Данное сравнение показало, что в дальнем поле (при $x > 1$ км), где вклад расходящейся компоненты решения уравнения горизонтальной рефракции пренебрежимо мал, формула (3.35) дает практически точный результат.

3.4. Модовая структура решения уравнения горизонтальной рефракции: волны шепчущей галереи в окрестности криволинейной изобаты

Как было отмечено ранее, наиболее употребительной простой моделью геоакустического волновода, на примере которой исследуются трехмерные эффекты распространения звука, является прибрежный клин (см. предыдущие главы, а также работы [15, 47, 51, 74, 168, 169]), где скорость звука может зависеть от глубины и/или горизонтальных переменных. Так или иначе, в клиновидном волноводе изобаты образуют семейство прямых, параллельных друг другу, а также ребру клина. В данном разделе мы рассмотрим модель волновода, некоторым образом аналогичную клину, однако изобаты в нашем случае будут представлять собой концентрические окружности (в каком-то смысле рассмотренный ниже волновод можно назвать “криволинейным клином”). Участки акваторий с таким рельефом дна повсеместно встречаются в различных районах Мирового Океана, в частности в округлых бухтах, заливах и лагунах (также подобная структура изобат является обычной для озер).

Для моделирования распространения звука на таких акваториях мы вновь воспользуемся представлением звукового поля в виде суперпозиции (локальных) модовых функций, коэффициенты которых определяются из уравнений горизонтальной рефракции типа (3.19). Мы покажем, что в этом случае уравнение (3.19) имеет решения специального вида, локализованные в окрестности криволинейных изобат – (*волны шепчущей галереи*).

Теория волн шепчущей галереи (ШГ) берет свое начало в архитектурной акустике [170, 171]. Во всей полноте и строгости соответствующие вопросы рассмотрены в фундаментальной монографии [172]. Некоторые примеры волн ШГ обсуждались и в работах по подоводной акустике [142, 173], также эти волны играют важную роль в оптике и физике лазеров. В последнем случае, например, принципы формирования волн ШГ используются для создания диэлектрических микрорезонаторов сверхвысокой добротности Q [174–176]. Отметим, что в серии работ [168, 169, 173] волны ШГ формируются в вертикальной плоскости в результате комбинации факторов, связанных с рельефом дна и неоднородностями скорости звука. В статьях [141, 142] эффект ШГ связан с горизонтальной рефракцией звука на двух искривленных фронтах нелинейных внутренних волн, и, таким образом, волны ШГ, рассмотренные авторами, локализованы в горизонтальной плоскости именно в непосредственной близости от этих фронтов. Интересно отметить, что аналог волн шепчущей галереи имеется и в теории поверхностных волн на воде [177–180]. Характер влияния батиметрии на фазовую скорость волн в этом случае, однако, таков, что аналог шепчущей галереи формируется вблизи отмелей, банок и островов.

В данном разделе показано, что волны шепчущей галереи могут существовать в волноводе мелкого моря при определенных реалистичных условиях. Более точно, мы покажем, что такие волны могут быть локализованы в окрестности криволиненой изобаты, и их образование является по своей сути специфическим проявлением эффекта горизонтальной рефракции (необходимое условие – вектор кривизны изобат и вектор градиента глубины имеют одинаковое направление), однако, в отличие от [142] это вызвано исключительно батиметрическими неоднородностями (наклонное дно с изогнутыми изобатами). Мы рассмотрим простые геометроакустические критерии образования таких волн ШГ, а также оценим их интенсивность и времена прихода. Также нами исследована интерференционная структура поля, формируемого волнами шепчущей галереи, и вычислены соответствующие им радиальные моды в горизонтальной плоскости. В этом разделе также обсуждается и возможность экспериментального наблюдения волн ШГ, формируемых в результате горизонтальной рефракции звука на акватории, где изобаты имеют форму дуг концентрических окружностей.

3.4.1. Уравнение горизонтальной рефракции в мелком море с криволинейными изобатами

Рассмотрим волновод мелкого моря, обладающий вращательной симметрией в некотором круговом секторе горизонтальной плоскости, где изобаты имеют форму дуг концентрических окружностей (см. Рис. 3.3). Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) таким образом, чтобы ее ось совпадала с осью вращательной симметрии волновода (т.е. с вертикальной прямой, проходящей через общий центр кривизны всех изобат), которой и будем пользоваться до конца этой главы (разумеется, координата z как и прежде будет означать глубину). Из того, что волновод имеет (локальную) вращательную симметрию, следует, что внутри некоторого сектора $\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max}$ глубина моря h не зависит от угловой координаты θ (далее для краткости мы иногда называем ее азимутом).

В рассматриваемом геоакустическом волноводе батиметрия задается функцией $z = h(r)$, которую мы считаем монотонно убывающей по радиальной переменной r (таким образом, $h(r) \geq h(r')$ для $r < r'$). Акватория с такой формой дна может быть частью бухты или лагуны, где изобаты можно считать дугами концентрических окружностей. Заметим, что участки дна с таким рельефом можно найти практически в любом районе Мирового Океана.

Для простоты предположим, что функция $h(r)$ постоянна вне некоторого конечного интервала $[r_1, r_2]$, т.е. положим $h(r) = h_1 = const$ для $r \leq r_1$ и $h(r) = h_2 = const$ для $r \geq r_2$ (см. Рис. 3.3). В частности, возможен случай, когда $h_2 = 0$ (в этом случае дуга $r = r_2$ есть часть береговой линии).

Здесь мы исследуем возможность формирования волн, локализованных в

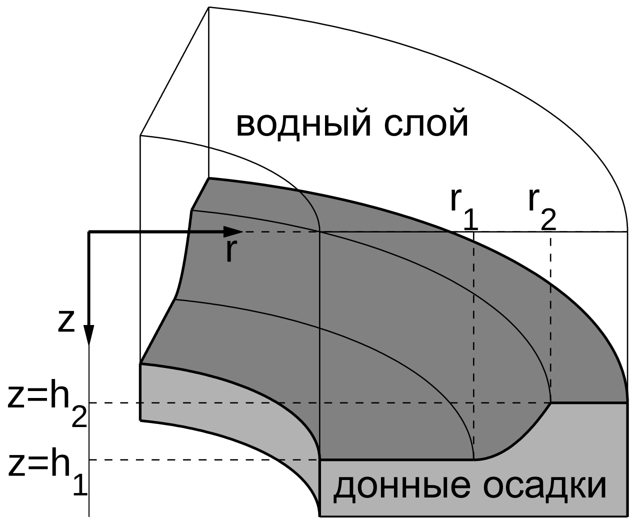


Рис. 3.3. Волновод мелкого моря с изобатами, имеющими форму дуг концентрических окружностей.

окрестности криволинейных изобат (волн ШГ). Отметим, что условие, согласно которому глубина постоянна вне интервала $r_1 \leq r \leq r_2$, необходимо для упрощения постановки граничных условий и совершенно не ограничивает общность рассмотрения, так как оно посвящено волнам, локализованным в узком секторе кольца в горизонтальной плоскости, содержащего часть семейства криволинейных изобат.

В этой задаче звуковое поле $P(r, \theta, z)$, формируемое точечным источником звука, который мы будем считать расположенным в точке $r = r_s$, $\theta_s = 0$, $z = z_s$ рассматриваемого волновода удовлетворяет трехмерному уравнению Гельмгольца в цилиндрических координатах [74, 75]

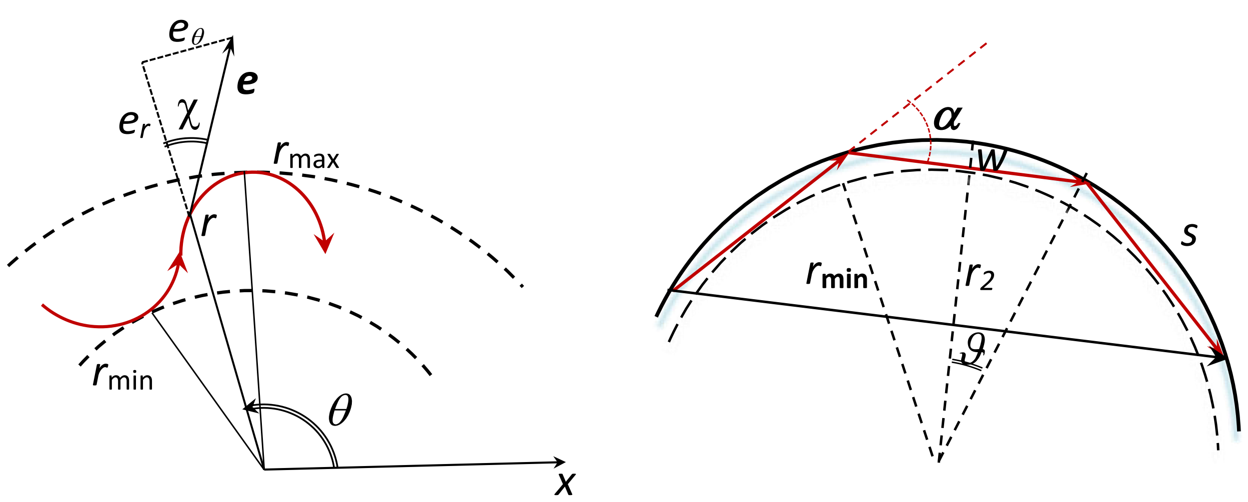
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}P = -\frac{\delta(r - r_s, \theta, z - z_s)}{r}\,. \tag{3.44}$$

Набор граничных и интерфейсных условий для (3.44) является точно таким же, как для трехмерного уравнения Гельмгольца в декартовых координатах (см. главу 1).

Как и в прошлом разделе, мы воспользуемся представлением звукового поля в виде разложения по локальным собственным функциям акустической спектральной задачи

$$P(x,y,z) = \sum_{j=1}^{N_m} A_j(r,\theta)\phi_j(r,z)\,. \qquad (3.45)$$

Заметим, что вследствие вращательной симметрии волновода модовые функции $\phi_j(r,z)$, а также соответствующие им горизонтальные волновые числа $k_j(r)$ зависят только от радиальной переменной r.



(*а*) $h(r)$ задано (3.57) (*б*) $h(r)$ задано (3.56)

Рис. 3.4. Схема горизонтальных лучей, соответствующих волнам шепчущей галереи в случае, когда батиметрия описывается непрерывной кусочно-линейной функцией (3.57) (а) и кусочно-постоянной функцией (3.56) (б). Лучи изображены сплошными жирными линиями, а каустики, формируемые их точками заворота, нарисованы жирным пунктиром.

Здесь, как и в прошлом разделе, мы пренебрегаем эффектами, связанными с взаимодействием мод (что в данном случае оправдано тем, что мы рассматриваем тип поля, в котором волны распространяются вдоль изобаты). Как было показано в предыдущих разделах, в этом случае модовые амплитуды $A_j(r,\theta)$ в разложении (3.45) удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца в эффективной радиально-стратифицированной среде (уравнению горизонтальной рефракции)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_j}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_j}{\partial \theta^2} + k_j^2 A_j = -\frac{\delta(r-r_s)\delta(\theta)\phi_j(z_s)}{r\rho(z_s)}\,. \qquad (3.46)$$

Заметим, что радиальная стратификация среды определяется зависимостью единственного коэффициента уравнения – $k_j = k_j(r)$ от радиальной переменной r. В данном случае уравнение горизонтальной рефракции фактически задано в полярных координатах в горизонтальной плоскости. Разумеется, уравнение (3.46) как и прежде должно быть дополнено условиями излучения при $r \to \infty$. Заметим, что нас будут интересовать решения в виде бегущих волн по угловой переменной θ, поэтому мы также будем предполагать, что на границах рассматриваемого нами сектора решение будет состоять лишь из волн, бегущих по направлению от источника.

Отметим еще раз, что адиабатические уравнения для модовых амплитуд (3.46) достаточно точно описывают распространение звука, если вариации параметров среды являются малыми на масштабах порядка горизонтальной длины волны, а также если количество водных мод $k_j(r)$ является постоянным для всех значений r в области рассмотрения [159] (другими словами, если в области не происходит отсечки мод в связи с вариациями глубины $h(r)$).

3.4.2. Рассмотрение вопроса о формировании шепчущей галереи в рамках теории горизонтальных лучей

Шепчущая галерея может сформироваться благодаря горизонтальной рефракции волн, излученных источником в более глубокой части волновода, показанного на Рис. 3.3. Для волн, распространяющихся под малыми углами к касательным к изобатам во внешнем направлении (т.е. в направлении увеличения r) горизонтальная рефракция может проявиться следующим образом. При некотором значении $r = r_{\max}$ они могут повернуть назад и начать движение в обратном направлении (см. схему на Рис. 3.4), подобно тому, как это происходило с волнами, распространяющимися вверх по клину (т.е. в направлении ребра – береговой линии), рассмотренными в предыдущей главе диссертации. Ввиду кривизны изобат, однако, повернувшая, но все еще движущаяся под малым углом к касательной волна в некоторый момент может снова оказаться движущейся во внешнем направлении из-за того, что направление наклона дна меняется быстрее, чем угол между волновым вектором и касательной. Наклонный участок дна как бы "забегает вперед" и вновь оказывается перед волной.

Количественное описание этого эффекта может быть получено с помощью теории вертикальных мод и горизонтальных лучей [3] (см. раздел 3.2 данной главы). В данном случае особенно удобно применять теорию горизонтальных лучей, если записать их уравнения в полярной системе координат для радиально-стратифицированной среды [112] (фактически, мы перепишем здесь все уравнения раздела 3.2 в полярных координатах, учитывая симметрию задачи).

Отметим, что в этом разделе всякий раз будут рассматриваться горизонтальные лучи, соответствующие некоторой фиксированной вертикальной моде. По этой причине мы будем обычно опускать номер моды (нижний индекс j) во всех формулах, где это не вызовет путаницы.

В полярных координатах геометроакустическое приближение для решения уравнения (3.46) имеет вид

$$A(r,\theta) = M(r,\theta)\mathrm{e}^{ik_0 S(r,\theta)}\,, \tag{3.47}$$

где эйконал $S(r,\theta)$, как и прежде, удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$(\nabla_\perp S)^2 - (n(r))^2 = 0\,, \tag{3.48}$$

где $\nabla_\perp = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$ – горизонтальная компонента оператора ∇ (градиента), а $n(r)$ есть показатель преломления для горизонтальных лучей данной вертикальной моды, определяемый соотношением

$$n(r) = k(r)/k_0\,. \tag{3.49}$$

Напомним, что в уравнениях, записанных выше, k_0 есть некоторое отсчетное (типичное) горизонтальное значение волнового числа в рассматриваемой области.

Эйконал $S(r,\theta)$ в нашем случае может быть найден из уравнения (3.48)) с помощью метода разделения переменных [112]:

$$S(r,\theta) = \pm \int \sqrt{n^2 - \frac{\mu^2}{r^2}} dr \pm \mu\theta \,,$$

где μ – переменная разделения, имеющая размерности длины.

Рассмотрим теперь уравнения для горизонтальных лучей в радиально-стратифицированной двумерной среде. Введем безразмерный вектор $\bar{e} = \nabla_{\perp} S$ с полярными компонентами e_r и e_θ (см. Рис. 3.4(a)). В этих обозначениях уравнения для характеристик задачи могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= e_r \,, & \frac{de_r}{d\tau} &= n\frac{dn}{dr} + \frac{1}{r}e_\theta^2 \,, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{1}{r}e_\theta \,, & \frac{de_\theta}{d\tau} &= -\frac{1}{r}e_r e_\theta \,, \end{aligned} \tag{3.50}$$

где τ – длина дуги вдоль луча (натуральный параметр кривой).

Из уравнений (3.50) следует, что $\frac{d(re_\theta)}{d\tau} = 0$, и, значит, $re_\theta = \mathrm{const} = \sigma$. Это равенство представляет собой закон Снеллиуса для радиально-стратифицированной среды, который можно переписать в виде

$$rn(r)\sin(\chi(r)) = \mathrm{const} = \sigma \,. \tag{3.51}$$

где χ – угол между вектором $\bar{e}$ и радиальной линией, соединяющей данную точку и центр кривизны изобат (значения χ мы всегда считаем положительными). Отсюда непосредственно видно, что траектория горизонтального луча имеет следующий вид

$$\theta = \theta(r) = \int \frac{\sigma}{r\sqrt{n^2r^2 - \sigma^2}} dr \,. \tag{3.52}$$

Таким образом, для фиксированной вертикальной моды траектории соответствующих ей горизонтальных лучей определяются показателем преломления $rn(r)$ эффективной радиально-стратифицированной среды (или, что то же самое, функцией $rk(r)$, принимающей безразмерные значения).

Отметим еще следующий интересный факт. Из работы Харрисона [2] известно, что аналогом второго инварианта Вестона в случае, когда изобаты являются дугами окружностей, является следующая величина, сохраняющаяся вдоль любого фиксированного трехмерного луча, распространяющегося в волноводе мелкого моря с неоднородным дном

$$r\cos\varphi\sin\chi = const\,.$$

Для моды с номером j мы получаем

$$\frac{k_j c}{\omega} r\sin\chi = \frac{k_j c}{\omega} r\cos\alpha = const\,,$$

где $\alpha = \pi/2 - \chi$. Если частоту и скорость звука мы считаем константами, а глубина зависит только от r (в связи с чем $k_j = k_j(r)$), то инвариант записывается так

$$r k_j(r)\sin(\chi(r)) = const\,. \tag{3.53}$$

Последнее равенство совпадает с законом Снеллиуса в радиально стратифицированной среде (3.51). Таким образом, как и в случае декартовых координат (см. раздел 3.2), второй инвариант Вестона (точнее, его аналог – инвариант Харрисона) устанавливает связь между трехмерными лучами и горизонтальными лучами вертикальных мод.

Получим теперь условие на функцию $n = n(r)$ (или, что то же самое, на $k_j = k_j(r)$), обеспечивающее существование лучей ШГ (т.е. лучей, траектории которых содержатся внутри некоторого кольца в горизонтальной плоскости $r_{\min} < r < r_{\max}$, см. Рис. 3.4).

Предположим, что некоторый луч, проходящий через точку с радиальной координатой r (или излученный в этой точке источником) оказывается захваченным внутри кольца $r_{\min} < r < r_{\max}$. Если $r_{\min}$ и $r_{\max}$ суть точки заворота этого луча, то (согласно закону Снеллиуса) $\chi(r_{\min}) = \chi(r_{\max}) = \pi/2$. Следовательно, выполняется равенство

$$n(r_{\min})r_{\min} = n(r)r\sin(\chi(r)) = n(r_{\max})r_{\max}\,. \tag{3.54}$$

Оно может быть выполнено, если и только если

$$n(r)r > n(r_{\max})r_{\max} = n(r_{\min})r_{\min} \tag{3.55}$$

для точек внутри кольца.

Таким образом, мы заключаем, что для захвата лучей ШГ функция $n(r)r$ должна иметь локальный максимум на интервале $[r_1, r_2]$. Более того, поскольку $h(r)$ постоянна вне интервала $[r_1, r_2]$, функция $n(r)r$, а также и ее безразмерный аналог $k(r)r$ монотонно возрастают по r для всех $r < r_1$, а также $r > r_2$. Таким образом, волны шепчущей галереи – волны, которые соответствуют семейству лучей, выходящих из источника под такими углами $\chi(r_s)$, что

$$\sin(\chi(r_s)) > \frac{n(r_{\max})r_{\max}}{n(r_s)r_s}\,.$$

3.4.3. Лучи шепчущей галереи для конкретных радиальных батиметрических профилей $h(r)$

Здесь мы применим развитую в предыдущем разделе теорию к исследованию возможности возникновения волн шепчущей галереи для двух конкретных радиальных батиметрических профилей $h(r)$. В первом случае профиль будет задан ступенчатой (кусочно-постоянной) функцией

$$h(r) = \begin{cases} h_1, \text{ при } r \le r_2, , \\ h_2, \text{ при } r \ge r_2\,. \end{cases} \tag{3.56}$$

Во втором случае батиметрия будет описываться кусочно-линейной непрерывной функцией $h(r)$, монотонно возрастающей на интервале $[r_1, r_2]$ и постоянной вне этого интервала:

$$h(r) = h(r) = \begin{cases} h_1 \text{ при } r \le r_2\,, \\ h_1 + \frac{h_2 - h_1}{r_2 - r_1}(r - r_1) \text{ для } r \in [r_1, r_2]\,, \\ h_2 \text{ при } r \ge r_2\,. \end{cases} \tag{3.57}$$

Функции $h(r)$, задаваемые уравнениями (3.56) и (3.57) используются нами для иллюстрации развиваемой здесь теории волн ШГ во всех оставшихся разделах данной главы. Их графики показаны на Рис. 3.5(а), причем параметры функций выбраны следующим образом: $r_1 = 5.8$ км, $r_2 = 6$ км, $h_1 = 26$ м, $h = h_2 = 24$ м.

Во всех рассмотренных ниже примерах мы будем использовать следующие значений акустических параметров водного слоя и дна. Скорости звука в этих средах будем считать равными $c_w = 1500$ м/с и $c_b = 2000$ м/с соответственно, а плотности воды и донных пород положим равными $\rho_w = 1$ г/см^3 и $\rho_b = 1.8$ г/см^3. Во всех представленных ниже расчетах используется частота звука $f = 120$ Гц.

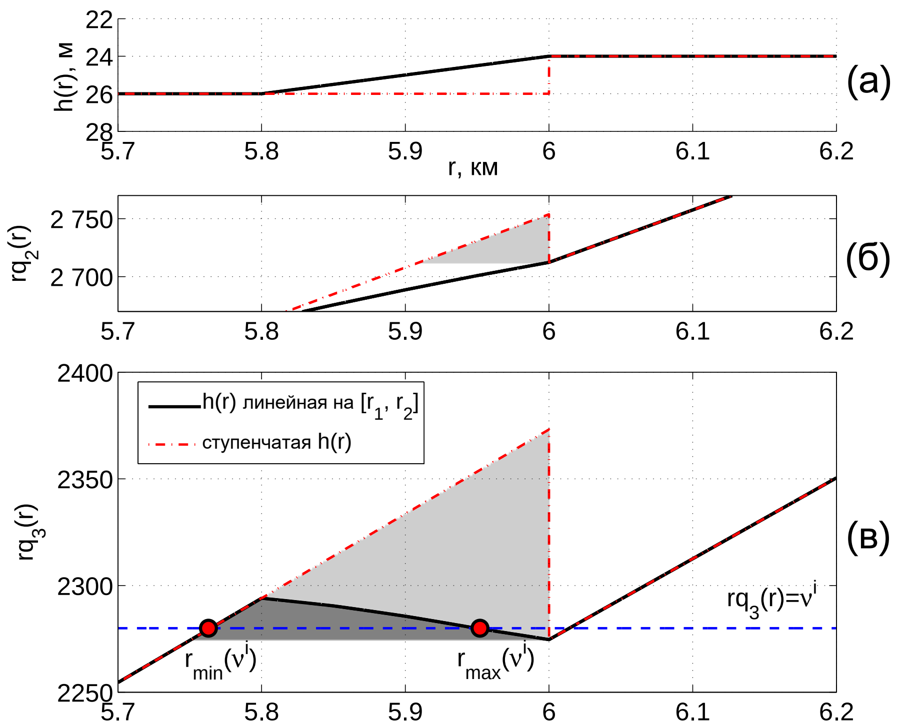


Рис. 3.5. Волновод для волн шепчущей галереи, сформированный на интервалах значений r, где функция $rk_j(r)$ является вогнутой для второй (подграфик (б)) и третьей мод (подграфик (в)), а также радиальные батиметрические профили $h(r)$ (подграфик (а)). На всех подграфиках сплошная линия соответствует батиметрическому профилю $h(r)$, заданному непрерывной кусочно-линейной функцией (3.57), а штрихпунктирная линия – профилю, заданному ступенчатой функцией (3.56).

Для батиметрических профилей, заданных уравнениями (3.56) и (3.57), а также указанных выше значений акустических параметров сред в рассматриваемом волноводе имеются три захваченные (водные) вертикальные моды для всех значений r. Их волновые числа $k_j = k_j(r)$ $(j = 1, 2, 3)$ получаются из численного решения задачи Штурма-Лиувилля (3.2) с использованием метода конечных разностей [145]. Отметим также, что модовые функции $\phi_j(z, r)$ в данной задаче определяются аналитической формулой (3.7), причем

$$\kappa_{w,j} = \kappa_{w,j}(r) = \sqrt{\frac{\omega}{c_w^2} - (k_j(r))^2} = (\pi j + \varphi)/h(r) = \pi j^*/h\,,$$

$$\kappa_{b,j} = \kappa_{b,j}(r) = \sqrt{(k_j(r))^2 - \frac{\omega}{c_b^2}}\,,$$

где φ есть некоторый сдвиг фазы, определяемый условиями на границе раздела в задаче (3.2).

Поскольку глубина в нашей задаче не зависит от r для $r > r_2$ и $r < r_1$, горизонтальные волновые числа также постоянны на этих интервалах, и потому здесь и далее мы используем следующие обозначения: $k_j^{(1)} \equiv k_j(r_1) = k_j(r)$ для всех $r < r_1$, и, аналогичным образом, $k_j^{(2)} \equiv k_j(r_2) = k_j(r)$ для всех $r > r_2$. Напомним, что в этом и следующих разделах мы будем часто опускать индекс j (номер вертикальной моды) в обозначении волновых чисел $k_j^{(1,2)}$ и связанных с ними величин в случаях, когда это не приводит к каким-либо неопределенностям.

Используя эти обозначения, зависимость горизонтальных волновых чисел от r для батиметрического профиля (3.56) имеет вид

$$k(r) = \begin{cases} k^{(1)}, & \text{при } r \le r_2, , \\ k^{(2)}, & \text{при } r \ge r_2\,. \end{cases} \tag{3.58}$$

Показатель преломления для горизонтальных лучей $n(r)$ (см. формулу (3.49)) в этом случае также является ступенчатой функцией (здесь и далее мы всегда используем $k_0 = k^{(1)}$ в качестве опорного значения горизонтального волнового числа)

$$n(r) = \begin{cases} 1, & \text{при } r \le r_2, , \\ n = k^{(2)}/k^{(1)} < 1, & \text{при } r \ge r_2\,. \end{cases} \tag{3.59}$$

Горизонтальные лучи в этом случае являются ломаными линиями (подобными тем, что изображены на Рис. 3.4(б)), как и лучи ШГ в задачах архитектурной акустики.

Рассмотрим теперь геометрию лучей, соответствующих волнам ШГ, для батиметрических профилей (3.56) и (3.57). Как было отмечено выше, геометрия горизонтальных лучей полностью определяется поведением функции $r{\cdot}k(r)$ для любой фиксированной вертикальной моды. Эти функции для рассматриваемых батиметрических профилей показаны на подграфиках (б) и (в) Рис. 3.5 для вертикальных мод с номерами 2 и 3 соответственно. На всех подграфиках Рис. 3.5 сплошная линия соответствует радиальному батиметрическому профилю, заданному уравнением (3.57), а штрихпунктирная – заданному уравнением (3.56). Естественно, что во втором случае функции $rk(r)$ для обеих мод (второй и третьей) имеет локальный максимум в точке $r = r_2$, где $h(r)$ терпит разрыв.

Существование горизонтальных лучей, для которых выполняется условие (3.54), возможно только в том случае, когда функция $rk(r)$ является вогнутой на некотором интервале значений r. На этом интервале подграфик функции $rk(r)$ является выпуклым (соответствующие части подграфиков закрашены серым на Рис. 3.5). Интуитивно легко понять, что угловая мера пучка таких лучей тем больше, чем длиннее интервал вогнутости $rk(r)$, и чем больше перепад значений функции на этом интервале. Другими словами, условия для формирования шепчущей галереи тем благоприятнее, чем большая площадь на подграфиках на Рис.3.5(б,в) закрашена серым цветом.

В случае батиметрического профиля (3.56) перепад значений $rk(r)$ на интервале вогнутости определяется величиной $\Delta k = k^{(2)} - k^{(1)}$ (скачком $k(r)$ в точке $r = r_2$). Легко видеть, что для этой величины справедлива оценка

$$\Delta k \sim \frac{(\pi j^*)^2 \Delta h}{h_1^3 k^{(1)}}\,. \tag{3.60}$$

Таким образом, мы видим, что величина Δk зависит от вариаций батиметрии, номера моды, а также частоты звука. В частности, из (3.60) ясно, что наиболее благоприятные условия для формирования ШГ в результате горизонтальной рефракции звука имеются для водной моды наибольшего номера (в нашем случае, для третьей моды). Этот факт может быть проиллюстрирован путем сравнения областей вогнутости подграфиков функций $rk_2(r)$ и $rk_3(r)$ (данные области закрашены светло-серым на Рис. 3.5(б) и Рис. 3.5(в)).

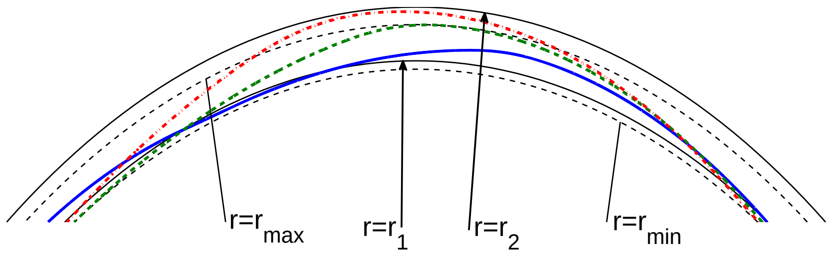


Рис. 3.6. Горизонтальные лучи, соответствуюшие волнам шепчущей галереи для кусочно-линейного радиального профиля глубин $h(r)$ (формула (3.57)). Жирные линии показывают траектории горизонтальных лучей для различных значений $\chi(r_s)$ (см. также следующий раздел, где установлена связь этих лучей с модами ШГ). Тонкие пунктирные линии соответствуют координатам $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$ точек поворота луча, нарисованного жирной пунктирной линией. Границы области с наклонным дном (т.е. кольца $r \in [r_1, r_2]$) показаны тонкими сплошными линиями.

Показатель преломления при $r > r_2$ для второй моды принимает значение $n_2 = k_2^{(2)}/k_2^{(1)} \sim 0,99$, а для третьей – $n_3 = k_3^{(2)}/k_3^{(1)} \sim 0,95$. Так как для батиметрии, задаваемой формулой (3.56)), $r_{\min}k^{(1)} \sim r_2 k^{(2)}$, легко оценить ширину радиального интервала (ширину кольца), на котором будут локализованы волны ШГ:

$$\Delta r \sim r_2(1-n) = r_2(1-k^{(2)}/k^{(1)})\,. \tag{3.61}$$

В нашем примере для второй вертикальной моды имеем $\Delta r_2 \sim 60$ м. Для третьей моды радиальный интервал локализации существенно шире и составляет $\Delta r_3 \sim 300$ м. Эти оценки находятся в хорошем согласии с областями вогнутости функций $rk(r)$, показанными на Рис. 3.5.

В более реалистичной модели батиметрии $h(r)$, определяемой (3.57), функция $r \cdot k_2(r)$ не имеет локальных максимумов (см. Рис. 3.5(б)). Таким образом, волны ШГ не могут возбуждаться в этом волноводе для второй вертикальной моды. Для третьей моды функция $r \cdot k_3(r)$ имеет максимум, хотя соответствующая ему выпуклая область подграфика намного меньше, чем для ступенчатой функции $h(r)$, задаваемой (3.56) (эта область закрашена темно-серым цветом на Рис. 3.5(в)). Таким образом, угловой размер пучка лучей, удовлетворяющих условию (3.55), в этом случае намного меньше, чем для батиметрического профиля, заданного (3.56).

Как было отмечено выше, в случае когда $h(r)$ есть кусочно-постоянная функция (3.56), горизонтальные лучи, удовлетворяющие неравенству (3.55), представляют собой ломаные линии (Рис. 3.4(б)). Здесь и далее мы будем называть лучи, удовлетворяющие этому неравенству, лучами шепчущей галереи. Из уравнения (3.52) мы можем оценить длину цикла L для лучей ШГ. Для зафиксированных выше значений параметров среды и геометрических характеристик волновода находим, что $L \sim 800 - 1200$ м. В случае, если, например, угловое расстояние между точками излучения и приема составляет $\Delta\theta = \pi/4$, длина соединяющей их изобаты составляет ~ 10 км (расстояние вдоль дуги). Таким образом, на этой дуге укладывается от 8 до 12 циклов луча (которые соответствуют 8-12 отражениям от границы $r = r_2$). Поэтому можно считать, что сформированная в этом случае ШГ представляет собой волновод в горизонтальной плоскости.

На Рис. 3.6 показаны лучи ШГ для батиметрического профиля (3.57)). Из рисунка видно, что эти горизонтальные лучи распространяются в кольце, ограниченном окружностями с радиусами $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$, показанными на Рис. 3.5(в) кружками. Длина цикла луча ШГ в этом случае равна приблизительно $\sim 1.5 - 2$ км.

3.4.4. Сравнение интенсивностей для сигналов, распространяющихся в волноводе ШГ и по прямой

Отметим, что для моделей батиметрии, заданных уравнениями (3.56) и (3.57), существуют также и обычные прямолинейные горизонтальные лучи, соединяющие источник и приемник. Таким образом, если источником излучается импульсный сигнал, в точке приема будут наблюдаться множественные приходы. Дополнительный приход может быть связан с волнами ШГ, распространяющимися приблизительно вдоль круговой изобаты. Временная задержка прихода сигнала по ШГ относительно времени прихода прямого сигнала зависит от геометрии конкретной задачи. В рассмотренном выше примере его можно оценить как $0,6$ с (подробности см. в разделе 3.4.6 ниже).

В то время как акустические волны, соответствующие прямолинейному распространению от источника к приемнику, имеют геометрическую (цилиндрическую) расходимость, волны шепчущей галереи локализованы в горизонтальной плоскости в окрестности криволинейной изобаты и расходимости при распространении от источника не подвержены. Таким образом, на достаточно большом расстоянии от источника можно ожидать, что интенсивность прихода, связанная с модами ШГ, будет намного выше, чем интенсивность сигнала, распространяющегося по прямому пути. Покажем, как можно оценить соотношение этих интенсивностей, используя простую модель со ступенчатым батиметрическим профилем (3.56), которая, в свою очередь, приводит к появлению ступенчатой радиальной стратификации показателя преломления $n(r)$, заданного (3.59).

На Рис. 3.7 показан угловой сектор $\Delta\chi$, соответствующий горизонтальным лучам, захваченным волноводом ШГ. Этот сектор ограничен горизонтальными лучами, у которых углы выхода из источника равны углу полного внутреннего отражения χ_0. Элементарный геометрический анализ (см. Рис. 3.7) показывает, что формирование ШГ-волновода возможно, если расстояние d от источника до изобаты меньше $r_2(1-n)$. Отметим, что последнее выражение задает и ширину кольца $w = r_2(1 - n)$, соответствующего ШГ-волноводу.

Оценка для $\Delta\chi$ может быть получена следующим образом. Лучи ШГ удо-

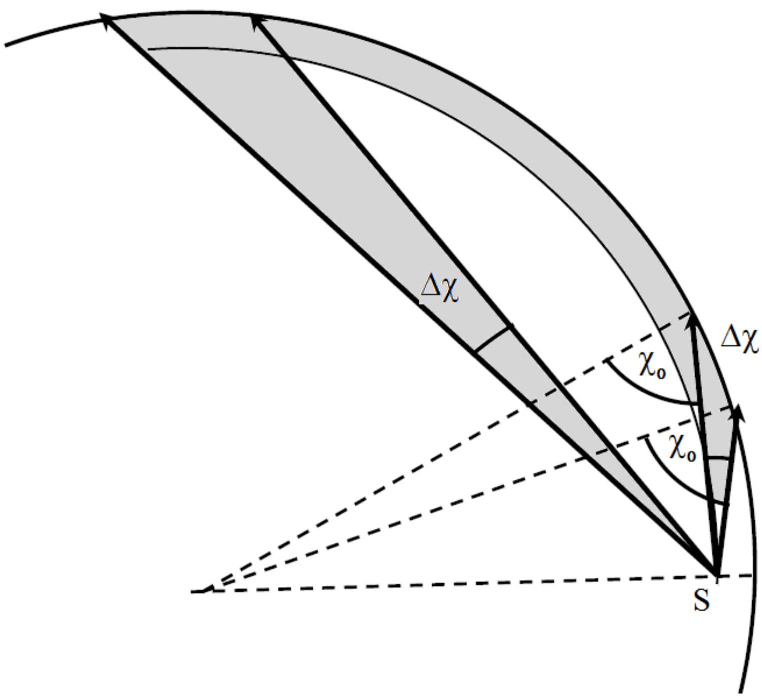


Рис. 3.7. К сравнению интенсивностей сигналов, распространяющихся в волноводе ШГ и по прямой между источником и приемником. Отношение интенсивностей обратно пропорционально отношению длин дуг для соответствующих углов с одинаковой мерой $\Delta\chi$.

влетворяют неравенству (3.55) которое мы перепишем в виде

$$\sin\chi(r_s) > n\frac{r_2}{r_s}\,.$$

Таким образом, углы падения лучей ШГ принадлежат интервалу

$$\chi \in [\arcsin(nr_2/r_s), \pi/2]\,,$$

в то время как соответствующие им углы скольжения α лежат в интервале $\alpha \in [0, \arccos(nr_2/r_s)]$ (напомним, что угол α откладывается от касательной к изобате в данной точке и что $\chi = \pi/2 - \alpha$).

Нам также необходимо учесть и лучи ШГ, которые непосредственно от источника распространяются в сторону каустики $r = r_{\min}$. Следовательно, лучи ШГ на самом деле имеют углы скольжения α в интервале $[-\arccos(nr_2/r_s)$, $\arccos(nr_2/r_s)]$ (на выходе из источника), и мы получаем

$$\Delta\chi = \Delta\alpha = 2\arccos(nr_2/r_s)\,.$$

Если r_s приближается к r_2, то

$$\Delta\chi \sim 2\arccos(n) \sim 2\sqrt{2}\sqrt{1-n} + O((1-n)^{3/2})\,.$$

Очевидно, что энергия пучка лучей ШГ, имеющего апертуру $\Delta\chi$ на выходе из источника, равномерно распределяется по сечению кольца толщины w в окрестности точки приема.

Рассмотрим теперь дугу в горизонтальной плоскости, соответствующую сектору угловой меры $\Delta\chi$, для прямолинейной геометрии распространения (очевидно, что на пучки горизонтальных лучей одинаковой угловой меры приходится одинаковое количество акустической энергии). Длина этой дуги в окрестности точки приема равна $2r_2\sin(\Theta/2)\Delta\chi$, где Θ есть угловая мера дуги (изобаты) соединяющей источник и приемник. Таким образом, отношение интенсивности сигнала ШГ к интенсивности сигнала, распространяющегося по прямой, равно

$$\frac{I_{WG}}{I_D} \sim \frac{4\sqrt{2}\sin(\Theta/2)}{\sqrt{1-n}}\,. \tag{3.62}$$

Для третьей вертикальной моды, как мы помним, $n \sim 0,95$, так что при $\Theta = \pi/2$ (т.е. для дугообразной изобаты, составляющей четверть окружности) уровень сигнала для прихода по волноводу ШГ приблизительно на $\sim 12,5$ дБ выше, чем для сигнала, распространяющегося по прямой.

3.4.5. Радиальные моды ШГ в горизонтальной плоскости

Поскольку горизонтальные волновые числа $k_j(r)$, являющиеся решениями задачи (3.2), не зависят от угловой координаты θ по крайней мере на некотором интервале $\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max}$, уравнения (3.46) могут быть решены с помощью метода разделения переменных. Модовые амплитуды $A_j(r,\theta)$ при этом допускают представление в виде следующего ряда

$$A_j = \sum R_{j\nu}(r)\psi_{j\nu}(\theta)\,. \tag{3.63}$$

Используя анзац вида $A = R_\nu(r)\psi_\nu(\theta)$ в однородном аналоге уравнения для модовой амплитуды (3.46) и разделяя переменные, получим следующие уравнения для ϕ_ν и R_ν[11]

$$\frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial\theta^2} + \nu^2\psi = 0\,, \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial^2 R_\nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R_\nu}{\partial r} + \left((k(r))^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) R_\nu = 0\,. \tag{3.65}$$

Решения уравнения (3.64) имеют вид

$$\psi_\nu = \mathrm{e}^{\pm i\nu\theta}\,, \tag{3.66}$$

где знаки $-$ и $+$ относятся к волнам, распространяющимся в направлениях по часовой стрелке и против нее соответственно.

Важно отметить, что, поскольку мы рассматриваем распространение в открытом секторе $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, функция ψ_ν в уравнении (3.66)) не должна удовлетворять условиям периодичности. Вместо этого мы будем полагать, что при $\theta = \theta_{\min}$ и $\theta = \theta_{\max}$ решение состоит только из волн, покидающих сектор (распространяющихся через границу сектора во внешнюю среду, но не наоборот). Это условие потребуется нам лишь при расчете звукового поля, формируемого волнами ШГ, возбуждаемыми точечным источником звука. Эти условия аналогичны используемым в двумерных задачах, где звуковое поле точечного источника рассчитывается в вертикальном волноводе с открытыми правой и левой границами (см., например, [73]).

Для уравнения (3.65) можно поставить задачу на собственные значения (считая ν^2 спектральным параметром), если дополнить его следующими краевыми условиями. При $r = 0$ мы требуем, чтобы решение $R_\nu(r)$ было ограниченным, а при $r \to \infty$ мы требуем выполнения условия излучения (см.[172]). Из этих условий непосредственно вытекает, что функция $R_\nu(r)$ должна иметь

[11] С этого момента мы опускаем нижний индекс номера моды в наших рассуждениях.

следующий вид вне интервала $[r_1, r_2]$:

$$R_\nu(r) = \begin{cases} J_\nu(k^{(1)}r), \text{ при } r \le r_1, , \\ \alpha_\nu H_\nu^{(1)}(k^{(2)}r), \text{ при } r \ge r_2 \, . \end{cases} \tag{3.67}$$

Собственные значения ν[12], а также константы α_ν могут быть определены путем сшивания решений (3.67) с решением (3.65) на интервале $[r_1, r_2]$, которое в общем случае может быть найдено численно (для любой наперед заданной функции $h(r)$).

Здесь и далее решения спектральной задачи ν для уравнения (3.65) называются *азимутальными волновыми числами*, а для соответствующих им собственных функций $R_\nu(r)$ мы будем использовать термин *радиальные (горизонтальные) моды*. Видно, что константы распространения соответствующих волн вдоль углового направления оказываются связаны с индексами функций Бесселя и Ганкеля радиальных мод в формуле (3.67)).

Позже будет показано, что азимутальные волновые числа ν всегда являются комплексными величинами и непременно имеют ненулевую мнимую часть. Легко проверить, что радиальные моды удовлетворяют следующему условию ортогональности

$$\langle R_\nu, R_\mu \rangle = \int\limits_0^\infty \frac{R_\nu(r) R_\mu(r)}{r} dr = 0 \text{ если } \nu \ne \mu \, . \tag{3.68}$$

Заметим, что при $r > r_2$ функция $H_\nu^{(1)}(k^{(2)}r)$ осциллирует с медленным уменьшением амплитуды осцилляций при увеличении r. Физически это означает утечку акустической энергии из кругового сектора $\theta_{\min} \le \theta \le \theta_{\max}$, $r \le r_2$, т.е. непременное затухание радиальных мод в ходе их распространения вдоль изобаты. Именно эти радиационные потери обуславливают непременное наличие мнимой части у азимутальных волновых чисел ν. Это явление в определен-

[12] Строго говоря, собственными значениями спектральной задачи для уравнения (3.65) являются квадраты значений ν. Однако для простоты мы будем использовать этот термин и для самих значений азимутального волнового числа ν.

ном смысле аналогично туннельному эффекту и, в частности, связано с конечностью добротности волноводов ШГ в нанооптике [175].

Оставшаяся часть данной главы диссертации посвящена исследованию решений спектральной задачи для уравнения (3.65), которые и определяют поведение волн ШГ, их дисперсию, характер интерференции и все прочие физические свойства. Как и в случае с подводным каньоном, физическим эффектом, который обуславливает формирование волновода ШГ, является горизонтальная рефракция звука над неоднородным дном.

3.4.6. ВКБ-теория для мод ШГ в горизонтальной плоскости

В общем случае решение уравнения (3.65) может быть найдено с помощью приближения ВКБ. Подставляя $R_\nu(r) = F_\nu(r)/\sqrt{r}$ в (3.65)), мы получаем, что $F_\nu(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2F_\nu}{dr^2} + \left((k(r))^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{r^2}\right) F_\nu = 0\,. \tag{3.69}$$

Таким образом, приближение ВКБ для радиальной моды $R_\nu(r)$ имеет вид

$$R_\nu(r) = \frac{1}{\sqrt[4]{(k(r))^2r^2 - (\nu^2 - 1/4)}} \left(A_\nu \exp\left(\mathrm{i}\Phi_\nu(r)\right) + B_\nu \exp\left(-\mathrm{i}\Phi_\nu(r)\right)\right)\,, \tag{3.70}$$

где

$$\Phi_\nu(r) = \int \sqrt{(k(r))^2 - (\nu^2 - 1/4)/r^2} dr\,. \tag{3.71}$$

Заметим, что в реальных ситуациях, например в случае волновода на Рис. 3.5, мы рассматриваем волны ШГ, которые распространяются на значительном расстоянии от центра кривизны изобат (в наших примерах эти расстояния $r, r_{\min}, r_{\max} \sim 6$ км). Для частот звука в несколько сотен Герц выполняется условие $k(r)r \gg 1$ (в частности, в наших примерах $k(r)r \sim 10^3$, см. Рис. 3.5). Компонента звукового поля, формируемая волнами ШГ, локализована между точками поворота решения ВКБ, определенного формулой (3.70), где выражение под квадратным корнем близко к нулю. Это означает, что для азимутальных волновых чисел ν также выполняется условие $\nu \gg 1$, и, следовательно, мы можем пренебречь слагаемым 1/4 при расчете фазового интеграла в формуле (3.71).

В рамках приближения ВКБ азимутальные волновые числа ν_m, соответствующие модам ШГ, могут быть определены из следующего условия квантования:

$$2\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{(k(r))^2-\frac{\nu_m^2}{r^2}}dr+\varphi_{\min}+\varphi_{\max}=2m\pi\,. \tag{3.72}$$

Здесь $\varphi_{\min}$ и $\varphi_{\max}$ суть сдвиги фазы ВКБ-решения, обусловленные отражением волны ВКБ в точках поворота $r_{\min}$ и $r_{\max}$ соответственно. С одной стороны, уравнение (3.72) представляет собой прямой аналог стандартного правила квантования ВКБ в декартовых координатах, которое используется для расчета акустических мод в подводном звуковом канале глубокого океана [73]. С другой стороны, (3.72) напоминает и условия квантования для мод ШГ в области с полностью отражающими границами [172] (такие моды ШГ характерны для архитектурной акустики).

Важно отметить, что из уравнений (3.63),(3.66), (3.70) и (3.71) следует, что волновой вектор решения ВКБ имеет тангенциальную компоненту $k^t=\nu/r$, и радиальную компоненту $k^r=\sqrt{(k(r))^2-\nu^2/r^2}$.

Ступенчатый радиальный батиметрический профиль (3.56)

Мы начинаем исследование модовой структуры волновода ШГ со случая, когда батиметрический профиль задан формулой (3.57), где горизонтальное волновое число $k(r)$ определяется равенством (3.58)). В этом случае волны шепчущей галереи распространяются внутри кольца $r_{\min}\le r\le r_{\max}=r_2$ между отражающей границей $r=r_2$ и окружностью $r=r_{\min}=\nu/k^{(1)}$, на которой лежат точки поворота лучей ШГ. В этом случае фазовый интеграл в условии квантования (3.72)) может быть вычислен аналитически. Сделав это, мы можем переписать это условие в виде

$$\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{(k(r))^2 - \frac{\nu^2}{r^2}} dr = \sqrt{(k^{(1)})^2 r_2^2 - \nu^2} - \nu \arccos\left(\frac{\nu}{k^{(1)} r_2}\right) = m\pi - \frac{1}{2}(\varphi_{\min} + \varphi_{\max}) \, .$$

Дальнейшее упрощение данного равенства может быть выполнено путем введения угла скольжения α относительно окружности $r = const$ в данной точке, соответствующего рассматриваемой моде ШГ. Этот угол удовлетворяет соотношению $\cos\alpha = \frac{\nu}{k^{(1)} r_2}$, и с его помощью условие квантования (3.72) можно переписать следующим образом

$$k^{(1)} r_2 (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) = m\pi - \frac{1}{2}(\varphi_{\min} + \varphi_{\max}) \, . \tag{3.73}$$

Отражение волны ВКБ от каустик, формируемых точками заворота лучей $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$, приводит к сдвигам фазы $\varphi_{\max} = \varphi_{\min} = -\pi/2$ [172].[13] Сохраняя лишь старшие члены в разложении левой части условия (3.73) в ряд Тейлора при малых значениях угла скольжения $\alpha \ll 1$, мы получаем следующее приближенное условие квантования

$$k^{(1)} r_2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} - \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + O(\alpha^5)\right) = (m + 1/2)\pi \, ,$$

из которого можно определить значения углов скольжения α_m, связанных с модами ВКБ

$$\alpha_m \approx \sqrt[3]{\frac{3\pi(m + 1/2)}{k^{(1)} r_2}} \, . \tag{3.74}$$

Соответствующие значения азимутального волнового числа ν_m можно определить по формуле

$$\nu_m = k^{(1)} r_2 \cos\alpha_m \approx k^{(1)} r_2 \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi(m + 1/2)}{k^{(1)} r_2}\right)^{2/3}\right) \, . \tag{3.75}$$

---

[13] На самом деле при $r = r_{\max}$ волна испытывает полное внутреннее отражение от границы, и соответствующее выражение для сдвига по фазе, вообще говоря, включает в себя угол падения χ [38]. Тем не менее, в рассматриваемых здесь примерах достаточная точность достигается даже при использовании приближения $\varphi_{\max} \approx -\pi/2$.

Набор собственных значений (3.75) определяет интерференционную картину звукового поля в горизонтальной плоскости в узком кольце, представляющем собой малую окрестность изобаты. Выражение(3.75) также неявным образом описывает зависимость азимутальных волновых чисел и интерференционной структуры поля от частоты и номера вертикальной моды.

Общее число мод ШГ m^* ограничено неравенством $\alpha_m < \arccos(n)$, которое фактически представляет собой условие полного внутреннего отражения волн ШГ от границы $r = r_2$ в приближении ВКБ (заметим, на самом деле из формы решения (3.67) и того факта, что азимутальные волновые числа непременно являются комплексными, следует, полное внутреннее отражение от криволинейной границы невозможно). Таким образом, для каждого набора параметров волновода имеется лишь конечное число мод ШГ, а их азимутальные волновые числа ν_m и соответствующие углы скольжения α_m могут быть вычислены по формулам(3.74) и (3.75).

Используя (3.74), можно оценить число m^* как

$$m^* \sim \frac{k^{(1)} r_2}{3\pi} \left(\frac{k^{(1)} - k^{(2)}}{k^{(1)}} \right)^{3/2} . \tag{3.76}$$

Таким образом, мы видим, что m^* можно считать убывающей функцией частоты (при фиксированном номере j), и что эта величина возрастает с номером вертикальной моды. Для модели волновода, рассмотренного в разделе 3.4.2, радиального батиметрического профиля (3.56) и номера вертикальной моды $j = 3$ мы имеем $\frac{k^{(1)} - k^{(2)}}{k^{(1)}} \sim 0,05$, $k^{(1)} r_2 \sim 2300$. Отсюда непосредственно из соотношения (3.76) получаем оценку $m^* \sim 5 - 6$.

Тангенциальные фазовая и групповая скорости (т.е. скорости в направлении вдоль изобаты) мод ШГ также могут быть вычислены с использованием приближения ВКБ (точнее из соотношения (3.75)) по формулам

$$v_m^{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{\nu_m} r_2 \,, \qquad v_m^{\mathrm{g}} = \frac{d\omega}{d\nu_m} r_2 \,. \tag{3.77}$$

Соответствуюшие зависимости фазовой и групповой скоростей нескольких радиальных мод от частоты (т.е., тангенциальные дисперсионные кривые) показаны на Рис. 3.8 для номера вертикальной моды $j = 3$. Зависимости обычных фазовой и групповой скоростей $v^{\mathrm{ph}} = \omega/k$ и $v^{\mathrm{g}} = d\omega/dk$ от частоты для данной вертикальной моды также показаны на Рис. 3.8 точечной линией.

Различие между максимальной и минимальной тангенциальными групповыми скоростями горизонтальных мод будет проявляться в увеличении длительности сигнала при распространении вдоль ШГ. Таким образом, можно сказать, что в волноводе ШГ имеет место межмодовая дисперсия. Характерное расстояние между интерференционными максимумами поля, формируемого модами ШГ, определяется, в свою очередь, разницей тангенциальных фазовых скоростей соответствующих мод. В нашем примере для частоты 120 Гц имеем $\Delta v_m^{\mathrm{ph}} = v_m^{\mathrm{ph}} - v_{m-1}^{\mathrm{ph}} \sim 12 - 17$ м/с, в то время как расстояние между интерференционными максимумами можно оценить как $\Lambda \sim 1.5 - 2.5$ км (оно практически совпадает с длиной цикла лучей ШГ).

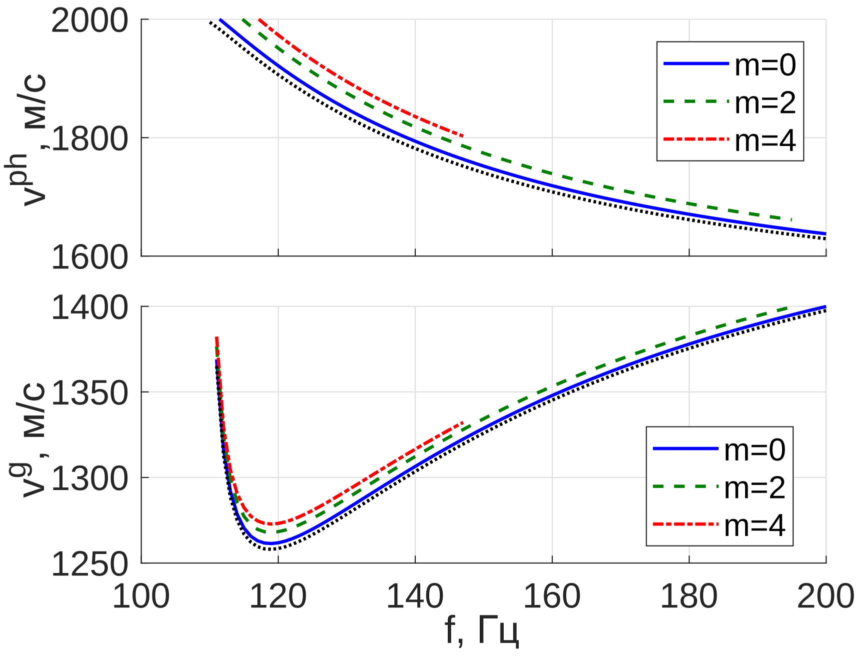


Рис. 3.8. Тангенциальные фазовые и групповые скорости мод ШГ (т.е., $v_m^{ph}(f)$ и $v_m^{g}(f)$) как функции частоты f для номеров $m = 0, 2, 4$. Обычные фазовая и групповая скорость $v^{\mathrm{ph}} = \omega/k$ и $v^{\mathrm{g}} = d\omega/dk$ для рассматриваемой вертикальной моды показаны точечными линиями.

Графики на Рис. 3.8 подтверждают, что для данного номера вертикальной моды j количество соответствующих мод ШГ уменьшается с увеличением частоты. Таким образом, моды ШГ постепенно исчезают при увеличении частоты звука, начиная с больших номеров m. При некотором большем значении частоты (равном частоте отсечки) появляется еще одна вертикальная мода с некоторым числом горизонтальных мод ШГ (в нашем случае, например, частота отсечки четвертой вертикальной моды равна 150 Гц), и т.д.. Следовательно, для любого фиксированного номера вертикальной моды наиболее благоприятные условия для формирования ШГ в окрестности криволинейной изобаты имеют место на частотах, близких к частоте отсечки (но, разумеется, превышающих ее).

Для радиального батиметрического профиля, определяемого ступенчатой функцией (3.56) мы можем на самом деле решить уравнение (3.65) аналитически. Действительно, решение можно записать в виде (3.67), если положить $r_1 = r_2$. Сшивая значения функций $R_\nu(r_2+0)$ и $R_\nu(r_2-0)$, а также их производные $\frac{dR_\nu}{dr}\Big|_{r=r_2+0}$ и $\frac{dR_\nu}{dr}\Big|_{r=r_2-0}$ слева и справа от точки $r = r_2$, мы получаем переопределенную систему уравнений для α_ν

$$J_\nu(k^{(1)}r_2) = \alpha_\nu H_\nu^{(1)}(k^{(2)}r_2)\,,$$

$$k^{(1)}J'_\nu(k^{(1)}r_2) = \alpha_\nu k^{(2)} H_\nu^{(1)\prime}(k^{(2)}r_2)\,.$$

Разделив первое из этих уравнений на второе с целью исключения α_ν, мы получим точное дисперсионное соотношение для горизонтальных мод

$$\frac{J_\nu(k^{(1)}r_2)}{J'_\nu(k^{(1)}r_2)} = n\frac{H_\nu^{(1)}(k^{(2)}r_2)}{H_\nu^{(1)\prime}(k^{(2)}r_2)}\,. \tag{3.78}$$

Отметим, что для вещественных значений ν правая часть $\mathrm{RHS}(\nu) = n\frac{H_\nu^{(1)}(k^{(2)}r_2)}{H_\nu^{(1)\prime}(k^{(2)}r_2)}$ равенства (3.78) всегда имеет ненулевую мнимую часть, в то время как левая часть $\mathrm{LHS}(\nu) = \frac{J_\nu(k^{(1)}r_2)}{J'_\nu(k^{(1)}r_2)}$ является действительным числом. Таким образом, никакое вещественное значение ν не может удовлетворять дисперсионному соотношению (3.78). Тем не менее, как показано ниже, для мод ШГ (т.е. таких, что kr и $|\nu| \gg 1$) мнимая часть ν является малой по сравнению с вещественной.

Графики функций LHS(ν) и RHS(ν) из левой и правой частей дисперсионного соотношения (3.78) для вещественных значений ν вместе с решениями $\{\nu_m\}$, полученными по методу ВКБ, представлены на Рис. 3.9. Из рисунка видно, что вещественная часть каждого азимутального волнового числа $\{\nu_m\}$, соответствующего моде ШГ, намного больше его мнимой части. Действительно, для таких волновых чисел ν правая часть RHS(ν) уравнения (3.78) практически не отличается от ее вещественной компоненты, в то время как ее мнимая компонента пренебрежимо мала. Таким образом, в результате применения метода ВКБ к нашей задаче получаются только те решения дисперсионного уравнения (3.78), у которых вещественная часть намного превышает по модулю мнимую. Очевидно, это означает, что волны ШГ действительно распространяются вдоль окружности $r = r_2$, в то время как прочие члены ряда по радиальным модам (3.63) быстро убывают с увеличением θ.

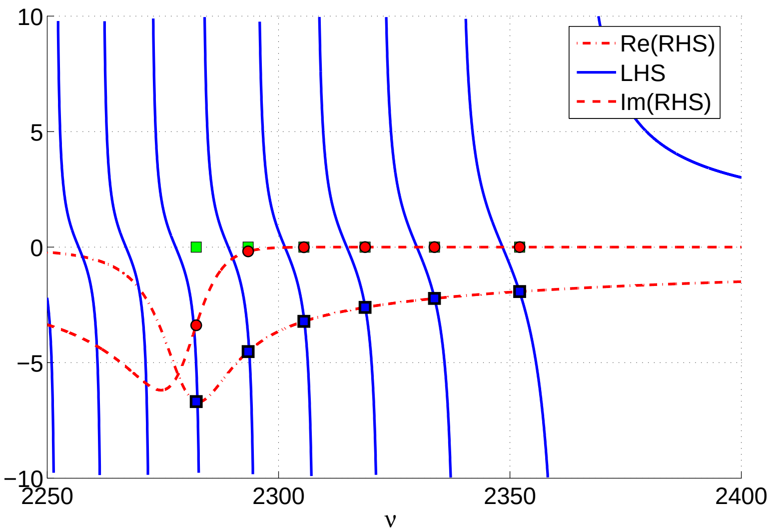


Рис. 3.9. Решения дисперсионного уравнения (3.78) – азимутальные волновые числа – для случая, когда $k(r)$ есть ступенчатая функция (третья вертикальная мода). Сплошная линия соответствует выражению в левой части LHS(ν) равенства (3.78) как функции ν; вещественная и мнимая компоненты правой части RHS(ν) уравнения (3.78) нарисованы штрихпунктирной и пунктирной линиями соответственно. Значения ν, полученные по ВКБ-формуле (3.75), изображены маркерами. Также маркерами на графиках отмечены соответствующие им значения вещественной и мнимой частей выражения RHS(ν) в правой части (3.78).

Азимутальные волновые числа ν_m горизонтальных мод ШГ, вычисленные для третьей вертикальной моды и параметров среды из нашего примера представлены в Таблице 3.2 вместе с соответствующими им значениями углов скольжения горизонтальных лучей α_m. Вычислив радиусы внутренних точек поворота по формуле $r_{\min,m} = \nu_m/k^{(1)}$, мы можем также оценить эффективные значения $w_m = r_2 - r_{\min,m}$ ширины кольца $[r_{\min}, r_{\max}]$, в котором локализована акустическая энергия, переносимая этими модами. Из Таблицы 3.2 мы видим, что энергия мод ШГ действительно сосредоточена в очень узких кольцах шириной от 50 до 200 метров в окрестности окружности радиуса $r = r_2 = 6$ км.

m	0	1	2	3	4	5
ν_m	2352.1	2333,7	2318,7	2305,5	2293,4	2282,2
α_m, °	7,64	10,46	12,3	13,72	14,89	15,91
w_m, м	53,2	99,8	137,7	171,1	201,6	229,9
β_m, °	15,28	20,92	24,61	27,44	29,78	31,82
v_m^{ph}, м/с	1921	1,938	1951	1963	1973	1983
v_m^g, м/с	1262	1266	1268	1271	1273	1275
$\mathrm{Re}(\Delta\nu_m)$	-0,03	0,027	0,042	0,09	0,241	0,447
$\mathrm{Im}(\Delta\nu_m)$	$6,3 \cdot 10^{-12}$	$4,4 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$2,11 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$
$\Theta_m(2)$, °	$6,4 \cdot 10^{12}$	$9,1 \cdot 10^{8}$	$1,8 \cdot 10^{6}$	1884	750	113

Таблица 3.2. Азимутальные волновые числа ν_m (включая мнимые части) горизонтальных мод шепчущей галереи (для номера вертикальной моды $j = 3$), соответствующие значения углов скольжения α_m при $r = r_2$, значения ширины соответствующих колец w_m, где локализованы соответствующие волны, а также угловая величина циклов лучей ШГ β_m. В таблице также предсталены групповая v_m^g и фазовая v_m^{ph} скорости распространения мод ШГ и угловой размер дуги, при распространении вдоль которой амплитуда соответствующей моды ШГ уменьшается в два раза из-за радиационных потерь на границе $r = r_2$.

Радиальные моды шепчущей галереи для $m = 0, 2, 4$ представлены на Рис. 3.10. На рисунке хорошо видно, что акустическая энергия этих мод локализована в довольно узких кольцах (толщина которых w_m оценена в Таблице 3.2) в окрестности окружности $r = r_2$. Вытекающие “хвосты” этих мод при $r > r_2$ практически неразличимы для $m = 0$ и $m = 2$. Для $m = 4$ амплитуда этого “хвоста” уже вполне заметна. Этот факт является наглядной иллюстрацией того, что все моды ШГ постепенно теряют энергию путем ее излучения во внешнее пространство $r > r_2$, причем потери быстро растут с увеличением номера моды m.

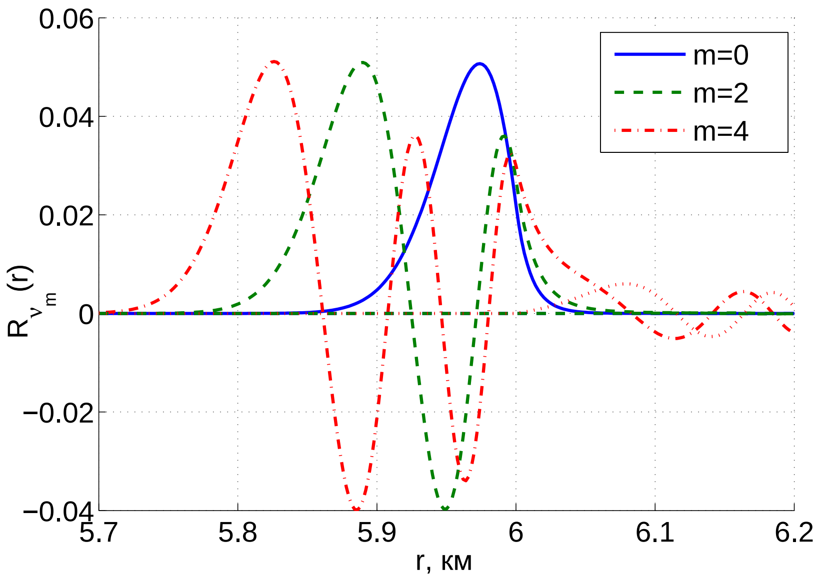


Рис. 3.10. Вещественные компоненты радиальных мод шепчущей галереи $\mathrm{Re}(R_{\nu_m}(r))$, соответствующих $m = 0, 2, 4$ (см. Таблицу 3.2). Отметим, что моды более больших номеров m локализованы внутри более широких колец (см. значения w_m в Таблице 3.2). Мнимые компоненты $\mathrm{Im}(R_{\nu_m}(r))$ равны нулю для $r < r_2$, однако имеют вполне заметную амплитуду при $r > r_2$ для больших номеров m. Для примера на рисунке с помощью пунктирной линии показан график $\mathrm{Im}(R_{\nu_4}(r))$.

Волны ШГ соответствуют большим значениям как порядка ν, так и аргумента kr. Такая же ситуация наблюдается и в случае стандартной теории волн ШГ [172]. В этом случае для лучшего понимания поведения функций Бесселя и Ганкеля можно использовать асимптотики Дебая. Применяя их к точному решению, можно прийти к тем же формулам для мод ШГ, что получаются из метода ВКБ.

Важно отметить, что приближение ВКБ позволяет получить лишь вещественные части азимутальных волновых чисел, и для вычисления мнимых частей ν_m необходимо использовать теорию возмущений. Обозначим точное комплекснозначное решение дисперсионного уравнения (3.78) как $\bar{\nu}_m$. Тогда ошибка для ВКБ-оценки ν_m этой величины равна $\Delta\nu_m = \bar{\nu}_m - \nu_m$. Мы можем оценить эту величину, подставляя $\nu = \nu_m + \Delta\nu_m$ в уравнение (3.78) и отбрасывая члены высших порядков в разложении соответствующих функций в ряд по $\Delta\nu$.

Таблица 3.2 содержит результаты вычисления поправок $\Delta\nu_m$. Во-первых, ясно, что метод ВКБ позволяет получить очень точные значения вещественной части азимутальных волновых чисел, так как вещественные части поправок $\mathrm{Re}(\Delta\nu_m)$ – величины порядка 10^{-4}. Этот результат оправдывает использование теории возмущений для их расчета.

Мнимые части $\mathrm{Im}(\Delta\nu_m)$ волновых чисел также очень малы, и их влияние можно оценить, рассчитав величину $\Theta_m(2)$, которая представляет собой угловую меру дуги, при распространении вдоль которой амплитуда данной моды ШГ уменьшается вдвое. Напомним, что это уменьшение является следствием туннелирования акустических волн через криволинейную границу $r = r_2$ во внешнюю среду (т.е. утечки акустической энергии через эффективный барьер, показанный на Рис. 3.5). Значения $\Theta_m(2)$, приведенные в Таблице 3.2, показывают, что в реальных задачах радиационными потерями этого типа можно пренебречь. Действительно, потери, связанные с поглощением звука в донных породах, будут их заметно превышать.[14] Действительно, даже наивысшая мода ШГ, имеющая в нашем случае номер $m = 5$, исключительно медленно убывает при распространении вдоль изобаты, так что ее амплитуда уменьшается вдовое лишь при прохождении дуги, мера которой равна 113 градусов (в нашем случае эта величина соответствует пути вдоль изобаты протяженностью около 12 км).

[14] Хотя в данном исследовании мы их не рассматриваем, оценить потери на поглощение звука в дне можно элементарным образом, используя модальные коэффициенты затухания [73].

Кусочно-линейный радиальный батиметрический профиль (3.57)

Рассмотрим теперь функцию $k(r)$, соответствующую радиальному профилю $h(r)$, заданном на интервале $[r_1, r_2]$ линейной функцией (3.57). Заметим, методика анализа, использованная ниже, может быть применена и для батиметрического профиля, заданного произвольный функцией $h(r)$ на данном интервале. Вне его, однако, функция $h(r)$ считается константой, как и в предыдущем примере. В этом случае азимутальные волновые числа не могут быть определены из условия квантования ВКБ аналитически, и потому нам потребуется простой численный алгоритм, рассмотренный ниже. Вычисления в рамках этого алгоритма одинаковы для любой монотонной функции $h(r)$.

В этом случае лучи, соответствующие модам шепчущей галереи, должны иметь две точки поворота $r_{\min}$ и $r_{\max}$, где Φ_r равно нулю и, следовательно,

$$\nu = rk(r)\,.$$

Из Рис. 3.5 ясно, что азимутальные волновые числа ν для волн ШГ лежат в интервале $[\nu_{\min}, \nu_{\max}]$, где $\nu_{\min}$ и $\nu_{\max}$ суть минимальное и максимальное значения функции $rk(r)$ на интервале $[r_1, r_2]$. В этом случае мы также имеем $\varphi_{\max} = \varphi_{\min} = -\pi/2$ [172] (на этот раз первое условие является точным, а не приближенным, как в предыдущем разделе), и значения ν_m могут быть найдены из следующего условия квантования

$$\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{(k(r))^2 - \frac{\nu^2}{r^2}}dr = \pi(m + 1/2)\,, \tag{3.79}$$

Для расчета ν_m мы вводим очень мелкую сетку $\{\nu^i\}$ на интервале $[\nu_{\min}, \nu_{\max}]$. После этого интеграл (3.79)) рассчитывается численно для всех значений ν^i из интервала от $r_{\min}(\nu^i)$ до $r_{\max}(\nu^i)$). При этом в каждом случае пределы интегрирования суть точки пересечения графика функции $rk(r)$ с горизонтальной прямой $\zeta(r) = const = \nu^i$. Эти точки показаны маленькими кружками на Рис. 3.5 (иными словами, эти точки представляют собой два решения уравнения $rk(r) = \nu^i$). Найдем теперь точки сетки ν^i, в которых монотонная функция

$$M(\nu) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{(k(r))^2 - \frac{\nu^2}{r^2}} dr - \frac{1}{2} \tag{3.80}$$

принимает целые значения, т.е. ν_m такие что $M(\nu_\ell) = \ell = 0, 1, 2, \ldots$.

Таблица 3.3 содержит результаты расчета азимутальных волновых чисел для радиального батиметрического профиля (3.57) и значений параметров среды из нашего примера. В таблице также представлены значения ширины колец локализации энергии мод $w_m = r_{\max} - r_{\min}$ и угловые величины циклов лучей β_m. Горизонтальные лучи, изображенные на Рис. 3.6, в точности соответствуют азимутальным волновым числам ν_m из Таблицы 3.3.

m	0	1	2
ν_m	2288,6	2281,9	2276,0
w_m, м	83,9	166,0	232,7
β_m, град	21,65	28,48	33,81
$\mathrm{Re}(\Delta\nu_m)$	0,123	0,250	-0,053
$\mathrm{Im}(\Delta\nu_m)$	$4,80 \cdot 10^{-5}$	$1,61 \cdot 10^{-2}$	$3,89 \cdot 10^{-1}$
$\Theta_m(2)$, $^\circ$	$8,27 \cdot 10^5$	2471	102

Таблица 3.3. Азимутальные волновые числа ν_m мод шепчущей галереи для батиметрии, описываемой формулой (3.57), а также соответствующие им значения ширины w_m колец локализации акустической энергии и циклы лучей β_m.

В этом случае точность решения ВКБ также может быть улучшена с помощью теории возмущений. После такого уточнения для расчета радиальных модовых функций $R_\nu(r)$ может быть применен метод стрельбы. Зафиксируем некоторое значение $\nu = \nu_m$ и вычислим решение уравнения (3.65) с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка на интервале $[r_1, r_2]$, стартуя с точки

$r = r_1$ и используя начальные условия

$$R_\nu|_{r=r1} = J_\nu(k^{(1)} r_1)\,,$$

$$\left.\frac{dR_\nu}{dr}\right|_{r=r1} = k^{(1)} J'_\nu(k^{(1)} r_1)\,.$$

После этого выполним сшивку полученного решения $R_\nu(r_2)$ и его производной $R'_\nu(r_2)$ в точке $r = r_2$ с функцией Ганкеля из (3.67) и ее производной:

$$R_\nu(r_2) = \alpha_\nu H^{(1)}_\nu(k^{(2)} r_2)\,,$$

$$R'_\nu(r_2) = \alpha_\nu k^{(2)} H^{(1)\prime}_\nu(k^{(2)} r_2)\,.$$

Вычисляя α_ν из любого из этих условий, мы тем самым определим функции $R_{\nu_m}(r)$ для всех значений $r \in (0, +\infty)$ (численное решение на интервале $[r_1, r_2]$ и функции Бесселя и Ганкеля вне его). Радиальные модовые функции для для мод ШГ с азимутальными волновыми числами из Таблицы 3.3 показаны на Рис. 3.11.

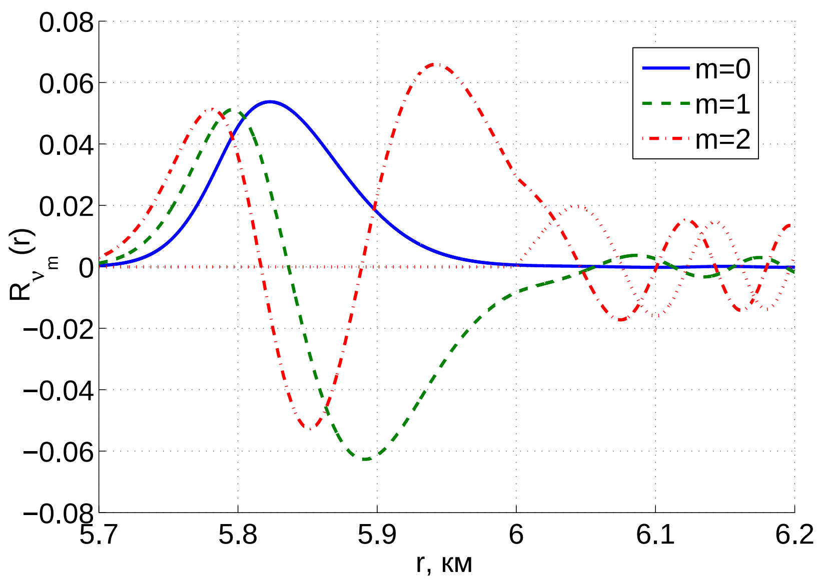


Рис. 3.11. Радиальные профили мод ШГ $\mathrm{Re}(R_{\nu_m}(r))$, соответствующие $m = 0, 1, 2$ (см. Таблицу 3.3). $\mathrm{Im}(R_{\nu_m}(r))$ равны нулю для $r < r_2$, но хорошо видны для высших мод при $r > r_2$. Например, здесь точечная линия изображает $\mathrm{Im}(R_{\nu_3}(r))$.

Заметим, что азимутальные волновые числа в этом случае должны удовлетворять трансцендентному уравнению

$$\frac{R_\nu(r_2)}{R'_\nu(r_2)} = \frac{1}{k^{(2)}} \frac{H_\nu^{(1)}(k^{(2)} r_2)}{H_\nu^{(1)\prime}(k^{(2)} r_2)}\,. \tag{3.81}$$

Как и в предыдущем разделе, собственные значения ν_m, удовлетворяющие дисперсионному соотношению (3.81), непременно должны быть комплексными. Из Рис. 3.12, где выражения из левой и правой частей равенства (3.81) показаны как функции ν, однако, хорошо видно, что, мнимая часть последней пренебрежимо мала в сравнении с вещественной частью для значений ν_m, вычисленных по методу ВКБ. В то же время, вещественные части выражений слева и справа в (3.81)) почти в точности совпадают при $\nu = \nu_m$. Таким образом, видно, что азимутальные волновые числа из Таблицы 3.3 вычислены достаточно точно.

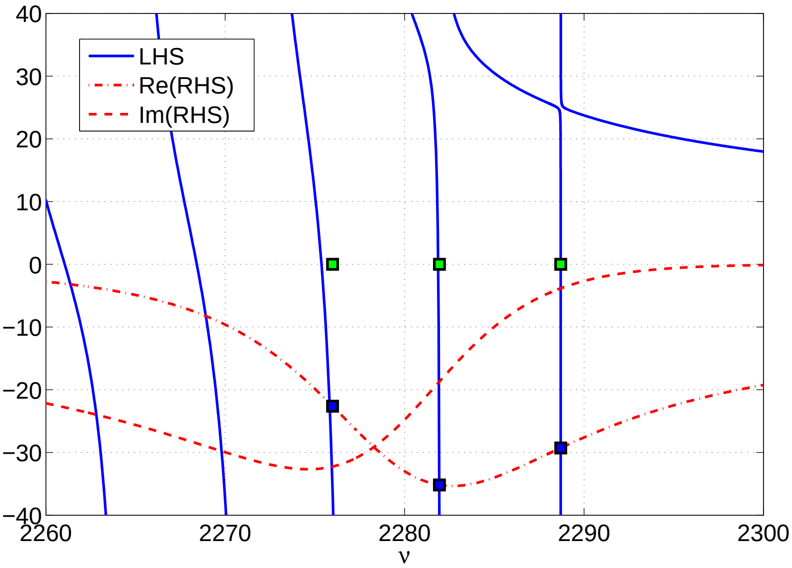


Рис. 3.12. Решения дисперсионного уравнения (3.81) в случае, когда батиметрия задана функцией(3.57) (для третьей вертикальной моды). Сплошная линия соответствует выражению в левой части равенства (3.81), а вещественная и мнимая части выражения справа в (3.81) изображены штрихпунктирной и пунктирной линиями соответственно. Маркерами отмечены решения ν, полученные с помощью метода ВКБ.

3.4.7. Поле, формируемое волнами шепчущей галереи, возбуждаемыми точечным источником звука

Рассмотрим теперь методику расчета компоненты $P_{WG}(x, y, z)$ акустического поля, захваченного волноводом шепчущей галереи в горизонтальной плоскости и возбуждаемого точечным тональным источником звука (для краткости мы будем называть эту компоненту полем ШГ). Из уравнений (3.63) и (3.45) мы получаем разложение

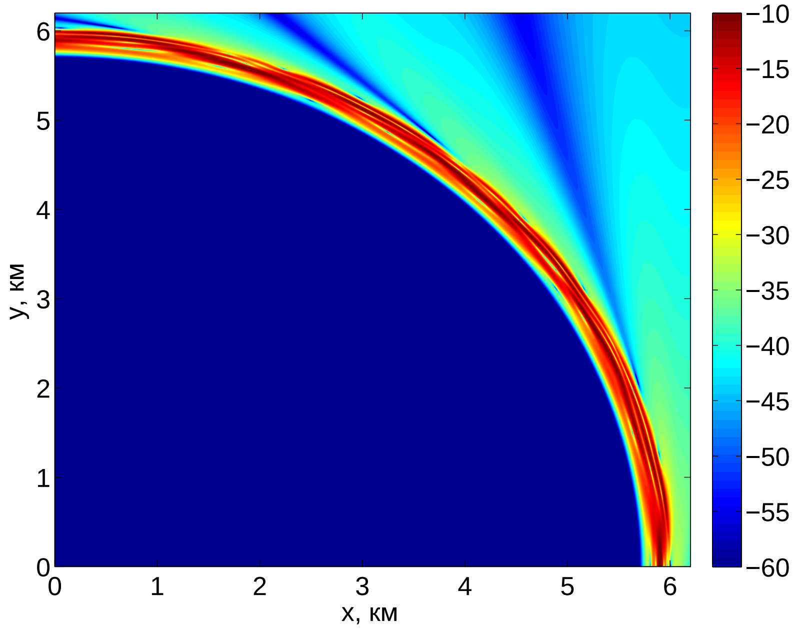
$$P_{WG}(x, y, z) = \sum_{j,\nu} C_{j\nu} \phi_j(r, z) R_{j\nu}(r) \mathrm{e}^{i\nu\theta}\,, \tag{3.82}$$

где $C_{j\nu}$ суть коэффициенты возбуждения мод ШГ для данной вертикальной моды с номером j. В отличие от предыдущих разделов здесь мы будем связывать радиальные моды ШГ $R_{j\nu}(r)$ с соответствующими вертикальными модами $\phi_j(r, z)$, явно указывая индекс j во всех формулах.

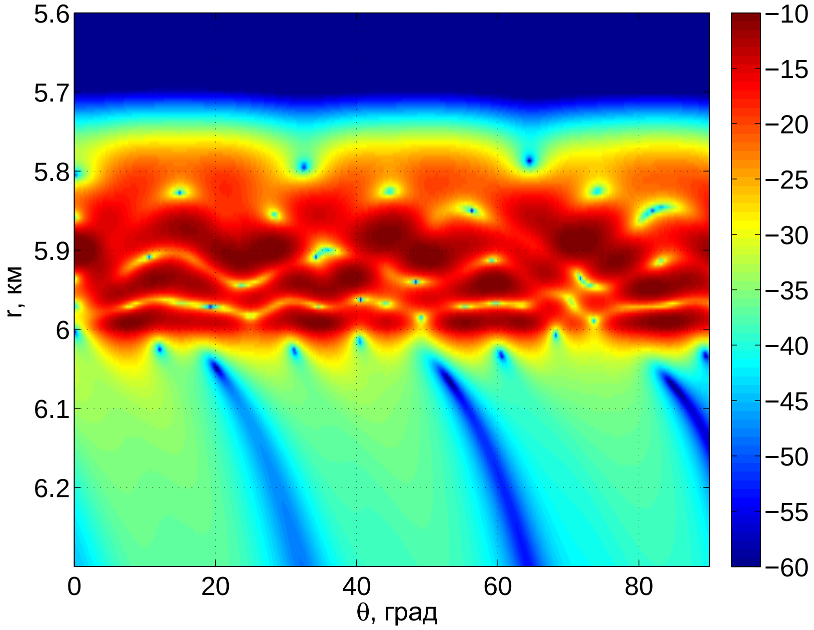
Подставляя разложение (3.82) в трехмерное уравнение Гельмгольца (1.18) и используя ортогональность вертикальных модовых функций $\phi_j(r, z)$, а также условие ортогональности для радиальных мод $R_{j\nu}(r)$ (см. формулу (3.68)), мы получаем, что

$$C_{j\nu} = \frac{i R_{j\nu}(r_s) \phi_j(z_s)}{2\rho(z_s) \langle R_{j\nu}, R_{j\nu} \rangle}\,. \tag{3.83}$$

Уравнения (3.82) и (3.83) применимы для вычислений при любой монотонной функции $h(r)$, описывающей радиальный батиметрический профиль (необходимо лишь вычислить модовые функции волновода ШГ). В качестве примера мы рассчитаем поле ШГ для ступенчатого батиметрического профиля (3.56) (разумеется, мы будем использовать те же значения параметров, что и во всех прочих вычислениях в этом разделе). На Рис. 3.13 представлены результаты расчета акустического поля, формируемого в волноводе ШГ точечным источником звука с частотой 120 Гц, расположенного в точке $r = r_s = 5900$ м, $z = z_s = 10$ м, $\theta = \theta_s = 0$. Расчеты выполнены по формулам (3.82) и (3.83). Из рисунка ясно, что поле ШГ $P_{WG}(x, y, z)$ действительно локализовано в горизон-



(*а*) координаты x, y



(*б*) декартовы координаты с осями r, θ

Рис. 3.13. Контурный график компоненты звукового поля P_{WG} (в дБ отн. 1 м) точечного источника, сформированной волнами шепчущей галереи в плоскости $z = z_s$ для радиального батиметрического профиля (3.56) в координатах x, y (а) и в декартовой системе координат с осями r и θ (б). Расчеты выполнены по формуле (3.82).

тальной плоскости в окрестности изобаты $r = r_2$. Отметим также, что уровень звукового поля в волноводе ШГ не обнаруживает сколь-нибудь существенного уменьшения с увеличением расстояния от источника вдоль изобаты. Этот факт, очевидно, является следствием захвата акустической энеригии волноводом в горизонтальной плоскости (а также следствием того, что радиационные потери на туннелирование волн через криволинейную границу малы), что устраняет цилиндрическую расходимость, характерную для решения двумерного уравнения Гельмгольца в однородной среде.

Еще раз подчеркнем, что хотя внешняя граница волновода ШГ образована конечным скачком горизонтального показателя преломления (стандартный механизм), внутренняя сформирована каустиками горизонтальных лучей. Из Рис. 3.13(а) также хорошо видно, что акустическая энергия медленно просачивается через внешнюю границу. Эта утечка энергии происходит вследствие присутствия мнимой части во всех значениях ν, а также из-за того, что радиальные моды являются медленно затухающими осциллирующими функциями на интервале $(r_2, +\infty)$ (функции Ганкеля первого рода). Утечка также может рассматриваться как проявление того известного из оптики факта, что на криволинейной границе раздела двух сред не может наблюдаться полного внутреннего отражения [175].

Чтобы подчеркнуть сходство между радиальными модами ШГ и вертикальными модами в мелководном волноводе, на Рис. 3.13(б) также показан контурный график поля $P_{WG}(r, \theta)$ при $z = z_s$ в декартовой системе координат с осями r, θ. Представленная интерференционная картина явно напоминает вертикальный разрез акустического поля в мелком море с горизонтальным дном.

Хотя вычисленная нами компонента P_{WG} не дает полной картины поля вблизи от источника, она очень точно отражает его структуру на расстояниях от него, значительно превышающих горизонтальную длину волны. Это расстояние должно быть достаточным, чтобы считать пренебрежимым вклад от нелокализованной части поля точечного источника, соответствующей всем значениям ν, которые не связаны с модами ШГ, поскольку наш расчет звукового поля P_{WG} по формуле (3.82) учитывает только вклад волн ШГ. В следующей главе настоящей диссертации (а также в работе [60]) показано, как получить полное решение задачи распространения звука в волноводе с чашеобразным дном, включающее в себя как волны ШГ, локализованные в окрестности изобаты, так и компоненту решения, сформированную расходящимися волнами.

3.4.8. Обсуждение результатов

В данном разделе представлен теоретический анализ волн шепчущей галереи, образующихся в результате горизонтальной рефракции в мелководном волноводе с различными радиальными батиметрическими профилями. Мы рассмотрели здесь необходимые условия, которым должны удовлетворять неоднородности батиметрии, чтобы формирование таких волн ШГ стало возможным. Например, если батиметрия описывается функцией $h(x, y)$, волны ШГ могут формироваться, когда вектор градиента этой функции направлен к центру кривизны изобат $h(x, y) = const$. В этом случае возможно возбуждение звуковых волн, локализованных в горизонтальной плоскости вблизи изобаты. Данный эффект можно количественно описать с использованием горизонтальных лучей или в терминах азимутальных волновых чисел и радиальных (горизонтальных) мод, которые мы и называем модами ШГ, ввиду их очевидной схожести с волнами этого типа в архитектурной акустике. Нами также были оценены соответствующие горизонтальные циклы лучей, а также размеры колец в горизонтальной плоскости, в которых локализована энергия таких волн. Один интересный вопрос, возникающий здесь, касается возможности экспериментального наблюдения волн (мод) ШГ. Проиллюстрируем эту проблему, используя Рис. 3.5 для рассмотренного в наших примерах волновода (глубина $h \sim 26$ м, $f = 120$ Гц, $r_2 = 6$ км). Предполагается, что угловое расстояние между источником и приемником составляет $\pi/2$, а кратчайшее расстояние (т.е. расстояние вдоль хорды) – $r_2\sqrt{2} \sim 8{,}4$ км. В этом случае сигнал, излучаемый при $t = 0$, создает следующие две группы приходов в точке приема.

1. Набор прямых приходов в окрестности $t \sim 6.4$ с, соответствующих отдельным вертикальным модам (в нашем случае их три), распространяющимся приблизительно по прямой с задержками около $\Delta t \sim 0,1$ с между ними.

2. Несколько приходов, соответствующих модам ШГ (для вертикальной моды номера $j = 3$), распространяющихся вдоль изобаты (длина этого пути составляет $R\pi/2 \sim$ 9,4 км). Времена прихода в этом случае будут составлять в среднем около $7,2$ с (они будут мало отличаться для различных мод ШГ), причем задержка относительно сигнала с прямолинейным распространением составит $\sim$ 0,6-0,8 с.

Эта задержка, наряду с расплыванием импульса, распространяющегося в волноводе ШГ для $j = 3$, во времени (в результате небольшой разницы в тангенциальных групповых скоростях мод ШГ), может служить экспериментальным подтверждением формирования такого волновода. Заметим, что такое проявление волн ШГ следует отличать от единичного отражения в горизонтальной плоскости, также приводящего к появлению второго прихода с большей интенсивностью для данной вертикальной моды. Такая множественность приходов для четвертой моды в результате отражения в горизонтальной плоскости от фронта внутренних волн наблюдалась, в частности, в эксперименте SW06 [138].

Кроме того, как было упомянуто в конце раздела 3.4.2, интенсивность сигнала, переносимого модами ШГ, должна быть значительно выше, чем интенсивность, соответствующая прямолинейному пути распространения. В рассмотренном нами примере, это превышение должно составлять около 12,5 дБ. При наличии поглощения в дне возможна ситуация, когда в точке приема можно будет наблюдать только сигнал, распространяющийся вдоль ШГ.

Вполне естественно также задаться вопросом, какая функция $h(r)$ на интервале $[r_1, r_2]$ обеспечивает наилучшие условия для захвата акустической энергии в окрестности круговой изобаты для данной разности глубин $h_2 - h_1$ на концах отрезка. Из наших вычислений следует, что, по-видимому, ступенчатая функция, определенная (3.56), обеспечивает наилучшие условия для формирования шепчущей галереи при данном перепаде глубин. Более общо, можно сказать, что волноводом ШГ будет захватываться тем больше акустической энергии, чем более крутые наклоны дна имеются на определенных подынтервалах $[r_1, r_2]$. В этом смысле мы рассмотрели здесь два экстремальных варианта вариаций рельефа дна, поскольку производная линейно убывающей функции глубины не имеет точек, где она больше, чем ее среднее значение на интервале $[r_1, r_2]$ (таким образом, в одном из наших примеров вариации глубины сосредоточены при $r = r_2$, а в другом – равномерно распределены по всему интервалу).

Отметим еще, что на формирование волновода ШГ оказывает влияние и профиль скорости звука в водном слое. Некоторые наши предварительные оценки показывают, что наличие термоклина (когда скорость звука у поверхности выше, чем вблизи дна) приводит к увеличению концентрации акустической энергии в придонном слое, и, следовательно, к более выраженному проявлению горизонтальной рефракции на наклонном дне.

Несколько более сложным является вопрос о том, какие звуковые частоты более оптимальны для возбуждения волн ШГ. Для фиксированного номера моды j соответствующие горизонтальные лучи более чувствительны к изменениям рельефа дна для звука более низких частот. Это означает, что для j-й моды источники звука с более низкими частотами с большей вероятностью возбудят горизонтальные моды ШГ (при условии, что частота все еще выше частоты отсечки j-ой моды). Для любой наперед заданной частоты, однако, именно поле последней вертикальной моды (то есть моды с наименьшим k_j или наибольшим номером моды j) более всех подвержено влиянию горизонтальной рефракции. Таким образом, если мы рассмотрим вертикальную моду наивысшего номера j для всех частот звука в спектре источника, то количество мод шепчущей галереи для данного батиметрического профиля оказывается немонотонной функцией частоты.

Также, как и в разделе 3.3, формула (3.82), разумеется, не дает полного решения уравнения Гельмгольца (1.15) в волноводе мелкого моря с чашеобразным участком дна. Тем не менее, нами показано, что при удалении от точки излучения вдоль закругленной изобаты в сформированном в волноводе поле будет доминировать именно компонента, описываемая этой формулой. Этот факт будет дополнительно проверен в следующей главе путем решения этой же задачи методом псевдодифференциального модового параболического уравнения (ПДМПУ) (см. раздел 4.6.6). Хотя оба эти решения и получены в адиабатическом приближении, в четвертой главе диссертации показано, что при распространении вдоль изобаты ПДМПУ обеспечивает исключительно высокую точность расчета поля, и что вклад взаимодействия мод в этом случае пренебрежимо мал.

В завершение данного раздела заметим еще, что формально построенные нами моды ШГ, а также их комбинация (3.82) удовлетворяют условию излучения (1.25), поскольку $P_{WG}(x, y, z)$ является по определению составляющей j-ой модальной компоненты поля P_j (см. условие (1.25)), состоящей при $r \to \infty$ из слагаемых вида $\phi_j(r_2, z)H_\nu^{(1)}(k^{(2)}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\theta}$, каждое из которых удовлетворяет (1.25) равномерно по θ. Действительно, фактически мы учли это условие при выборе решения уравнения Бесселя, в которое вырождается уравнение (3.65) при $r > r_2$. Внимательное рассмотрение вывода решения, однако, показывает, что на самом деле при постановке задачи мы ограничились и здесь физическим уровнем строгости, поскольку не были наложены условия на вариации батиметрии за пределами условного сектора, показанного на Рис. 3.3, в котором и вычислялось поле. Мы лишь потребовали, чтобы в нашем волноводе существовали только волны, распространяющиеся в положительном направлении θ (т.е. против часовой стрелки, или от источника к границе сектора). Это требование было зафиксировано путем выбора знака в показателе экспоненты в (3.66). Еще раз подчеркнем, что, вообще говоря, условие (1.25) обеспечивает существование и единственность решения краевой задачи для трехмерного уравнения Гельмгольца только в случае, когда стратификация среды (в частности, поведение функции $h(r)$) при $r \to \infty$ не зависит от направления θ.

3.5. Выводы к третьей главе

Данная глава является краеугольным камнем настоящего диссертационного исследования. В ней описание круга физических явлений, связанных с горизонтальной рефракцией звука на неоднородностях дна в мелком море, обособляется от прочих эффектов, связанных с распространением акустических волн, путем отделения координаты z и получения двумерных уравнений Гельмгольца, которые описывают исключительно распространение поля по горизонтали.

Сам по себе этот подход не является новым [3, 73], и потому основным элементом научной новизны, содержащимся в данной главе, является демонстрация того факта, что горизонтальная рефракция при определенных условиях может приводить к формированию у поля *горизонтальной модовой структуры*. Ранее такая структура обсуждалась, например, в работах [168, 169, 173], однако условия для ее формирования в этих работах были связаны с гидрологическими неоднородностями весьма специфического вида (мы позволим себе назвать эти условия довольно экзотическими). В нашем же случае главным фактором формирования модовой структуры поля в плоскости (x, y) являются неоднородности дна весьма характерных типов. В разделе 3.3 в качестве такой неоднородности выступал подводный каньон, а в разделе 3.4 модовая структура была обусловлена чашеобразным рельефом дна. Элементы рельефа такого рода можно встретить практически на любых акваториях как в океане, так и, например, в озерах. По этой причине мы полагаем, что представленным здесь результатам присуща некоторая значимость и универсальность.

На протяжении этой главы мы также старались всячески подчеркнуть возможность двоякого описания горизонтальной рефракции, которое можно строить как с помощью прямого исследования двумерного уравнения Гельмгольца для модовых амплитуд (уравнения горизонтальной рефракции), так и с использованием теории горизонтальных лучей, которая во многих случаях дает необходимую для понимания этого явления физическую интуицию. Отметим также, что рассмотрение горизонтальных лучей позволяет установить связь волновой картины явлений (вертикальные моды и волновые уравнения для модовых амплитуд) и трехмерной лучевой теории распространения звука в мелком море с неоднородным дном, опирающуюся на лучевые инварианты Вестона.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [38, 45, 60].

На результаты этой главы опирается следующее выносимое на защиту положение

- Для моделей волноводов мелкого моря с чашеобразным дном и с подводным каньоном установлены достаточные условия, при которых горизонтальная рефракция приводит к формированию модовой структуры звукового поля в горизонтальной плоскости и локализации акустической энергии в окрестности семейства изобат, определяющих указанные неоднородности батиметрии. Выполнен качественный и количественный анализ интерференционной картины, формируемой горизонтальными модами в этих случаях.

Глава 4

Уравнения однонаправленного распространения для модовых амплитуд

Как было показано в предыдущей главе, представление акустического поля в трехмерном волноводе мелкого моря в виде суперпозиции локальных вертикальных мод приводит к двумерным уравнениям Гельмгольца для модовых амплитуд (3.19), которые мы называем уравнениями горизонтальной рефракции.

Они являются уравнениями эллиптического типа, и краевые задачи для них, как правило, формулируются на бесконечных областях (не имеющих физических границ) с использованием условий излучения при $r \to \infty$. Все это делает уравнения горизонтальной рефракции сами по себе неудобными для численного решения с помощью конечноразностных и конечноэлементных дискретизаций. По этой причине с тех пор, как эти уравнения впервые появились в литературе в 60-70-х годах двадцатого века, для их решения было предложено много различных методов. Так Барридж и Вайнберг применили для решения уравнений горизонтальной рефракции лучевую теорию [3], а спустя почти 20 лет Коллинз впервые предложил аппроксимировать их решения с помощью метода параболического уравнения [35]. В недавних работах Трофимова и его соавторов эти подходы в некотором смысле были объединены в рамках теории суммирования модовых гауссовых пучков.

Параболические аппроксимации для уравнений горизонтальной рефракции называются обычно *модовыми параболическими уравнениями* (МПУ). Как было отмечено выше, МПУ были впервые предложены Коллинзом в статье 1993 года [35]. Для их вывода Коллинз использовал метод аппроксимации операторного квадратного корня с помощью ряда Тейлора. Несколько позже МПУ были независимо выведены Трофимовым [36] путем использованием метода многих масштабов. В обеих пионерских работах члены, ответственные за взаимодействие мод, были опущены и, таким образом, МПУ из работ [35, 36] описывают адиабатическое распространение звука. Заметим также, что полученные в обеих этих работах МПУ были узкоугольными. В работе Абави и его соавторов [181], а также в последующих работах Трофимова [105] были предложены и МПУ, учитывающие взаимодействие акустических мод при распространении. Из работы Трофимова и соавторов [105], однако, следует, что узкоугольные МПУ, даже учитывающие взаимодействие мод, недостаточны для адекватного моделирования эффектов, связанных с горизонтальной рефракцией, в некоторых задачах. Модовые параболические уравнения использовались при анализе результатов натурных экспериментов, например, работах [17, 19, 182, 183].

В различных публикациях неоднократно предпринимались попытки вывода широкоугольных МПУ (ШМПУ). В этой связи можно упомянуть, например, работы [158, 181, 184]. Улучшения, обеспечиваемые широкоугольными МПУ по сравнению с узкоугольными, играют важную роль в практических задачах, где необходимо учитывать горизонтальные лучи с углами выхода из источника, превышающими 8 градусов (имеется в виду угол α из начальных условий для системы Гамильтона (3.24), описывающей горизонтальные лучи). Эти углы выхода, таким образом, находятся за рамками апертуры узкоугольного МПУ.

Вообще говоря, МПУ могут быть легко решены с помощью в точности тех же численных методов, что используются для решения уравнения Шредингера в квантовой механике или для решения параксиальных уравнений в оптике и радиофизике (математически МПУ полностью эквивалентно этим уравнениям), например, метод Крэнка-Николсон или спектральный метод с расщеплением шага [73, 184][1] Заметим, что вычислительные алгоритмы для решения узкоугольных и широкоугольных МПУ имеют практически одинаковую сложность [184], так что для численного решения практических задач акустики име-

[1] Мы имеем в виду метод, известный в англоязычной литературе как SSF – Split-step Fourier. Автору диссертации не известно устоявшееся наименование этого метода на русском языке.

ет смысл пользоваться именно последними. С нашей точки зрения именно МПУ являются наиболее эффективным инструментом численного решения практических задач акустики океана, поскольку они значительно эффективнее, например, трехмерных параболических уравнений, однако существенно более универсальны и удобны для реализации, чем, например, лучевые методы. Коротко вопросы, связанные с численным решением МПУ, будут рассмотрены в последнем разделе этой главы.

Несмотря на то, что узкоугольные МПУ практически не имеет смысла решать численно (поскольку во всех отношениях более предпочтительным является выбор ШМПУ), они все же позволяют получить ряд интересных с точки зрения исследования явления горизонтальной рефракции результатов, так как во многих важных задачах узкоугольные МПУ допускают аналитическое решение с использованием теоретико-групповых методов[47, 51, 55]. Простейшим примером задачи, которая может быть решена аналитически с помощью МПУ является задача о распространении звука в прибрежном клине, рассмотренная в [47]. При этом решение получено в виде суперпозиции локальных модовых функций, коэффициенты которых (модовые амплитуды) могут быть выражены в элементарных функциях. Результаты работы [47] могут быть обобщены на существенно более широкий класс задач, где рельеф дна, описывается параметрическими квадратичными функциями [51, 55]. Для такого обобщения необходимо применить метод Вея-Нормана [185] для построения решений соответствующего эволюционного операторного уравнения (см. ниже). В частности, таким образом можно получить решение задачи о распространении звука над подводным хребтом. Аналитические выражения для модовых амплитуд, полученные нами, позволяют при этом провести качественное исследование этого решения.

Большая часть данной главы посвящена построению аналитических решений модовых параболических уравнений. В нашем изложении мы будем следовать работам [47, 51, 55]. Отметим, что до появления этих работ аналитических решений трехмерных задач акустики океана практически не существовало.[2]

4.1. Вывод узкоугольного модового параболического уравнения и некоторые его упрощения

Существует несколько способов вывода МПУ, основанных на применении существенно отличающихся математических методов. В нашей диссертации мы будем следовать подходу, описанному в работах Коллинза, Абави и Купермана [35, 181]. В рамках этого подхода, фактически берущего свое начало в работах основоположников метода параболического уравнения Леонтовича и Фока [186], МПУ выводится непосредственно из уравнения горизонтальной рефракции (3.19).[3] Для нас такая стратегия вывода удобна, в частности, тем, что позволяет установить очень четкую связь с результатами предыдущей главы. Отметим однако, что в работе Трофимова [36] показано, что МПУ можно получить непосредственно из трехмерного уравнения Гельмгольца (1.18) с помощью многомасштабных разложений. Узкоугольное МПУ также было выведено (по-видимому, независимо от упомянутых выше авторов) в работе Кацнельсона и Переселкова [16]. Развитая в ней методика моделирования горизонтальной рефракции звука на цуге внутренних волн (в случае, когда акустическая трасса ориентирована приблизительно поперек направления их распространения) в дальнейшем с успехом использована, например, в работах [19, 188].

Поскольку уравнение (3.19) получено в адиабатическом приближении [159], то и полученные из него МПУ заведомо не учитывают взаимодействие мод. Узкоугольное МПУ, которое допускает передачу энергии от одних мод к другим в

[2] Исключением является решение задачи о прибрежном клине, основанное на использовании метода изображений, описанное в первой главе. Заметим однако, что и это решение из-за своей неявной формы практически не дает качественного понимания того, как именно неоднородности дна формируют трехмерную интерференционную картину поля.

[3] В подводной акустике этот метод был впервые использован Таппертом [187] для вывода двумерного узкоугольного параболического уравнения в вертикальной плоскости (в координатах r, z).

процессе распространения звука, получено в работе [105]. Основанная на этом уравнении модель распространения звука, в частности, использовалась в работах [20, 189, 190].

Рассмотрим вновь представление решения уравнения Гельмгольца в виде суперпозиции (локальных) вертикальных мод (3.14), введенное в предыдущей главе. Напомним, что в этом случае коэффициенты модового разложения (модовые амплитуды) в адиабатическом приближении удовлетворяют уравнению (3.19) (которое мы пока будем считать однородным, т.е. удалим функцию источника из правой части). Вывод параболических уравнений традиционно начинается с удаления из решений этого уравнения главной осцилляции $\exp(-ik_{j,0}x)$, где $k_{j,0}$, как и в прошлой главе, некоторое отсчетное значение горизонтального волнового числа. С этой целью мы вводим огибающую функцию $\mathcal{A}_j(x,y)$ для модовой амплитуды $A_j(x,y)$ согласно формуле

$$\mathcal{A}_j(x,y) = A_j(x,y)\exp(-ik_{j,0}x)$$

Уравнение для огибающей (в области, где нет источников звука), очевидно, будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_j}{\partial x^2} + 2ik_{j,0}\frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}_j}{\partial y^2} + (k_j^2 - k_{j,0}^2)\mathcal{A}_j = 0\,.$$

Как и прежде в качестве $k_{j,0}$ мы будем использовать значение горизонтального волнового числа в точке, где расположен источник звука: $k_{j,0} = k_j(0,0)$). Следуя [186, 187], мы можем отбросить первый член в уравнении $\mathcal{A}_j(x,y)$, ограничив наше рассмотрение волнами, которые распространяются под малыми углами к оси x. В результате мы получим параболическое уравнение следующего вида

$$2ik_{j,0}\frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}_j}{\partial y^2} + (k_j^2 - k_{j,0}^2)\mathcal{A}_j = 0\,. \tag{4.1}$$

Как и в случае уравнения горизонтальной рефракции, параметры среды входят в МПУ через посредство горизонтальных волновых чисел $k_j = k_j(x,y)$ (напомним, что при их расчете учитывается глубина, профиль скорости звука и структура слоев дна в данной точке (x,y)).

Если на некотором участке рассматриваемой акватории профиль скорости звука в воде можно считать постоянным, то волновые числа k_j удобно рассматривать как функцию глубины моря $h = h_0 + h_1(x, y)$. Исходя из этого, можно линеаризовать потенциал МПУ (4.1) относительно h_1 (подобно тому, как мы линеаризовали коэффициент в уравнении горизонтальной рефракции в задаче о подводной каньоне в предыдущей главе):

$$(k_j(x,y))^2 - k_{j,0}^2 = h_1 \left.\frac{d(k_j^2)}{dh}\right|_{h=h_0} + \frac{h_1^2}{2!} \left.\frac{d^2(k_j^2)}{dh^2}\right|_{h=h_0} + \dots . \tag{4.2}$$

Простая оценка скорости сходимости этого ряда может быть получена в случае волновода с постоянной скоростью звука и идеально отражающим дном $z = h$, на котором ставится условие Дирихле $p|_{z=h} = 0$ (условие мягкой границы). В этом случае $k_j^2 = \omega^2/c^2 - \pi^2 j^2/h^2$, и, таким образом,

$$\frac{\left| h_1 \cdot \left(d(k_j^2)/dh\big|_{h=h_0} \right) \right|}{\left| (h_1^2/2!) \cdot \left(d^2(k_j^2)/dh^2\big|_{h=h_0} \right) \right|} = \frac{3}{2}\frac{h_1}{h_0} \, . \tag{4.3}$$

Подобная оценка может быть получена и для следующих членов ряда (4.2). В дальнейшем мы часто будем сохранять лишь первый из них, предполагая, что выполняется условие $h_1 \ll h_0$. Из примеров в следующих разделах этой главы будет ясно, что такое приближение является достаточно адекватным для многих задач. Хотя в реальных волноводах мелкого моря с проницаемым дном и скоростью звука, зависящей от глубины, оценка (4.3) уже не является точной, отношение соседних членов ряда (4.2) все еще имеет порядок h_1/h_0 (это было проверено прямыми вычислениями).

Используя очевидную аналогию с квантовой механикой, введем следующее обозначение для потенциала $V(x, y)$ в МПУ, линеаризованном по вариациям глубины $h_1(x, y)$

$$(k_j(x,y))^2 - k_{j,0}^2 \approx -V(x,y) \equiv 2k_j \left.\frac{dk_j}{dh}\right|_{h=h_0} h_1(x,y) \, . \tag{4.4}$$

При этом МПУ (4.1) принимает вид

$$2ik_{j,0}\frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}_j}{\partial y^2} - V(x,y)\mathcal{A}_j = 0\,. \qquad (4.5)$$

Напомним (см. предыдущую главу), что коэффициент в линеаризованном по h_1 МПУ (4.5) можно вычислить по формуле

$$2k_j\,\frac{dk_j}{dh}\bigg|_{h=h_0} = (\phi_j(h_0^+))^2\left[\frac{1}{\rho(h_0^+)}\left(k_j^2 - \frac{\omega^2}{\left(c(h_0^+)\right)^2}\right) - \frac{1}{\rho(h_0^-)}\left(k_j^2 - \frac{\omega^2}{\left(c(h_0^-)\right)^2}\right)\right] - \left(\frac{1}{\rho(h_0^+)}\frac{d\phi_j}{dz}(h_0^+)\right)^2\left[\rho(h_0^+) - \rho(h_0^-)\right]\,, \qquad (4.6)$$

где выражения вида $F(h_0^-)$ и $F(h_0^+)$ используются для обозначения соответственно левого и правого пределов функции $F(z)$ (возможно, имеющей разрыв первого рода при $z = h_0$) при $z = h_0$ (более точно: $F(h_0^\pm) = \lim\limits_{z\to h_0\pm 0} F(z)$).

Для модовых параболических уравнений обычно ставят задачу Коши с начальным условием при $x = 0$. В работах [47, 105] было показано, что гауссово начальное условие следующего вида может быть использовано для моделирования звукового поля от точечного источника

$$\mathcal{A}_j(x,y)|_{x=0} = \mathcal{A}_{j,0}(y) = \bar{\mathcal{A}}_j\,\mathrm{e}^{-k_j^2 y^2}\,. \qquad (4.7)$$

Величина $\bar{\mathcal{A}}_j$ в (4.7) является константой и определяется равенством

$$\bar{\mathcal{A}}_j = \frac{\phi_j(z_s)}{2\sqrt{\pi}\rho_w}\,.$$

4.2. Аналитические решения узкоугольных модовых параболических уравнений

В этом разделе, являющемся средоточием основных результатов настоящей главы, мы рассмотрим несколько случаев, когда МПУ (4.5) допускает явное аналитическое решение. Простейшим примером такого рода является задача о распространении звука в волноводе с постоянным наклоном дна (прибрежном клиновидном волноводе)

$$h(x, y) = h_0 + \mathrm{tg}(\alpha) y\,. \tag{4.8}$$

Решение узкоугольного МПУ для этого случая было получено в работе [47]. Формально это решение имеет вид экспоненты от суммы двух некоммутирующих операторов, которая должна быть применена к начальному условию (4.7). Используя формулу Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа из теории групп и алгебр Ли, эту экспоненту суммы операторов можно представить в виде произведения экспонент слагаемых и их коммутаторов всех возможных порядков. Наша идея состоит в том, что если порождаемая коммутаторами алгебра Ли является нильпотентной, то такое произведение состоит из конечного числа сомножителей, что позволяет применить их всех к гауссовой функции из начального условия по очереди, как это описано ниже.

Используя методику решения эволюционных операторных уравнений Вея и Нормана [185], также основанную на теории групп и алгебр Ли, результаты работы [47] можно обобщить на существенно более широкий класс задач акустики мелкого моря, в которых батиметрия в окрестности трассы источник-приемник описывается параметрической квадратичной функцией вида

$$h(x, y) = h_0 + h_1(x, y) = h_0 + p_2(x) y^2 + p_1(x) y + p_0(x)\,, \tag{4.9}$$

где h_0 есть глубина моря в точке расположения источника. Коэффициенты $p_i(x)$ квадратичного полинома по y в уравнении (4.9) могут быть произвольными медленно меняющимися гладкими функциями x (первое условие необходимо, чтобы не нарушались условия применимости адиабатического приближения). Такое обобщение было выполнено нами в работах [51, 55]. Важные примеры волноводов, в которых батиметрия описывается функциями вида (4.9), включают в себя, в частности, мелкое море с подводным хребтом и с квадратичным наклоном дна. Очевидно также, что и произвольная гладкая медленно меняющаяся функция $h(x, y)$, описывающая зависимость глубины моря от горизонтальных координат x и y, может быть аппроксимирована квадратичным полиномом по y вида (4.9) в некоторой достаточно малой области, содержащей источник. Таким образом, по крайней мере локально (4.9) может рассматриваться как функция, описывающая рельеф дна общего вида. Отметим, что МПУ (4.5) формально является эквивалентным нестационарному уравнению Шредингера (с точностью до линейной замены переменных) с квадратичным параметрическим потенциалом [191]..

Необходимо также отметить, что на достаточно большом удалении от рассматриваемой акустической трассы $y = 0$ вариации батиметрии, описываемые уравнениями (4.8) и (4.9) могут стать сколь угодно большими (ввиду поведения квадратичной и линейной функций при $|y| \to \infty$), и общая глубина $h(x, y)$ может даже оказаться отрицательной. Разумеется, для таких точек разложение (4.4) уже неприменимо. Таким образом, мы должны дополнительно предположить, что коэффициенты p_2, p_1, p_0 в (4.9) или угол α в (4.8) достаточно малы внутри некоторой полосы $-L < y < L$ в горизонтальной плоскости, и что их вариации вне этой полосы не влияют на структуру решения в окрестности прямой $y = 0$. Данное условие может показаться не вполне четко обозначенным, и потому мы переформулируем его следующим образом. Будем считать, что вариации батиметрии (4.9) и (4.8) таковы, что ни для одной водной моды, генерируемой источником, в полосе $-L < y < L$ не достигается глубина отсечки, и что горизонтальные лучи, однажды покинувшие эту полосу, не возвращаются на линию $y = 0$ при всех значениях x, лежащих между источником и приемником. В свою очередь, это условие может показаться чересчур ограничительным, однако, как показано в серии работ [41, 47, 51, 55], метод МПУ позволяет получить очень точное описание трехмерной структуры звукового поля в очень многих ситуациях. Отметим, что вопросы применимости узкоугольного параболического уравнения для вертикальной стратификации, описываемой линейной и квадратичной функциями, ранее рассматривались в работе [192].

4.2.1. Распространение звука в клине и применение формулы Хаусдорфа

Мы начнем построение аналитических решений МПУ с относительно простого случая, когда батиметрия описывается формулой (4.8) (прибрежный клиновидный волновод). Может показаться, что в построении решения МПУ в этом случае нет никакого практического смысла, так как эта задача может быть решена методом изображений (см. первую главу настоящей диссертации), для применения которого требуется существенно меньше разного рода предположений (в частности, не требуется пренебрегать взаимодействием мод). Решение этой задачи с помощью МПУ, однако, позволяет учесть, например, зависимость скорости звука в воде от глубины. Кроме того, если иметь в виду использование аналитических решений для тестирования численных методов моделирования распространения звука, то решение МПУ обладает тем важным преимуществом, что его можно вычислить практически мгновенно (по сравнению с решением с помощью метода изображений, которое даже для одной частоты в 25 Гц требует расчетов продолжительностью несколько часов). Кроме того, в отличие от метода изображений, решение МПУ, благодаря своему явному виду, дает гораздо лучшую картину явления горизонтальной рефракции звука в мелком море.

В случае, когда батиметрия задана формулой (4.8) (постоянный наклон дна), для каждого номера вертикальной моды $1 \le j \le N_m$, МПУ (4.5) может быть переписано в виде

$$2ik_j\partial_x\mathcal{A}_j + \partial_y^2\mathcal{A}_j + (b_jy + a_j)\mathcal{A}_j = 0\,, \tag{4.10}$$

где $b_j = \mathrm{tg}(\alpha)2k_j \left.\frac{dk_j}{dh}\right|_{h=h_0}$ есть константа (очевидно, для мод разных номеров значения этих констант различны), в которой производная горизонтального волнового числа определяется формулой (4.6). Константа a_j в уравнении (4.10) представляет собой коэффициент затухания j-ой моды и определяется соотношением

$$a_j = 2i\eta\beta_b k_b^2 \int\limits_{h_0}^{\infty} \frac{\phi_j^2(z)}{\rho_b} \mathrm{d}z = \frac{i\eta\beta_b k_b^2}{\rho_b C_j^2 \kappa_{b,j}} \sin^2(\kappa_{w,j} h_0)\,. \tag{4.11}$$

Решение МПУ вида (4.10), удовлетворяющее заданному начальному условию $\mathcal{A}_j(x,y)|_{x=0} = \mathcal{A}_{j,0}(y)$, может быть формально представлено в виде экспоненты

$$\mathcal{A}_j(x,y) = \mathrm{e}^{i\hat{H}_j x} A_{j,0}(y)\,, \tag{4.12}$$

оператора Гамильтона $\hat{H}_j = \frac{1}{2k_j}(\partial_y^2 + b_j y + a_j)$, примененной к $\mathcal{A}_{j,0}(y)$.

Очень элегантный способ вычисления результата действия операторной экспоненты на начальное условие в явном виде состоит в применении операторных формул выпутывания из некоммутативного анализа [193].[4]

Перепишем уравнение (4.12) в виде

$$\mathcal{A}_j(x,y) = \mathrm{e}^{ia_j x/(2k_j)} \mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}\, \mathcal{A}_{j,0}(y)\,.$$

Так как операторы $\hat{A} = \frac{ix}{2k_j}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и $\hat{B} = \frac{ix}{2k_j} b_j y$ не коммутируют друг с другом, то экспонента их суммы не равна произведению их экспонент. Для явного вычисления этого выражения мы должны “распутать” операторы в экспоненте $\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}$.

Это может быть сделано с помощью формулы Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа (БКХ), так как $\hat{A}$ и $\hat{B}$ порождают нильпотентную алгебру Ли [193]. Этот факт может быть легко установлен прямым вычислением коммутаторов всех порядков для порождающих операторов

$$[\hat{A},\hat{B}] = m\sqrt{\hat{A}}\,,$$
$$[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = m^2/2\,,$$
$$[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = 0\,,$$

где $m = b_j\,(ix/(2k_j))^{3/2}$ (очевидно, что все коммутаторы четвертого и более высоких порядков уже равны нулю).

[4] Фактически все используемые в этом разделе формулы могут быть отнесены к классическим результатам теории, так как в той или иной мере они связаны с формулой Бейкера-Кемпбелла-Хаусдорфа и формулами Дынкина.

Экспоненты, содержащие линейные комбинации операторов, порождающих нильпотентную алгебру Ли, “распутаны” с помощью формулы БКХ [193], которая выражает $\log\left(\mathrm{e}^{\hat{X}}\mathrm{e}^{\hat{Y}}\right)$ в терминах коммутаторов $\hat{X}$ и $\hat{Y}$:

$$\log\left(\mathrm{e}^{\hat{X}}\mathrm{e}^{\hat{Y}}\right) = \hat{X}+\hat{Y}+\frac{1}{2}[\hat{X},\hat{Y}]+\frac{1}{12}[\hat{X},[\hat{X},\hat{Y}]]+\frac{1}{12}[[\hat{X},\hat{Y}],\hat{Y}]+\dots . \quad (4.13)$$

Запишем очевидное тождество

$$\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathrm{e}^{\log\left(\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}\mathrm{e}^{-\hat{B}}\right)}\mathrm{e}^{\hat{B}}$$

и применим формулу (4.13) для вычисления $\log\left(\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}\mathrm{e}^{-\hat{B}}\right)$ (т.е. в нашем случае $\hat{X}=\hat{A}+\hat{B}$, $\hat{Y}=-\hat{B}$). Выполнив ряд простых преобразований, получим следующую важную формулу

$$\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}-\frac{m}{2}\sqrt{\hat{A}}+\frac{m^2}{12}}\mathrm{e}^{\hat{B}} . \quad (4.14)$$

В нашем случае важно поменять порядок действия экспонент операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Чтобы это сделать мы выведем простое коммутационное соотношение: докажем, что если $[A,B]=m\sqrt{A}$, то

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{m\sqrt{\hat{A}}+m^2/4} . \quad (4.15)$$

Доказательство состоит в вычислении

$$[\mathrm{e}^{\hat{A}},\mathrm{e}^{\hat{B}}] = \mathrm{e}^{-\hat{A}}\mathrm{e}^{-\hat{B}}\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{-\hat{P}}\mathrm{e}^{\hat{Q}} ,$$

где мы ввели следующие обозначения $\hat{Q}=\log\left(\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}\right)$, $-\hat{P}=-\log\left(\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}\right)=\log\left(\mathrm{e}^{-\hat{A}}\mathrm{e}^{-\hat{B}}\right)$. Операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ можно вычислить с помощью формулы БКХ (4.13):

$$\hat{Q}=\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{12}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]+\frac{1}{12}[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}],$$
$$\hat{P}=\hat{B}+\hat{A}+\frac{1}{2}[\hat{B},\hat{A}]+\frac{1}{12}[\hat{B},[\hat{B},\hat{A}]]+\frac{1}{12}[[\hat{B},\hat{A}],\hat{A}].$$

Заметим, что

$$[\mathrm{e}^{\hat{A}},\mathrm{e}^{\hat{B}}] = \exp\left(\log\left(\mathrm{e}^{-\hat{P}}\mathrm{e}^{\hat{Q}}\right)\right)$$

и снова применим формулу (4.13), на этот раз к выражению $\log\left(\mathrm{e}^{-\hat{P}}\mathrm{e}^{\hat{Q}}\right)$. После несложных преобразований получим необходимое коммутационное соотношение

$$[\mathrm{e}^{\hat{A}},\mathrm{e}^{\hat{B}}]=\mathrm{e}^{m\sqrt{\hat{A}}+m^2/4}\,.$$

Сходным путем можно доказать, что для экспонент операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$, удовлетворяющих соотношению $[\hat{P},\hat{Q}]=C$, выполняется следующее коммутационное правило

$$\mathrm{e}^{\hat{P}}\mathrm{e}^{\hat{Q}}=\mathrm{e}^{\hat{Q}}\mathrm{e}^{\hat{P}}\mathrm{e}^{C}\,.$$

Последняя формула позволяет поменять порядок действия операторов $\hat{B}$ и $\sqrt{\hat{A}}$ в соотношении (4.14). Пользуясь этой формулой и равенством (4.15), после двух перестановок можно получить следующую формулу выпутывания для операторных экспонент:

$$\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}=\mathrm{e}^{\hat{B}+\frac{m^2}{12}}\mathrm{e}^{\frac{m}{2}\sqrt{\hat{A}}}\mathrm{e}^{\hat{A}}\,. \tag{4.16}$$

Заметим теперь, что $\mathrm{e}^{\hat{A}}$ представляет собой оператор свертки с фундаментальным решением задачи Коши для уравнения Шредингера в свободном пространстве [194, 195]:

$$\mathrm{e}^{q\frac{\partial^2}{\partial y^2}}g(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi q}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\xi)^2}{4q}}g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{4.17}$$

В частности, для гауссовой функции $g(y)=\mathrm{e}^{-y^2/\sigma^2}$ интеграл (4.17) легко берется в элементарных функциях:

$$\mathrm{e}^{q\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\mathrm{e}^{\frac{-y^2}{\sigma^2}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi q}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\xi)^2}{4q}}\mathrm{e}^{\frac{-\xi^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2+4q}}\mathrm{e}^{\frac{-y^2}{\sigma^2+4q}}\,. \tag{4.18}$$

Очевидно также, что $\sqrt{\hat{\mathrm{A}}}$ представляет собой оператор сдвига:

$$\mathrm{e}^{q\frac{\partial}{\partial y}}g(y)=g(y+q)\,. \tag{4.19}$$

Теперь в нашем распоряжении есть все формулы для вычисления экспоненты оператора Гамильтона $\mathrm{e}^{i\hat{H}_jx}\mathcal{A}_{j,0}(y)$ в решении МПУ с гауссовым начальным условием $\mathcal{A}_{j,0}(y) = \bar{\mathcal{A}}_j \, \mathrm{e}^{-k_j^2 y^2}$. Сперва мы используем формулу выпутывания (4.16), затем по очереди применяем к функции операторы из правой части этого тождества, используя (4.18) и (4.19). После выполнения всех этих шагов мы, наконец, получаем решение задачи Коши для МПУ (4.10), которое имеет вид

$$\mathcal{A}_j(x,y) = \bar{\mathcal{A}}_j \sqrt{\frac{1}{1+2ik_jx}} \times \exp\left(-\frac{\left(yk_j - \frac{x^2 b_j}{4k_j}\right)^2}{1+2ik_jx}\right) \times \exp\left(\frac{ia_jx}{2k_j} + \frac{ib_jyx}{2k_j} - \frac{ix^3b_j^2}{24k_j^3}\right) . \quad (4.20)$$

Решение (4.20) было получено нами в работе [47]. В разделе 4.3 ниже рассмотрен пример расчета звукового поля в клиновидном волноводе по формуле (4.20).

4.2.2. Метод Вея-Нормана для случая квадратичного параметрического профиля общего вида

Перейдем теперь к рассмотрению задачи Коши для МПУ (4.5) с начальными условиями (4.7) в более общем случае, когда $h(x,y)$ задано формулой (4.9). Для удобства проведения рассуждений перепишем уравнение (4.5) в виде

$$\frac{\partial \mathcal{A}_j(x,y)}{\partial x} = \left(a_{6j}(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{3j}(x)y^2 + a_{2j}(x)y + a_{1j}(x)\right)\mathcal{A}_j(x,y) \, . \quad (4.21)$$

Если рельеф дна описывается выражением (4.9), коэффициенты $a_{1j}(x), \ldots, a_{6j}(x)$ в последнем уравнении будут иметь вид $a_{1j}(x) = -\frac{p_0(x)D_j}{2ik_j}$, $a_{2j}(x) = -\frac{p_1(x)D_j}{2ik_j}$, $a_{3j}(x) = -\frac{p_2(x)D_j}{2ik_j}$, $a_{6j}(x) = -\frac{1}{2ik_j}$, где

$$D_j = 2k_j \left.\frac{dk_j}{dh}\right|_{h=h_0}$$

– производная квадрата горизонтального волнового числа k_j^2 по глубине моря h при $h = h_0$.

Решение уравнения (4.21) можно записать в терминах так называемого оператора эволюции $\hat{U}_j(x,y)$ [185]

$$\mathcal{A}_j(x,y) = \hat{U}_j(x,y)\mathcal{A}_j(0,y) \, . \quad (4.22)$$

Используя (4.21), легко проверить, что оператор $\hat{U}_j(x,y)$ удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{d\hat{U}_j}{dx} = \left(a_{6j}(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{3j}(x)y^2 + a_{2j}(x)y + a_{1j}(x)\right)\hat{U}_j \equiv \hat{H}_j(x)\hat{U}_j\,, \quad U_j(0,y) = \mathrm{I}\,. \tag{4.23}$$

Оператор $\hat{H}_j(x)$ (оператор Гамильтона) в правой части (4.23), как и в прошлом разделе, есть линейная комбинация операторов $\frac{\partial^2}{\partial y^2}, y^2, y, 1$, действующих на пространстве Шварца быстро убывающих пробных функций от y. Эти операторы порождают алгебру Ли L, которая, как легко проверить прямым вычислением всех коммутаторов ее порождающих, является конечномерной. Ее базис состоит из следующих шести операторов (в отличие от нильпотентной алгебры из предыдущего раздела, которая была четырехмерной)

$$\hat{H}_1 = 1\,, \qquad \hat{H}_2 = y\,, \qquad \hat{H}_3 = y^2\,,$$
$$\hat{H}_4 = \frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad \hat{H}_5 = y\frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad \hat{H}_6 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,.$$

Согласно теореме из работы Вея и Нормана [185], решение операторного эволюционного уравнения $d\hat{U}_j(x)/dx = \hat{H}_j(x)\hat{U}_j(x)$, где $\hat{H}_j(x) = \sum_1^N a_{sj}(x)\hat{H}_s$, а операторы $\hat{H}_1, \hat{H}_2, \ldots, \hat{H}_N$ span порождают конечномерную алгебру Ли, может быть представлено в виде

$$\hat{U}_j(x) = \prod_{s=1}^{N} \exp(g_{sj}(x)\hat{H}_s)\,, \tag{4.24}$$

причем комплекснозначные функции $g_{sj}(x)$ удовлетворяют некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [185]. Для каждой конкретной алгебры Ли эта система выводится путем следования схеме доказательства указанной выше фундаментальной теоремы из работы [185]. Выполнив несложные вычисления, можно показать, что в случае, когда алгебра Ли порождается операторами, комбинация которых стоит в правой части уравнения (4.21), система ОДУ для определения $g_{sj}(x)$ имеет вид

$$\frac{dg_{sj}(x)}{dx} = B(x)a_{sj}(x)\,, \tag{4.25}$$

где верхняя треугольная матрица B содержит следующие элементы

$$B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & g_{2j} & 0 & {g_{2j}}^2 + 2g_{3j} \\ 0 & 1 & 0 & 2g_{3j} & g_{2j} & 4g_{2j}g_{3j} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2g_{3j} & 4{g_{3j}}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -g_{4j} & 2g_{2j} - 4g_{3j}g_{4j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4g_{3j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2g_{5j}} \end{pmatrix}.$$

Представление решения уравнения (4.21) в виде произведения операторных экспонент (4.24) подразумевает, что систему ОДУ (4.25) нужно решать с нулевыми начальными условиями $g_{sj}(0) = 0$ для всех s.

Вычислим теперь решение (4.21) в наиболее общем виде, используя (4.24), т.е. применяя операторные экспоненты по очереди к начальному условию (4.7) так же, как мы это делали для случая клиновидного волновода в предыдущем разделе.

Экспонента $\mathrm{e}^{x\hat{H}_6}$ в точности совпадает с оператором $\mathrm{e}^{\hat{A}}$ из предыдущего раздела, и ее действие на функцию заключается в вычислении свертки этой функции с ядром, которое представляет собой решение уравнения Шредингера для свободной частицы, и описывается формулами (4.17) и (4.18). Исследуем теперь действие экспоненты оператора $\hat{H}_5$ на некоторую функцию $F(y)$. Заметим сначала, что для произвольной гладкой функции $f(u)$ выражение $U(x,y) = f(\ln(y) + s)$ представляет собой решение уравнения

$$y\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial s}\,.$$

Положим теперь по определению $F(y) \equiv f(\ln(y))$. Тогда имеем

$$\mathrm{e}^{sy\frac{\partial}{\partial y}}F(y) = \mathrm{e}^{sy\frac{\partial}{\partial y}}f(\ln(y)) = f(\ln(y) + s) = F(y\mathrm{e}^{s})\,,$$

Формально заменяя теперь s на $g(x)$, получим тождество, с помощью которого можно вычислять действие экспоненты $\hat{H}_5$ на функции переменной y

$$\mathrm{e}^{g(x)y\frac{\partial}{\partial y}}F(y) = F(y\mathrm{e}^{g(x)})\,. \tag{4.26}$$

Отметим еще, что, как и в предыдущем разделе, $e^{g_{j3}\hat{H}_3}$ представляет собой оператор сдвига, действие которого описывается формулой (4.19). Используя все эти формулы, мы можем теперь найти общее выражение для решения (4.21) с начальным условием вида (4.7)

$$\mathcal{A}_j(x,y) = \sqrt{\frac{1}{1+4k_j^2 g_{6j}}}\, e^{-\frac{k_j^2\left((y+g_{4j})e^{g_{5j}}\right)^2}{1+4k_j^2 g_{6j}}} e^{g_{3j}y^2} e^{g_{2j}y} e^{g_{1j}}\,. \tag{4.27}$$

В случае, когда форма дна задана формулой (4.9) с постоянными коэффициентами (т.е. когда $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ суть константы) функции $g_{1j}(x), ..., g_{6j}(x)$ могут быть найдены из системы (4.25) аналитически в явном виде (см. раздел 4.3 данной главы). Если эти коэффициенты зависят от x, то, вообще говоря, система (4.25) может быть решена только с привлечением численных методов.

В важном частном случае, когда $a_3(x) = 0$, который соответствует волноводу с наклоном дна поперек трассы, зависящим от x, система уравнений (4.25) также допускает аналитическое решение. Действительно, в этом случае тождественно равны нулю также $a_4(x)$ и $a_5(x)$. Из этого факта, как легко проверить непосредственно, следует, что $g_3(x) = g_5(x) \equiv 0$, и система редуцируется к следующему простому виду

$$\begin{cases} g_1' = a_1 + g_2^2 a_6\,, \\ g_2' = a_2(x) = \varphi(x)\,, \\ g_4' = 2g_2 a_6\,, \\ g_6' = a_6 = \frac{i}{2k_j}\,, \end{cases} \tag{4.28}$$

где $\varphi(x) = \frac{iD_j}{2k_{j,0}} p_1(x)$ (в данном случае можно сказать, что $p_1(x) \equiv \mathrm{tg}(\alpha(x))$, где $\alpha(x)$ есть угол наклона дна при данном значении x).

Система (4.28) имеет весьма простое решение

$$g_{j1} = a_6 \int\limits_0^x (\Phi(x))^2 dx\,, \quad g_{j2} = \Phi(x)\,, g_{j3} = 2a_6 \int\limits_0^x \Phi(x)dx\,, \quad g_{j4} = a_6 x\,, \tag{4.29}$$

где $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)dx$.

Впредь при рассмотрении конкретных примеров мы, как и прежде, иногда будем опускать у функций $g_{sj}(x)$ индекс j, означающий номер вертикальной моды.

Отметим еще, что решения, сходные с (4.27), ранее появлялись в других областях физики, в частности, в квантовой механике [191, 196, 197], оптике [198–200] (см. также ссылки в этой книге). Хотя эти решения могут быть выведены с помощью различных методов, подход из [185], который мы применили здесь, является, по-видимому, самым элегантным и гибким, так как он может быть использован в наиболее общих случаях и для произвольных начальных условий. Отметим еще, что вывод уравнения (4.27) не содержится в работе [185], и эта формула была впервые получена нами [55], хотя основная идея вывода взята из приведенной в упомянутой работе теоремы.

4.2.3. Анализ применимости полученных формул

В этом разделе мы проводим дополнительный анализ применимости полученных в предыдущем разделе формул, сравнивая вклад отброшенных и сохраненных членов ряда (4.2).

Из оценки (4.3) в разделе 4.1 ясно, что каждый член ряда (4.2) как целое меньше предыдущего члена на множитель порядка h_1/h_0. Однако, разумеется, не имеет смысла сохранять член $T_1 = h_1 \left.\frac{d(k_j^2)}{dh}\right|_{h=h_0}$, содержащий y^2, если соответствующий член $T_2 = \frac{h_1^2}{2!} \left.\frac{d^2(k_j^2)}{dh^2}\right|_{h=h_0}$ имеет большую величину. Таким образом, мы должны также потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\left| \frac{p_1^2}{2!} \left.\frac{d(k_j^2)}{dh}\right|_{h=h_0} \right| \ll \left| p_2 \left.\frac{d^2(k_j^2)}{dh^2}\right|_{h=h_0} \right| . \tag{4.30}$$

Используя оценку (4.3) и выражения для p_1 и p_2 из раздела 4.3.3, мы можем переписать это условие в виде

$$3d \ll \frac{h_0}{\mathrm{tg}(\alpha)} . \tag{4.31}$$

Заметим, что $h_0/\mathrm{tg}(\alpha)$ есть расстояние от источника до вершины "эффективного клина" (т.е. такого клина, что угол наклона дна в источнике такой же, как для профиля, заданного формулой (4.9)). Таким образом, условие (4.31) означает, что источник не должен находиться слишком далеко от экстремума функции (4.9) (более точно: источник должен находиться к этому экстремуму намного ближе, чем к ребру эффективного клина). Если это условие не выполняется, то необходимо также учесть квадратичный по y член выражения T_2. В этом случае, однако, можно обойтись лишь линейными членами разложений и воспользоваться формулой (4.24) с функциями g_{js}, найденными из решения упрощенной системы (4.28) по формулам (4.29) (как это сделано в [47, 51]).

Сравнивая линейные по y и не зависящие от y члены выражений T_1 и T_2 сходным способом, мы получаем условие

$$\left| p_0 \left.\frac{\partial(k_j^2)}{\partial h}\right|_{h=h_0} \right| \ll \left| \left.\frac{\partial^2(k_j^2)}{\partial h^2}\right|_{h=h_0} \right|$$

выполнение которого обеспечивается соотношением $h_1 \ll h_0$.

4.3. Примеры расчетов с аналитическими решениями МПУ

Здесь мы рассмотрим применение полученных в предыдущем разделе формул к нескольким задачам распространения звука в мелком море. Мы начнем с задачи о распространении звука в прибрежном клине, аналитическое решение которой известно из первой главы. Для ее решения мы используем простую формулу (4.20). Далее мы рассмотрим три примера, в которых будет использовано решение (4.24). В каждом из них функции $g_{sj}(x)$ будут вычислены аналитически.

Во всех рассмотренных в этом разделе примерах использованы одни и те же значения параметров дна и водного слоя $0 < z < h(x, y)$ (который мы считаем однородным). Скорость звука и плотность воды приняты равными $c_w = 1500$ м/с и $\rho_w = 1$ г/см^3, а соответствующие параметры дна равны $c_b = 2000$ м/с и $\rho_b = 2$ г/см^3. Коэффициент поглощения звука дном в наших примерах равен $\beta_b = 0,5$ дБ/λ. Для простоты мы будем считать дно полупространством и пользоваться выражениями для модовых функций (3.7) для волновода Пекериса. Мы выполним расчет звукового поля формируемого в рассматриваемых волноводах источником с частотой $f = 50$ Гц, расположенным на глубине $z_s = 10$ м в точке с горизонтальными координатами $x = 0$, $y = 0$.

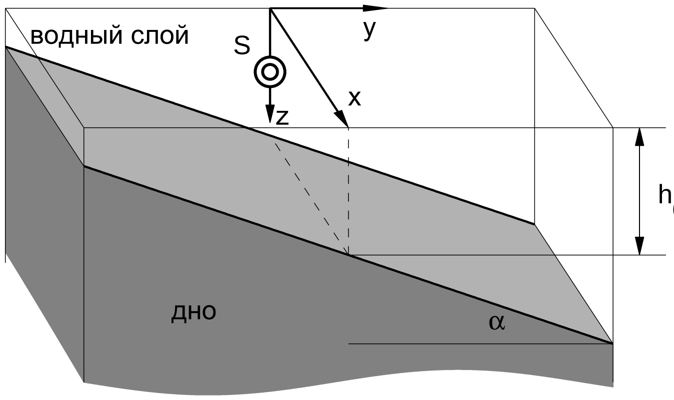


Рис. 4.1. Клиновидный прибрежный волновод и система координат, в которой решается МПУ, а также источник звука (S).

Во всех примерах глубина моря в окрестности источника составляет $h_0 = 90$ m, и для указанных выше параметров дна и частоты звука в таком волноводе возбуждается четыре захваченные (водные) вертикальные моды, волновые числа которых при $h = h_0$ равны $k_1 = 0,20724586$, $k_2 = 0,20030636$, $k_3 = 0,18771764$ и $k_4 = 0,16819605$ (как и в предыдущей главе, при расчете поля мы пренебрегаем вкладом мод непрерывного спектра). Волновые числа в других точках акватории могут быть найдены с помощью метода возмущений по формуле (3.13) из предыдущей главы.

4.3.1. Клиновидный волновод

В первом примере мы будем рассматривать клиновидный волновод с углом наклона дна, равным 0,5°. Выбор этого значения продиктован нашим стремлением сделать так, чтобы условия применимости адиабатического приближения не нарушались в достаточно широкой полосе, содержащей акустическую трассу $y = 0$ (напомним, что ось x мы по умолчанию ориентируем вдоль акустической трассы). Схема клиновидного волновода с используемой здесь системой координат представлена на Рис. 4.1.

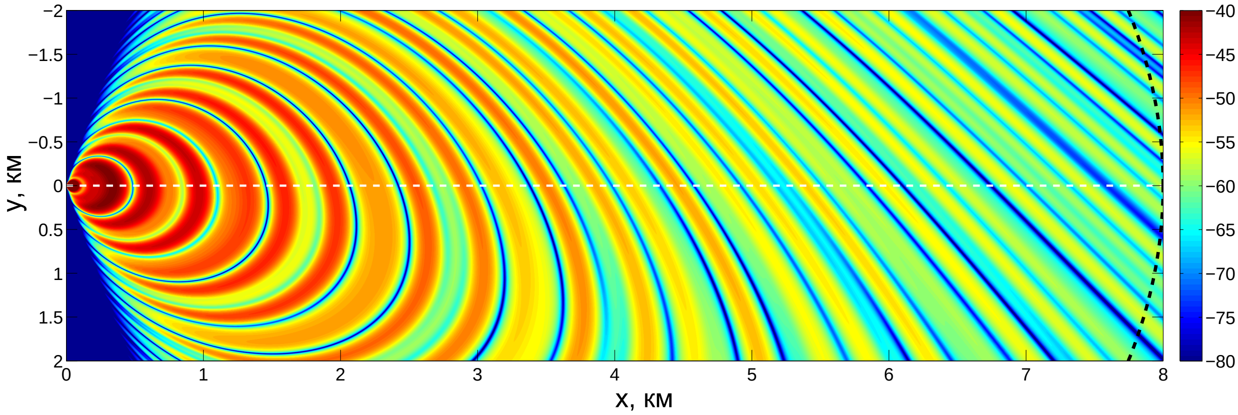
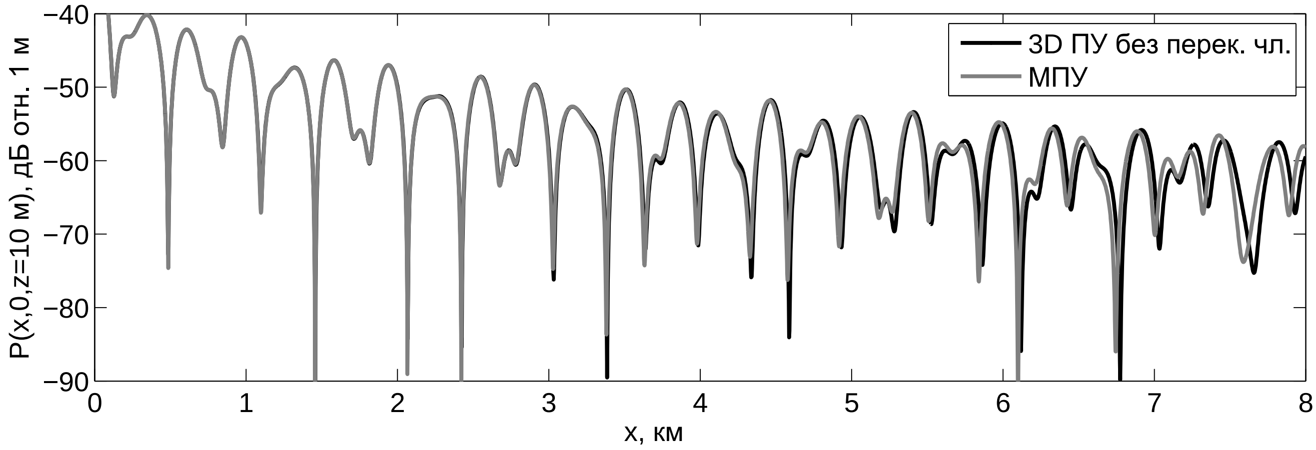
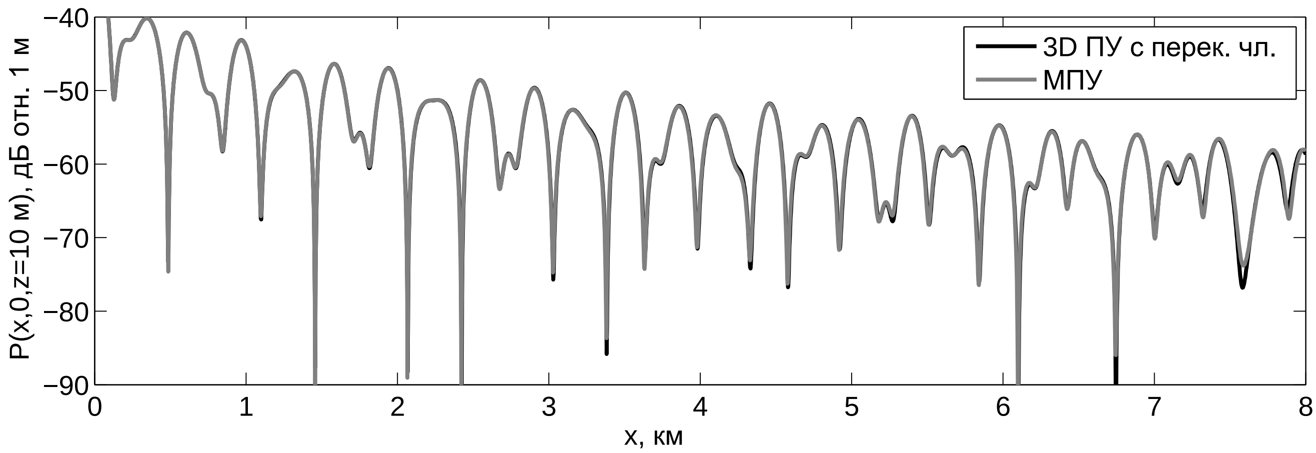


Рис. 4.2. Решение МПУ (в дБ отн. 1 м) в клиновидном волноводе как функция горизонтальных координат x, y в плоскости $z = z_s$.

Решение МПУ как функция горизонтальных координат x, y в этом примере показано на Рис. 4.2. В окрестности источника $x = 0, y = 0$ хорошо видно, что апертура МПУ в горизонтальной плоскости является достаточно небольшой. Опыт показывает, что интервал углов относительно оси x, в котором решение МПУ достаточно хорошо приближает решение исходного трехмерного уравнения Гельмгольца, можно оценить как $[-8°, 8°]$. Вне этого диапазона углов решение МПУ неприменимо, и, соответственно, если в точке приема необходим учет горизонтальных лучей, углы выхода которых из источника находятся вне данного интервала, нельзя ожидать адекватного расчета поля с помощью рассматриваемого метода. Может показаться, что этот интервал слишком мал для того, чтобы МПУ было сколь-нибудь полезным на практике. Специфика прикладных задач акустики океана, однако, такова, что расчетные области обычно представляют собой относительно узкие полосы, содержащие акустическую трассу $x = 0$, в которых и необходимо вычислить звуковое поле. По этой причине даже такой ограниченной апертуры часто достаточно для точного моделирования трехмерных эффектов распространения акустических волн.



(*а*) 3D ПУ без перекрестных членов



(*б*) 3D ПУ с перекрестными членами

Рис. 4.3. Сравнение решения МПУ в трехмерном клиновидном волноводе с углом наклона дна $0,5°$ с решением 3D ПУ вдоль линии $y = 0, z = z_s$ в случае, когда в 3D ПУ отсутствуют перекрестные члены (а) и при их наличии (б).

На Рис. 4.3 представлено сравнение акустического поля, рассчитанного с помощью метода МПУ (формула (4.20)) вдоль линии $y = 0$, $z = z_s$ решением задачи, полученной с помощью трехмерного параболического уравнения из работы [28] (3D ПУ). При проведении сравнительных расчетов это уравнение сперва было решено Стюрмом без так называемых перекрестных членов (Рис. 4.3(а)), а затем, когда оказалось, что имеется расхождение с решением МПУ, эти члены были добавлены в 3D ПУ (Рис. 4.3(б)).[5] Эта поправка позволила достигнуть хорошего согласия результатов расчетов, полученных двумя методами.

Заметим, что решение данной задачи с использованием 3D ПУ требует расчетов продолжительностью несколько часов (необходимость учитывать перекрестные члены существенно снижает их и без того невысокую скорость). Решение этой задачи с помощью МПУ занимает считанные секунды, что демонстрирует крайне высокую вычислительную эффективность данного метода. Также описанный здесь эпизод показывает, что аналитические решения МПУ, несмотря на многочисленные оговорки, относящиеся к условиям их применимости, могут быть с успехом использованы для тестирования различных моделей распространения звука. Их важным преимуществом в этом качестве (по сравнению, например, с описанным в первой главе методом изображений) является исключительно высокая скорость расчетов, которая позволят варьировать параметры модели, а также возможность, например, учитывать многослойную структуру дна или профиль скорости звука в воде. Метод изображений полностью лишен этих возможностей, и, к тому же, расчет звукового поля в плоскости x, y с его помощью занимает несколько часов (как и в случае 3D ПУ).

Отметим также, что результаты расчетов с помощью 3D ПУ (с учетом перекрестных членов) в точности согласуются с методом изображений, как показано в [28].

---

[5] Речь идет о членах вида $\hat{Z}\hat{\Theta}$ в разложении операторного квадратного корня в 3D ПУ, где $\hat{Z}$ – дифференциальный оператор, содержащий производную второго порядка по z, а $\hat{\Theta}$ – дифференциальный оператор второго порядка по угловой переменной θ. Вычисление пропагатора оператора $\hat{Z}\hat{\Theta}$ требует решения системы линейных уравнений с ленточной матрицей, размер которой соответствует произведению количества точек сетки по z и по θ (см. [28–30]).

4.3.2. Волновод с переменным по x наклоном дна

Во втором примере мы модифицируем клиновидный волновод таким образом, что наклон дна приобретает периодические вариации:

$$h_1(x,y) = p_1(x)y = \mathrm{tg}\alpha \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) y\,, \tag{4.32}$$

где α – максимальные углы наклона, а L – период вариаций угла по x. Таким образом, в этом случае рельеф дна напоминает стиральную доску (см. Рис. 4.4). Батиметрические особенности такого типа имеют место, например, в мелком море с цепочками дюн на дне.

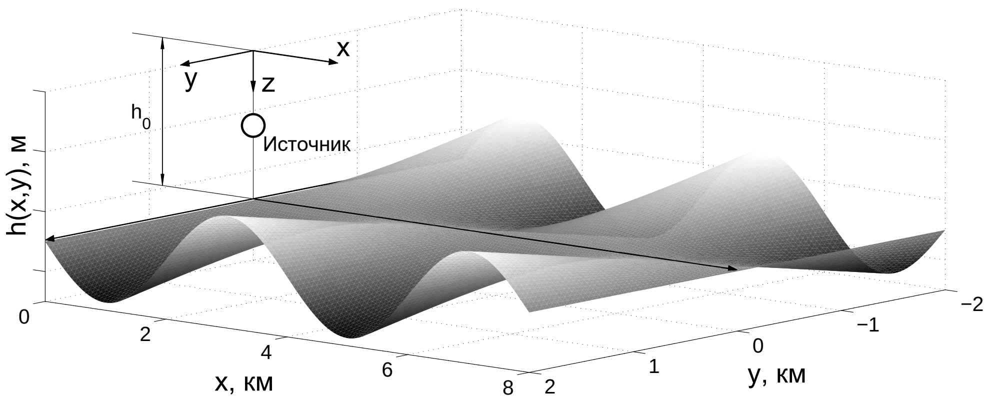
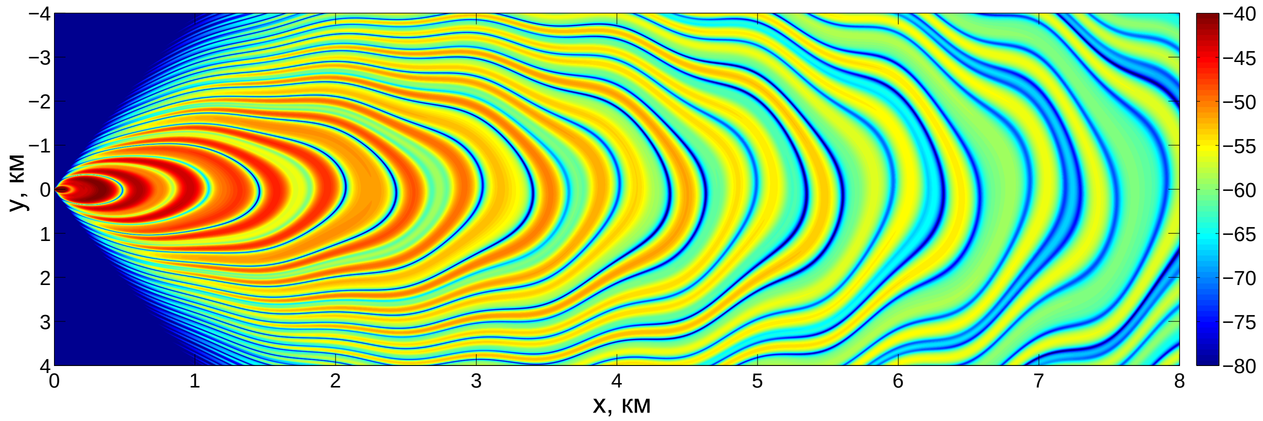


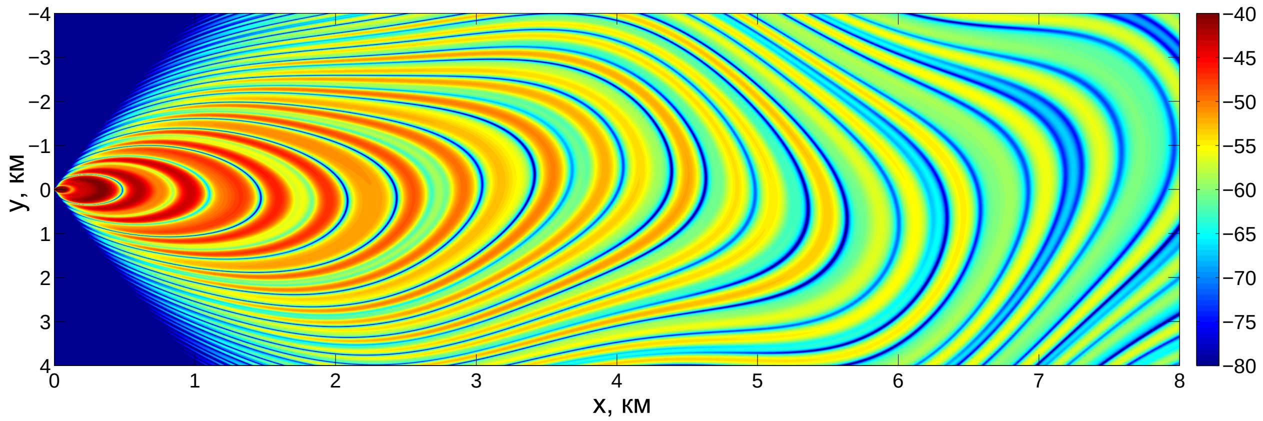
Рис. 4.4. Рельеф дна в примере из раздела 4.3.2: угол наклона не зависит от координаты y, но периодически меняется по x.

Максимальный угол наклона возьмем таким же, как в предыдущем примере $\alpha = 0,5^\circ$, а в качестве значений периода возьмем $L = 1000$ м и $L = 4000$ м. Результирующие контурные графики поля представлены на Рис. 4.5 (подграфики (а) и (б) соответственно). На Рис. 4.5(б) особенно хорошо видно, как звуковое поле меандрирует, распространяясь между дюнами.

Еще раз отметим, что в этом случае решение МПУ записывается в элементарных функциях.



(*а*) $L = 1000$ м



(*б*) $L = 4000$ м

Рис. 4.5. Решение МПУ в волноводе, где батиметрия описывается линейной параметрической функцией (4.32), график которой представлен на Рис. 4.4.

4.3.3. Мелкое море с квадратичным наклоном дна

В третьем примере мы рассматриваем распространение звука в волноводе мелкого моря с квадратичным наклоном дна, который показан на Рис. 4.6. Заметим, что хотя математические модели трехмерного распространения звука в океане обычно тестируют, используя в качестве примера клиновидный волновод, во многих случаях именно квадратичная функция адекватно описывает рельеф дна поблизости от береговой линии.

Рассмотрим акваторию мелкого моря с квадратичным наклоном дна, схематично изображенную на Рис. 4.6. Описывающая батиметрию функция (4.9) в этом случае имеет следующие коэффициенты: $p_0(x) = 0$, $p_1(x) = -\mathrm{tg}\alpha$,

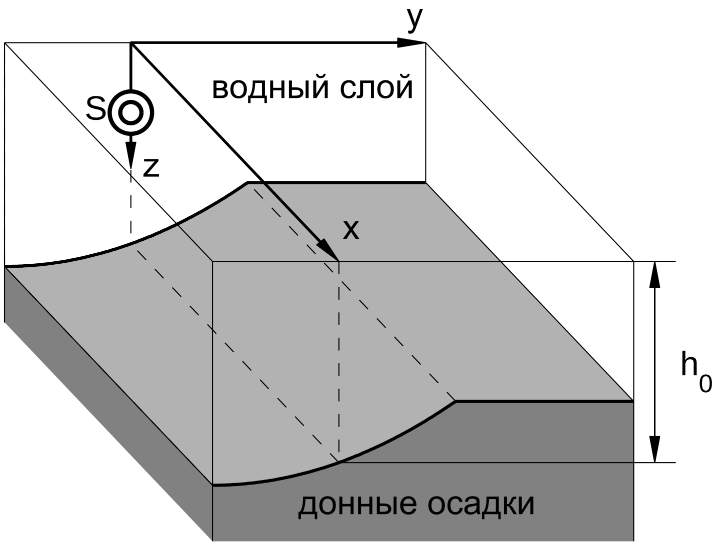


Рис. 4.6. Волновод мелкого моря с квадратичным наклоном дна.

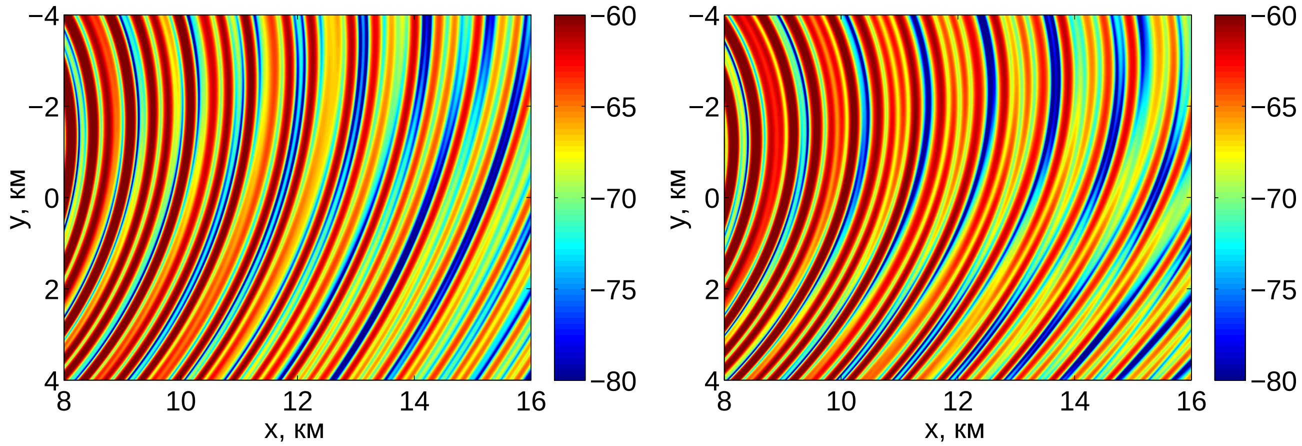
$p_2(x) = -\frac{\mathrm{tg}\alpha}{2d}$, причем α – угол наклона дна в окрестности источника звука, а d – расстояние по горизонтали от источника звука до точки минимума этой функции (т.е. коэффициенты (4.9) не зависят от x). В этом примере наша цель состоит в том, чтобы сравнить решение данной задачи со звуковым полем в клиновидном волноводе с постоянным наклоном дна α и той же глубиной моря при $y = 0$ (мы называем такой волновод *эффективным клином*). Условия, которым должны удовлетворять величины d, α и h_0, для применимости решения (4.24) в этой задаче, описаны в разделе 4.2.3.

Легко видеть, что система уравнений (4.25) для функций $g_1(x), \dots, g_6(x)$ в выражении для модовых амплитуд (4.27) в данном примере также имеет аналитическое решение

$$\begin{gathered} g_1 = -\frac{1}{2}\log_{10}(\cos(ux)) - \frac{a_2^2 vx}{4u} + \frac{a_2^2}{4u^2} v\,\mathrm{tg}(ux)\,, \\ g_2 = \frac{a_2 \mathrm{tg}(ux)}{u}\,,\ g_3 = \frac{u\,\mathrm{tg}(ux)}{v}\,,\ g_4 = \frac{a_2 v(1-\cos(ux))}{2u^2}\,, \\ g_5 = -\log_{10}(\cos(ux))\,,\ g_6 = \frac{v\,\mathrm{tg}(ux)}{4u}\,. \end{gathered} \tag{4.33}$$

В формулах (4.33) мы использовали следующие обозначения: $a_2 = -\frac{p_1 D_j}{2ik_j}$, $v = -\frac{2}{ik_j}$, $u = \frac{\sqrt{-p_2 D_j}}{k_j}$.

При вычислениях мы использовали параметры $\alpha = 0{,}1^\circ$, $d = 5$ км. Напом-



(*а*) глубина – линейная функция y (*б*) глубина – квадратичная функция y

Рис. 4.7. Звуковое поле, сформированное точечным источником звука в волноводе мелкого моря с постоянным наклоном дна на угол $\alpha = 0{,}1^\circ$ относительно горизонтали (“эффективный клин”) (а) и в море с квадратичным профилем батиметрии (б) где угол наклона в точке расположения источника равен $\alpha = 0{,}1^\circ$.

ним, что значения всех параметров волновода, кроме относящихся к функции $h_1(x, y)$, являются общими для всех рассматриваемых в этой главе примеров. Результаты расчета звукового поля в волноводе с квадратичным наклоном дна

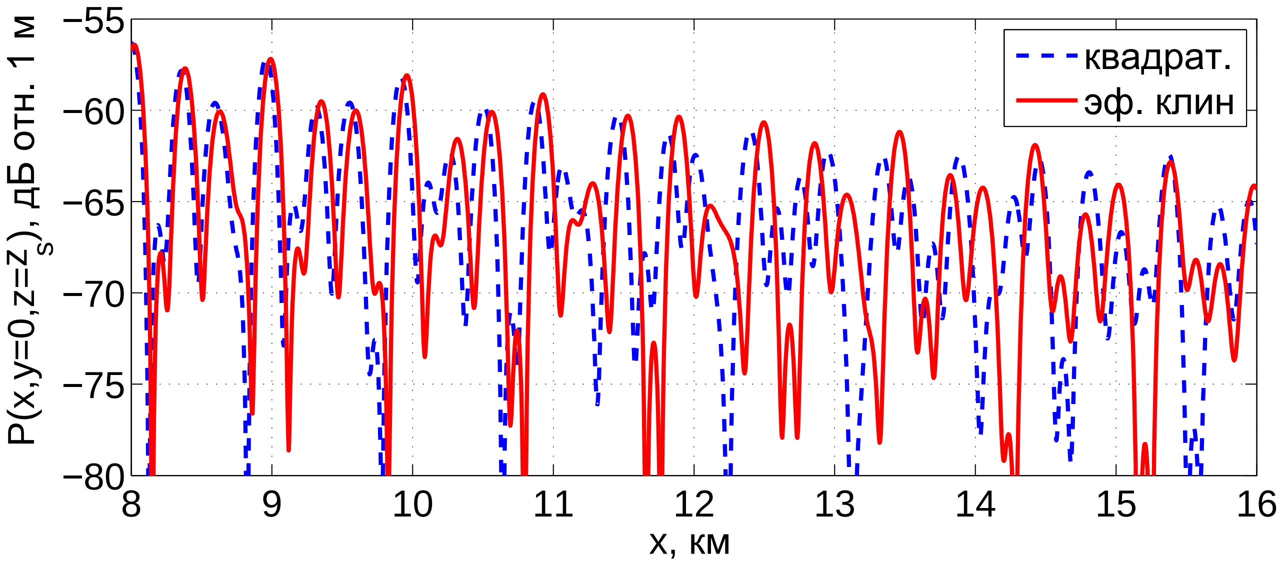


Рис. 4.8. Сравнение звуковых полей $P(x, y = 0, z = z_s)$, рассчитанных для квадратичной зависимости глубины от y (4.9) (пунктирная линия) и для эффективного клина (сплошная линия).

и в эффективном клине показаны на Рис. 4.7. Для более подробного сравнения их разрезы вдоль прямой $y = 0, z = z_s$ представлены на Рис. 4.8. Из этих рисунков хорошо видно, что интерференционная картина звукового поля, сформированного под влиянием горизонтальной рефракции в волноводе с квадратичной зависимостью глубины от y заметно отличается от интерференционной картины в эффективном клине. Таким образом, выбор конкретной модели рельефа дна в окрестности береговой черты может быть важным для качественного и количественного анализа поведения звукового поля.

4.3.4. Распространение звука над подводным хребтом

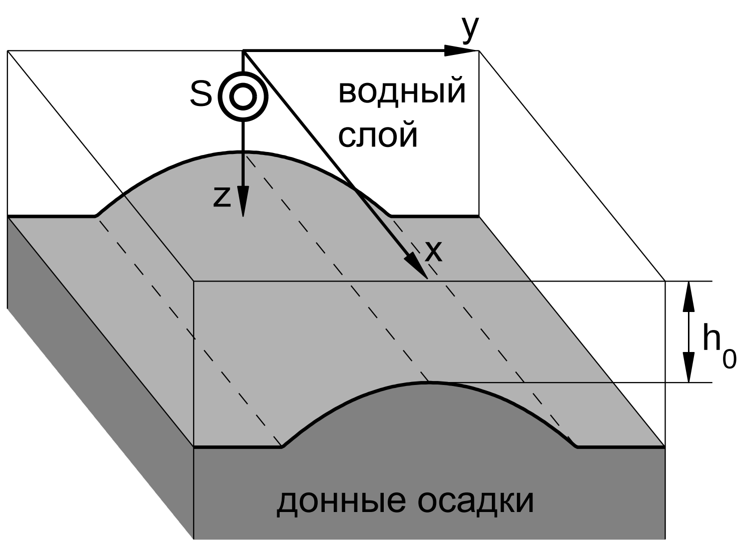
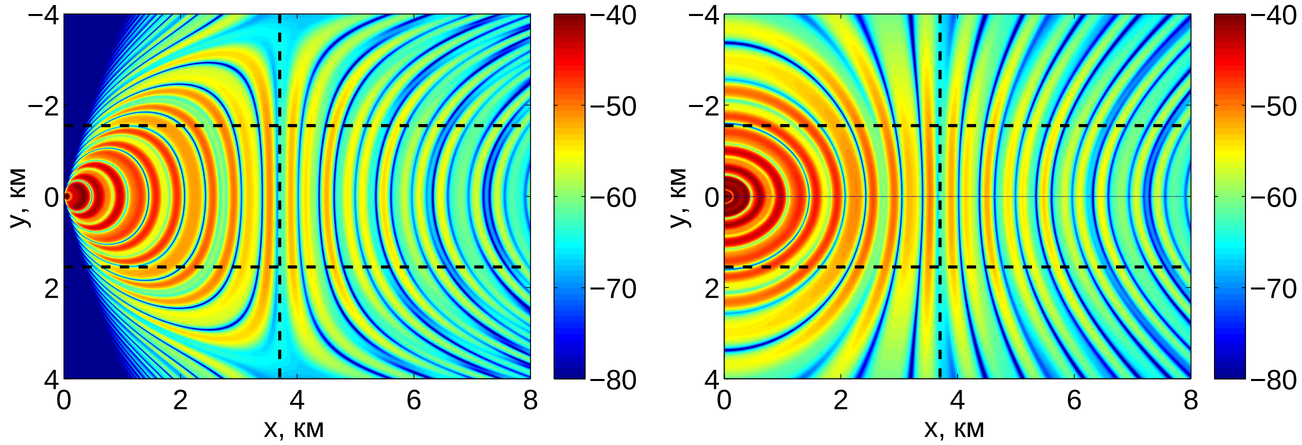


Рис. 4.9. Волновод мелкого моря с подводным хребтом.

В четвертом примере мы рассматриваем задачу распространении звука в волноводе мелкого моря с подводным хребтом, который показан на Рис. 4.9. Для определенности будем считать, что источник звука расположен непосредственно над гребнем хребта $y = 0$ (как и прежде глубина моря под источником равна $h_0 = 90$ м). Нас будет интересовать интерференционная картина звукового поля, формируемого источником, в непосредственной близости от гребня, т.е. в узкой полосе $-L < y < L$ (ниже будет показано, что у интерференционной картины в этом случае имеется интересная отличительная черта).



(*а*) МПУ (*б*) метод виртуальных источников

Рис. 4.10. Звуковое поле, сформированное источником, расположенным над гребнем хребта $y = 0$, показанного на Рис. 4.9, вычисленное с помощью МПУ (а) и метода виртуальных источников (б) (в дБ отн. 1 м). Заметим, что при $x < x_c = 3{,}75$ км кривые, соответствующие положению максимумов/минимумов интерференционной картины, определяются вогнутыми функциями $x = x(y)$, а при $x > x_c$ эти функции являются выпуклыми.

В этом случае коэффициенты p_0 и p_1 в выражении, описывающем батиметрию (4.9) равны нулю. Мы примем $p_2 = 5 \times 10^{-6}$ м$^{-1}$. Этот параметр характеризует поведение батиметрического профиля $h = h(y)$ в окрестности гребня хребта и на самом деле пропорционален кривизне кривой $z = h(y)$ в точке $y = 0$. В данном контексте, однако, использование этого понятия кажется нам несколько неудачным, и впредь мы будем называть p_2 параметром выпуклости гребня подводного хребта. Разумеется, ввиду того, что на гребне $dh/dy = 0$, именно параметр выпуклости $p_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2h}{dy^2}$ определяет вариации глубины в его окрестности.

Как и в предыдущих примерах, система уравнений (4.25) допускает аналитическое решение, которое можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
g_1 = -\frac{1}{2}\log_{10}(\mathrm{ch}(ux))\,, \\
g_2 = 0\,,\ g_3 = -\frac{u\,\mathrm{th}(ux)}{v}\,,\ g_4 = 0\,, \\
g_5 = -\log_{10}(\mathrm{ch}(ux))\,,\ g_6 = \frac{v\,\mathrm{th}(ux)}{4u}\,,
\end{gathered}
\tag{4.34}
$$

где $v = -\frac{2}{ik_j}$, $u = \frac{\sqrt{p_2 D_j}}{k_j}$. Таким образом, звуковое поле $P(x, y, z)$ можно рассчитать по формуле (3.14) из предыдущей главы, предварительно вычислив модовые амплитуды по формулам (4.24). Источник звука при $y = 0$ возбуждает четыре водные моды с теми же волновыми числами, что в предыдущих примерах (см. раздел 4.3.1).

Результаты расчетов представлены на Рис. 4.10(а) в виде контурных графиков звукового поля $P(x, y, z = z_s)$ в дБ относительно 1 м от источника. В этом примере мы верифицируем наше решение путем прямого сравнения со звуковым полем $P_{VSM}(x, y, z = z_s)$, рассчитанным с помощью метода виртуальных источников (МВИ) [201]. Его контурный график также показан на Рис. 4.10(б). Из рисунка видно, что МПУ очень точно воспроизводит интерференционную картину поля вблизи гребня хребта (линии $y = 0$), однако значительные отличия наблюдаются при больших значениях $y \sim 3 - 4$ км. Акустические поля $P(x, y = 0, z = z_s)$ вдоль прямой $y = 0$, $z = z_s$ как функции от x показаны на Рис. 4.11. Сравнение обнаруживает замечательное совпадение решений, полученных с помощью МПУ (формулы (4.24) и (4.34)) и с помощью МВИ.

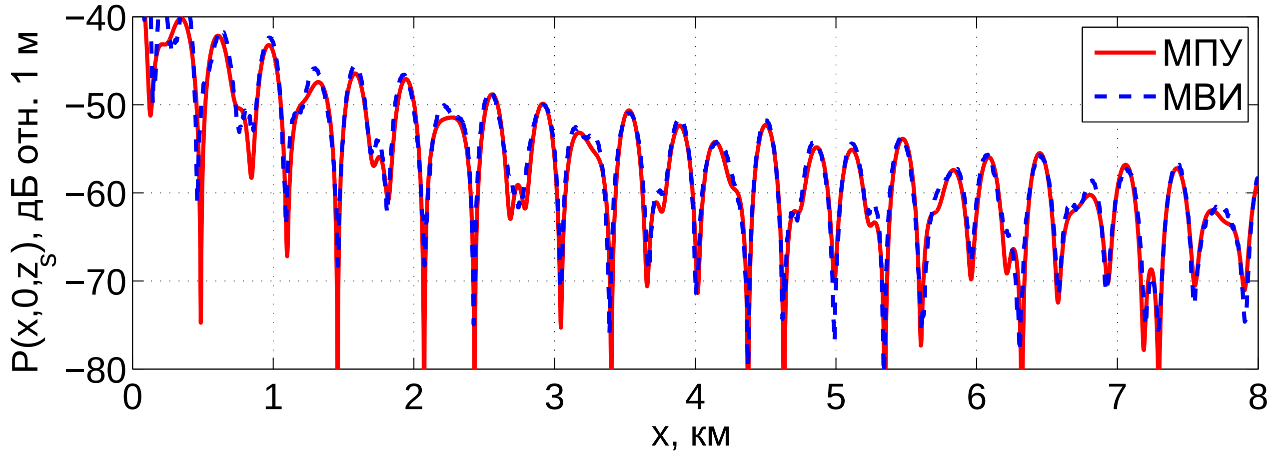


Рис. 4.11. Сравнение уровней акустического поля $P(x, y = 0, z = z_s)$, вычисленного вдоль гребня подводного хребта с помощью аналитического решения МПУ (сплошная линия) и с использованием метода виртуальных источников (пунктирная линия).

На Рис. 4.10 можно наблюдать интересную особенность (межмодовой) интерференционной картины звукового поля. В то время, как в окрестности источника интерференционные максимумы и минимумы расположены на кривых, напоминающих семейство концентрических окружностей с увеличивающимися радиусами (на самом деле в приближении узкоугольного МПУ волновые фронты поля становятся эллиптическими, см. раздел 4.4), на некотором расстоянии от излучателя (в окрестности прямой $x_c = 3.7$ км) кривизна волновых фронтов $\varkappa$ становится близкой к нулю, а затем и вовсе меняет знак. В результате этого волновые фронты становятся выпуклыми в направлении на источник (в то время как обычно расходящиеся от источника волны $x < x_c$ имеют фронты, выпуклые в направлении $x \to \infty$). В следующем разделе мы более детально обсудим это явление, которое может считаться отличительной особенностью интерференционной картины звукового поля точечного источника, расположенного над гребнем подводного хребта. Заметим еще, что эта же особенность наблюдается как на Рис. 4.10(а), так и на Рис. 4.10(б) (где поле было рассчитано по МВИ). Таким образом, эта отличительная черта интерференционной картины не является артефактом, связанным с приближением МПУ.

В заключительной части данного раздела остановимся еще раз на основном условии для применимости приближения МПУ – возможности использовать адиабатическое приближение. Этот вопрос детально исследован в работе [105], где для конкретных примеров были впервые рассчитаны коэффициенты взаимодействия мод (в контексте исследования МПУ, учитывающего этот эффект). В [105] показано, что взаимодействием мод можно пренебрегать до тех пор, пока вариации батиметрии находятся в интервале глубин отсечки наивысшей моды, генерируемой источником звука. В нашем примере (см. значения параметров среды, зафиксированные в начале раздела 4.3), глубина отсечки пятой моды равна $h_{\text{с.о.}} \approx 102$ м, что, например, соответствует значению координаты $y_{\text{с.о.}} \approx 1.55$ км в задаче о подводном хребте в соответствии с (4.9) (по определению мы полагаем, что $h_{\text{с.о.}} = h(x, y_{\text{с.о.}})$). Таким образом, мы можем ожидать, что наше решение будет адекватным внутри полосы $|y| < y_{\text{с.о.}}$, границы которой обозначены горизонтальными пунктирными линиями на Рис. 4.10.

Действительно, внутри этой полосы решения, полученные с помощью МПУ и МВИ практически неотличимы.

4.4. О геометрии волновых фронтов в методе параболического уравнения

В предыдущем разделе при проведении расчетов с помощью МПУ нами был обнаружен интересный интерференционный феномен, связанный со структурой акустического поля, формируемого точечным источником звука над подводным хребтом. В окрестности источника максимумы и минимумы межмодовой интерференционной картины (т.е. линии, где разность фаз двух модовых амплитуд равна πm, а m – целое число) суть вогнутые (выпуклые вверх, к $x \to \infty$) функции $x = x(y)$. На некотором удалении от источника $x = x_c$ они превращаются в прямые линии, а их кривизна стремится к нулю. Для $x > x_c$ кривизна линий, соответствующих интерференционным минимумам, становится отрицательной, а сами они становятся выпуклыми функциями $x = x(y)$ (в обычном математическом смысле этого термина). Это изменение кривизны волновых фронтов является проявлением горизонтальной рефракции, которое, насколько нам известно, никем ранее не изучалось. В данном разделе мы дадим объяснение этого эффекта и получим оценку величины x_c (которая, разумеется, зависит от номера моды).

Перед тем, как исследовать влияние горизонтальной рефракции на геометрию волновых фронтов, мы разберем вопрос о том, чем отличаются (горизонтальные) волновые фронты уравнений горизонтальной рефракции (3.19) и приближающих их МПУ в случае, когда $h_1(x, y) = 0$ (т.е. в волноводе постоянной глубины h_0). Решение МПУ $\mathcal{A}_j(x, y)$ в этом случае имеет вид (4.20), где b_j равно нулю. Из этой формулы для решения мы легко можем вычислить фазу $\Phi(x, y)$ комплекснозначной функции $\mathcal{A}_j(x, y)\mathrm{e}^{ik_j x}$ и построить волновые фронты $\Phi(x, y) = C$ (линии постоянной фазы). Эти кривые показаны на Рис. 4.12 вме-

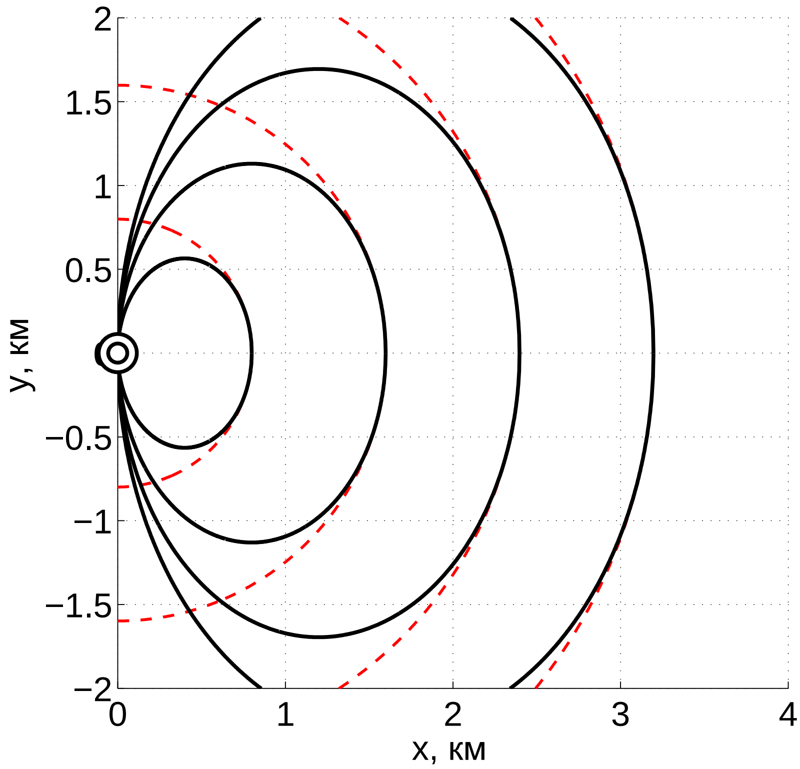


Рис. 4.12. Волновые фронты (линии уровня фазы) $\Phi(x, y) = C$ для третьей моды в случае $h_1(x, y) = 0$ (постоянная глубина), полученные из решения МПУ $\Phi(x, y) = \arg\left(\mathcal{A}_j(x, y)\mathrm{e}^{ik_j x}\right)$ (сплошные линии) и непосредственно из решения уравнения горизонтальной рефракции (пунктирные линии).

сте с соответствующими волновыми фронтами для решения уравнения горизонтальной рефракции (которые, разумеется, представляют собой радиально-симметричные функции Ганкеля). Заметим еще, что волновые фронты МПУ суть эллипсы, которые проходят через точку, где расположен источник, и, кроме того, касаются круговых волновых фронтов решения уравнения горизонтальной рефракции в точке $y = 0$. Кривизны эллипсов совпадают с кривизнами этих окружностей в точке $y = 0$, однако с увеличением угла $\mathrm{atan}(y/x)$ в горизонтальной плоскости они увеличиваются (тем не менее, для малых y/x дуги эллипсов МПУ хорошо приближают дуги окружностей).[6]

[6] Разумеется, это наблюдение верно и для стандартных параболических уравнений, решаемых в вертикальной плоскости. Насколько нам известно, такое сравнительное описание геометрии волновых фронтов уравнения Гельмгольца и приближающего его параболического уравнения не было представлено в литературе до публикации нашей работы [55].

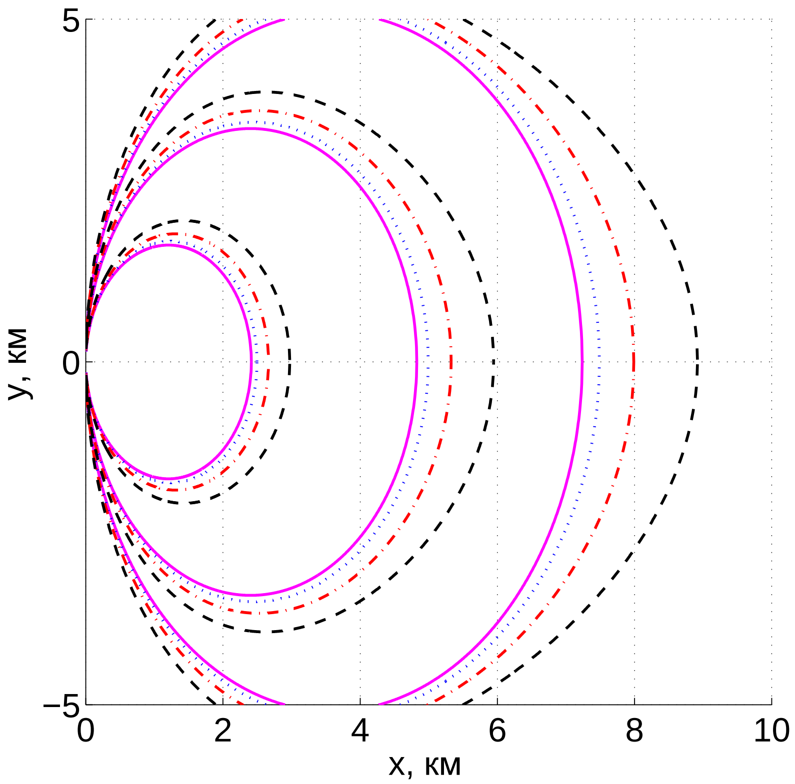


Рис. 4.13. Волновые фронты $\Phi(x,y) = C$ в волноводе мелкого моря с подводным хребтом для $C = 500, 1000$ и 1500 для амплитуд первой (сплошные линии), второй (точечные линии), третье (штрихпунктирные линии) и четвертой (пунктирные линии) вертикальных мод.

Исследуем теперь геометрию волновых фронтов в окрестности гребня подводного хребта в мелком море. Волновой фронт j-ой модальной компоненты поля, вычисляемой по формуле (4.24), может быть задано уравнением

$$\Phi_j(x,y) = \arg\left(\mathcal{A}_j(x,y)\mathrm{e}^{ik_jx}\right) = C\,,$$

где константа C есть значение фазы. Из общего уравнения (4.27), описывающего решение МПУ, имеем

$$\mathrm{Im}\left(\frac{-y^2\mathrm{e}^{2g_5}}{k_j^{-2}+4g_6} + g_3y^2 + g_1\right) = C - k_jx\,.$$

В случае мелкого моря с подводным хребтом (когда функции g_j находятся по формулам (4.34)) последнее уравнение может быть записано в виде

$$y^2 \left(\frac{u\mathrm{th}(ux)}{|v|} + \frac{|v|\mathrm{th}(ux)}{u\mathrm{ch}^2(ux)\left(k_j^{-4} + \left(\frac{|v|\mathrm{th}(ux)}{u}\right)^2\right)} \right) + k_j x = C\,. \tag{4.35}$$

Для значений параметров, приведенных в начале раздела 4.3, описываемые уравнением (4.35) кривые представлены на Рис. 4.13 (они имеют яйцевидную форму).

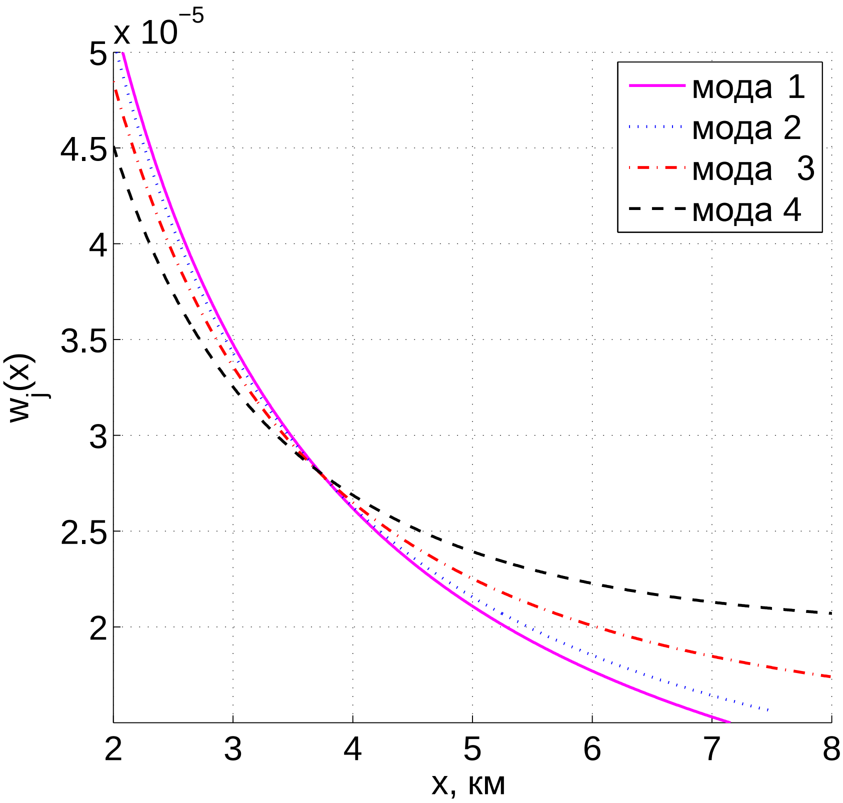


Рис. 4.14. Функции $w_j(x)$ из уравнения (4.37) для номеров вертикальных мод $j = 1, \ldots, 4$. Их точки пересечения суть $x_c(j, \ell)$.

Поскольку $k_j^{-4} \ll |v|/u$, мы можем пренебречь членом k_j^{-4} в знаменателе второй дроби в левой части уравнения (4.35) и упростить его следующим образом

$$y^2 \frac{\sqrt{p_2 D_j}}{2} \mathrm{cth}\left(\frac{\sqrt{p_2 D_j}}{k_j} x \right) + k_j x = C\,. \tag{4.36}$$

Точка (x, y) находится на максимуме или минимуме интерференционной картины поля в горизонтальной плоскости, если для двух мод с номерами j и ℓ

условие

$$\Phi_j(x,y) - \Phi_\ell(x,y) = \pi m\,,$$

выполняется для некоторого целого значения m. Переписывая последнее уравнение в виде

$$y^2\frac{\sqrt{p_2}}{2}\left(\sqrt{D_j}\mathrm{cth}\left(\frac{\sqrt{p_2 D_j}}{k_j}x\right) - \sqrt{D_\ell}\mathrm{cth}\left(\frac{\sqrt{p_2 D_\ell}}{k_\ell}x\right)\right) = C - (k_j - k_\ell)x\,,$$

мы видим, что такие точки образуют вертикальную линию $x = x_c$ в том и только том случае, когда выполнено равенство

$$\sqrt{D_j}\mathrm{cth}\left(\frac{\sqrt{p_2 D_j}}{k_j}x\right) = \sqrt{D_\ell}\mathrm{cth}\left(\frac{\sqrt{p_2 D_\ell}}{k_\ell}x\right)\,. \tag{4.37}$$

Теперь мы можем определить значение x_c, решая уравнение (4.37). Разумеется, его решение зависит от обоих номеров мод j и ℓ. Очевидно, что $x = x_c(j,\ell)$ можно найти как точки пересечения графиков функций $w_j(x) = \sqrt{D_j}\mathrm{cth}\left(\frac{\sqrt{p_2 D_j}}{k_j}x\right)$ как это показано на Рис. 4.14. Хотя величины $x_c(j,\ell)$ немного отличаются для различных пар номеров мод, j,ℓ, все они расположены на относительно узком интервале от $x = 3.7$ км до $x = 3.8$ км.

Поскольку $\frac{\sqrt{p_2 D_j}}{k_j}x \le 1$, мы можем получить простую оценку величины x_c используя разложение функции $\mathrm{cth}(x)$ по степеням x

$$\mathrm{cth}(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \mathrm{O}(x^3)\,.$$

Подставляя это разложение в уравнение (4.37) и сохраняя два старших члена, мы получаем следующее приближение для x_c

$$x_c(j,\ell) = \frac{1}{\sqrt{p_2}}\sqrt{\frac{3(k_j - k_\ell)k_j k_\ell}{D_\ell k_j - D_j k_\ell}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{p_2}}\sqrt{\frac{k_j - k_\ell}{\frac{dk_\ell}{dh} - \frac{dk_j}{dh}}}\,, \tag{4.38}$$

которое находится в очень хорошем согласии с графическим решением, показанным на Рис. 4.14. Множитель $\frac{1}{\sqrt{p_2}}$ в выражении (4.38) связан с батиметрией и показывает, что удаление точки перемены знака кривизны линий интерференционной картины от источника обратно пропорционально квадратному корню из параметра выпуклости (кривизны профиля хребта в окрестности гребня). Для хребтов с более крутыми склонами эта точка будет ближе к источнику. Остальная часть формулы (4.38) описывает зависимость $x_c(j,\ell)$ от параметров волновода (через посредство k_j) и скорости их изменения по глубине.

4.5. Широкоугольные модовые параболические уравнения

В этом разделе мы коротко рассмотрим широкоугольные модовые параболические уравнения (ШМПУ), которые являются более предпочтительными при численном решении практических задач подводной акустики, так как имеют существенно более широкую апертуру в горизонтальной плоскости при такой же, как для узкоугольного МПУ сложности алгоритма для их численного интегрирования. Заметим, что "стандартные" широкоугольные параболические уравнения являются наиболее распространенным в настоящее время инструментом для решения двумерных задач распространения звука [73, 202, 203] (они решаются в вертикальной плоскости в координатах r, z). Методы их численного решения детально разработаны, а также связанные с ними вопросы сходимости и устойчивости хорошо исследованы, и в этом смысле данный раздел имеет целью лишь их распространение на МПУ (т.е. на параболические уравнения для модовых амплитуд, решаемые в горизонтальной плоскости). Изложение в данном разделе в общих чертах следует работе [184]. Мы не будем рассматривать все возможные типы широкоугольных ПУ, которые можно получить, используя различные аппроксимации операторного квадратного корня (см. ниже), а ограничимся лишь описанием дробно-линейного ШМПУ и простой, но эффективной схемы для его численного решения, основанной на конечно-разностной аппроксимации второго порядка Крэнка-Николсон. ШМПУ с произвольной горизонтальной апертурой и их решение методом расщепления шагов Паде (SSP) описано [60, 61] в следующем разделе. Дробно-линейное ШМПУ, описанное здесь, отличается простотой в реализации, которая сочетается с вычислительной эффективностью. Наш опыт говорит о том, что обеспечиваемая им точность достаточна для решения всех практических задач акустики океана (разумеется, с поправкой на то, что при его использовании мы остаемся в рамках адиабатического приближения).

Важной с точки зрения численного решения особенностью МПУ (как узкоугольных, так и широкоугольных) является то, что задачи Коши для них, как правило, ставятся в областях, не имеющих физических границ в поперечном направлении (т.е. по y). В этом их принципиальное отличие от "обычных" параболических уравнений, решаемых в вертикальной плоскости: действительно, для последних расчетная область обычно представляет собой некоторый набор слоев, интерфейсы между которыми и формируют волновод, с верхней и нижней границами.[7] Следовательно, при численном решении МПУ всегда возникает необходимость искусственного ограничения расчетной области таким образом, чтобы приходящие на искусственные границы волны свободно покидали область, не испытывая отражения. С целью обеспечения свободного прохождения волн через границы на них ставятся так называемые граничные условия прозрачности (также называемые условиями искусственной/поглощающей/неотражающей границы – в рамках данной работы мы будем считать эти термины синонимами). Теория граничных условий прозрачности для параболических уравнений берет свое начало в работах Баскакова и Попова, Маркуса и Пападакиса [204–207]. Для широкоугольных ПУ такие условия, по-видимому, были впервые разработаны Поповым [208]. В дальнейшем они были обобщены на случай широкоугольных и псевдодифференциальных ПУ с аппроксимацями Паде произвольного порядка [209–212]. Позже Арнольд и Эрхардт показали, что наилучших результатов (практически полной прозрачности границы) можно добиться, если выводить граничные условия прозрачности не для самого параболического уравнения, а для соответствующей ему численной

[7] Роль верхней границы играет поверхность моря, нижняя же граница может быть фиктивной и располагаться на некоторой глубине $z = H$, где H достаточно велико.

схемы [213] (в этой работе использовалась схема типа Крэнка-Николсон). Мы адаптировали эти условия для решения ШМПУ [61, 184], что позволило получить надежный и высокоэффективный солвер для решения практических задач подводной акустики. Описанию данного метода решения ШМПУ по существу и посвящен данный раздел.

4.5.1. Вывод ШМПУ

В этом разделе мы рассмотрим процедуру вывода ШМПУ из уравнения горизонтальной рефракции (3.19). Еще раз отметим, что методика вывода является стандартной [73]. Мы начинаем с формальной факторизации оператора в левой части уравнения (3.19) (точнее, его однородного аналога, в котором опущена функция источника)

$$\left(\partial_x + i\sqrt{k_j^2 + \partial_y^2}\right)\left(\partial_x - i\sqrt{k_j^2 + \partial_y^2}\right) A_j = 0\,. \tag{4.39}$$

Сомножители в полученном уравнении являются псевдодифференциальными операторами, причем по отдельности они соответствуют волнам, распространяющимся в отрицательном и положительном направлениях оси x. Нас будет интересовать только распространение в положительном направлении, и потому мы заменяем (3.19) так называемым уравнением однонаправленного распространения

$$\left(\partial_x - i\sqrt{k_j^2 + \partial_y^2}\right) A_j = 0\,. \tag{4.40}$$

Выберем теперь отсчетное волновое число $k_{j,0}$ и (как и при выводе узкоугольного МПУ) перейдем к огибающей $\mathcal{A}_j$ модовой амплитуды A_j путем устранения главной осцилляции

$$\mathcal{A}_j(x,y) = e^{-ik_{j,0}x} A_j(x,y)\,.$$

Легко видеть, что огибающая $\mathcal{A}_j$ будет удовлетворять следующему псевдодифференциальному ПУ

$$\frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x} = ik_{j,0}\left(\sqrt{1 + \hat{L}_j} - 1\right)\mathcal{A}_j\,, \tag{4.41}$$

где оператор $\hat{L}_j$ определяется равенством $k_{j,0}\hat{L}_j = \partial_y^2 + k_j^2 - k_{j,0}^2$.

Далее мы формально аппроксимируем оператор $\sqrt{1+\hat{L}_j}$ дробно-линейной функцией

$$\sqrt{1+\hat{L}_j} \approx \frac{a + b\hat{L}_j}{1 + c\hat{L}_j}\,, \tag{4.42}$$

где коэффициенты a, b, c выбираются таким образом, чтобы приближение (4.42) было оптимальным для символа оператора $\sqrt{1+p}$ на некотором интервале значений аргумента p [73]. Заменим теперь операторный квадратный корень в уравнении (4.41) на его дробно-линейную аппроксимацию (4.42) и, введя обозначения $\alpha_0 = a - 1$, $\alpha_1 = b - c$, получим следующее ШМПУ

$$\frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x} = ik_{j,0}\,\frac{\alpha_0 + \alpha_1\hat{L}_j}{1 + c\hat{L}_j}\,\mathcal{A}_j\,. \tag{4.43}$$

4.5.2. Численная схема для решения ШМПУ

Построим теперь численную схему для решения (4.43), выполнив его дискретизацию методом Крэнка-Николсон. С этой целью введем равномерную сетку с шагами Δx и Δy

$$\begin{aligned} x_n &= n\Delta x, & n &= \overline{0, N}\,, \\ y_m &= y_0 + m\Delta y, & m &= \overline{0, M}\,, \\ k_j^{n,m} &= k_j\left(x_n, y_m\right)\,, \\ \mathcal{A}_j^{n,m} &\approx \mathcal{A}_j\left(x_n, y_m\right)\,. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Перепишем теперь уравнение (4.43) в виде

$$\left(1 + c\hat{L}_j\right)\frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x} = ik_{j,0}\left(\alpha_0 + \alpha_1\hat{L}_j\right)\mathcal{A}_j \tag{4.45}$$

и выполним его дискретизацию по x

$$\left(1 + c\hat{L}_j^{\frac{n}{2},m}\right)\frac{\mathcal{A}_j^{n+1,m} - \mathcal{A}_j^{n,m}}{\Delta x} = ik_{j,0}\left(\alpha_0 + \alpha_1\hat{L}_j^{\frac{n}{2},m}\right)\frac{\mathcal{A}_j^{n+1,m} + \mathcal{A}_j^{n,m}}{2}\,. \tag{4.46}$$

Здесь мы ввели следующие обозначения

$$k_{j,0}^2\hat{L}_j^{\frac{n}{2},m} = \partial_y^2 + \kappa_j^{\frac{n}{2},m} - k_{j,0}^2\,,$$

$$\kappa_j^{\frac{n}{2},m} = \frac{\left(k_j^{n+1,m}\right)^2 + \left(k_j^{n,m}\right)^2}{2}.$$

Собирая значения неизвестной функции $\mathcal{A}_j$ в n-ом и $n+1$-ом слоях по x и дополнительно вводя константы

$$\beta_{j,0} = 2 - \alpha_0 i k_{j,0} \Delta x, \quad \beta_{j,1} = 2c - \alpha_1 i k_{j,0} \Delta x\,,$$
$$\gamma_{j,0} = 2 + \alpha_0 i k_{j,0} \Delta x, \quad \gamma_{j,1} = 2c + \alpha_1 i k_{j,0} \Delta x\,,$$

мы получаем следующую численную схему второго порядка по Δx, приближающую эволюционное уравнение (4.45)

$$\left(\beta_{j,0} + \beta_{j,1} L_j^{\frac{n}{2},m}\right) \mathcal{A}_j^{n+1,m} = \left(\gamma_{j,0} + \gamma_{j,1} L_j^{\frac{n}{2},m}\right) \mathcal{A}_j^{n,m}\,. \tag{4.47}$$

Нам остается теперь заменить оператор $L_j^{\frac{n}{2},m}$ его центральной конечно-разностной аппроксимацией второго порядка

$$\partial_y^2 \mathcal{A}_j^{n,m} \approx \frac{\mathcal{A}_j^{n,m+1} - 2\mathcal{A}_j^{n,m} + \mathcal{A}_j^{n,m-1}}{\Delta y^2}\,, \tag{4.48}$$

чтобы получить численную схему для решения ШМПУ (4.43)

$$\begin{aligned} p_{j,0} \mathcal{A}_j^{n+1,m+1} &+ q_{j,0}^{n,m} \mathcal{A}_j^{n+1,m} + p_{j,0} \mathcal{A}_j^{n+1,m-1} \\ &= p_{j,1} \mathcal{A}_j^{n,m+1} + q_{j,1}^{n,m} \mathcal{A}_j^{n,m} + p_{j,1} \mathcal{A}_j^{n,m-1}\,, \end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered} p_{j,0} = \frac{\beta_{j,1}}{k_{j,0}^2 \Delta y^2}, \quad q_{j,0}^{n,m} = \beta_{j,0} - \beta_{j,1} \mathcal{L}_j^{n,m}\,, \\ p_{j,1} = \frac{\gamma_{j,1}}{k_{j,0}^2 \Delta y^2}, \quad q_{j,1}^{n,m} = \gamma_{j,0} - \gamma_{j,1} \mathcal{L}_j^{n,m}\,, \\ \mathcal{L}_j^{n,m} = \frac{1}{k_{j,0}^2} \left(\kappa_j^{\frac{n}{2},m} - k_{j,0}^2 - \frac{2}{\Delta y^2} \right)\,. \end{gathered} \tag{4.49}$$

Таким образом, на каждом шаге численной схемы по x для пересчета вектора $(\mathcal{A}_j^{n,1}, \ldots, \mathcal{A}_j^{n,M})$ в вектор $(\mathcal{A}_j^{n+1,1}, \ldots, \mathcal{A}_j^{n+1,M})$ необходимо выполнить обращение трехдиагональной матрицы. Сложность этого алгоритма для расчета звукового поля во всех точках сетки есть $\mathcal{O}(N \cdot M)$.

Заметим, что описанный здесь метод обеспечивает аппроксимацию второго порядка и по x, и по y.

4.5.3. Граничные условия прозрачности для ШМПУ

В практических задачах численного моделирования распространения звука, как было отмечено выше, необходимо использовать так называемые *граничные условия прозрачности* (ГУП) с целью искусственного ограничения расчетной области, вообще говоря не имеющей физический границ по y. Мы будем использовать полностью дискретные ГУП, разработанные Арнольдом и Эрхардтом [213] в крайних узлах сетки по y (т.е. при $y = y_0$ и $y = y_N$).

При выводе ГУП Арнольда-Эрхардта [213] предполагается, что k_j должно быть постоянной величиной (т.е. не зависящей от x) в граничных точках расчетной области $y = y_0$ и $y = y_N$:

$$k_j^0 = k_j\left(0, y_0\right), \quad k_j^M = k_j\left(0, y_M\right) . \tag{4.50}$$

Это требование является вполне разумным с физической точки зрения, так как при наличии неоднородностей на границе расчетной области нельзя пренебрегать рассеянием на них звуковых волн, падающих на эту границу изнутри. Следовательно, в этом случае область необходимо расширить, с тем чтобы включить в нее рассеивающие объекты.

Полностью дискретные ГУП при $y = y_0$ имеют вид

$$\left(1 + iq\right) \mathcal{A}_j^{n+1,1} - s_0^{(0)} \mathcal{A}_j^{n+1,0} = -\left(1 - iq\right) \mathcal{A}_j^{n,1} + \sum_{l=1}^{n} \mathcal{A}_j^{l,0} s_0^{(n-l+1)} , \tag{4.51}$$

где $q = 2c/(k_{j,0}\alpha_1 \Delta x)$. Коэффициенты свертки $s_0^{(l)}$ в уравнении (4.51) могут быть вычислены по следующим рекуррентным формулам [213]

$$\begin{aligned} s_0^{(0)} &= 1 + iq - \frac{i}{2}\left(\gamma + i\sigma + \sqrt[+]{A}\right) , \\ s_0^{(1)} &= 1 - iq + \frac{i}{2}\left(\gamma - i\sigma + \frac{B}{\sqrt[+]{A}}\right) , \\ s_0^{(2)} &= \frac{\mu}{2\lambda}\left(s_0^{(1)} + \frac{s_0^{(0)}}{\lambda\mu} - \beta\right) , \\ s_0^{(n+1)} &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{2n-1}{\lambda}\mu s_0^{(n)} - \frac{n-2}{\lambda^2} s_0^{(n-1)}\right) , \end{aligned} \tag{4.52}$$

с коэффициентами, определяемыми соотношениями

$$
\begin{gathered}
R=\frac{2k_{j,0}}{\alpha_1}\frac{\Delta y^2}{\Delta x} \qquad \delta=1-c\left(1-N_0^2\right) , \\
\kappa=\frac{\Delta x k_{j,0}}{2}\left(\alpha-\alpha_1\left(1-N_0^2\right)\right) , \\
\gamma=R\delta \qquad \sigma=-R\kappa \qquad N_0=\frac{k_{j,0}}{k_j^0} , \\
\lambda=\frac{\sqrt[+]{A}}{\sqrt[+]{C}} \qquad \mu=\frac{B}{\sqrt[+]{A}\,\sqrt[+]{C}} , \\
A=(\gamma-i\sigma)\left(\gamma-4q+i(\sigma+4)\right) , \\
B=\gamma(\gamma-4q)+\sigma(\sigma+4) , \\
C=(\gamma-i\sigma)\left(\gamma-4q-i(\sigma+4)\right) , \\
\beta=1-iq+\frac{i}{2}(\gamma-i\sigma)+\frac{C}{B}\left(1+iq-\frac{i}{2}(\gamma+i\sigma)\right) . \qquad (4.53)
\end{gathered}
$$

При $y=y_N$ ГУП имеет вид

$$
(1+iq)\,\mathcal{A}_j^{n+1,M-1}-s_M^{(0)}\mathcal{A}_j^{n+1,M}=-\,(1-iq)\,\mathcal{A}_j^{n,M-1}+\sum_{l=1}^{n}\mathcal{A}_j^{l,M}s_M^{(n-l+1)} , \qquad (4.54)
$$

а коэффициенты свертки $s_M^{(l)}$ находятся по формулам, аналогичным (4.52).

4.5.4. Стартеры для ШМПУ

Для инициализации маршевой схемы при решении ШМПУ и ПДМПУ необходимо задать начальное условие при $x=0$ (или, более общо, при $x=x_0>0$). С математической точки зрения его можно назвать начальным условием задачи Коши для ШМПУ/ПДМПУ, однако в акустике океана принято использовать термин “стартер”, являющийся калькой соответствующего английского слова (starter), впервые использованного, по-видимому, Коллинзом [214].

В задачах акустики океана стартеры, как правило, строятся таким образом, чтобы получаемое из них решение ШМПУ приближало решение уравнения Гельмгольца (в нашем случае, разумеется, речь идет об уравнении горизонтальной рефракции) с вынуждающим членом в виде дельта-функции. Казалось бы, существующие варианты стартеров для стандартных широкоугольных ПУ (см., например, [73]), решаемых в вертикальной плоскости, должны без труда обобщаться на случай МПУ. При разработке представленной в данной главе методики расчета звуковых полей, основанной на решении ШМПУ (а также представленных в следующем разделе ПДМПУ), однако, мы обнаружили, что это не совсем так, и что существующие варианты начальных условий для уравнений такого типа, приближающие поле точечного источника, не подходят для МПУ ввиду специфики решаемой задачи. В частности, оказалось, что хотя некоторые из существующих стартеров обеспечивают сколь угодно широкую апертуру в горизонтальной плоскости, они при этом задают жесткие ограничения на шаг маршевой схемы, не позволяющие полностью реализовать потенциал метода. Это привело нас к разработке нового стартера для ШМПУ, который не привносит дополнительных ограничений на шаги дискретизации уравнений.

Для определенности мы будем считать, что рассматриваемые ниже стартеры используются совместно с уравнением однонаправленного распространения (4.41) или получаемыми из него ШМПУ. Еще раз отметим, однако, что все представленные в этом разделе начальные условия могут использоваться и для инициализации солвера ПДМПУ (см. следующий раздел данной главы).

Стартер Грина

Исторически первое специализированное начальное условие для моделирования поля точечного источника в рамках теории широкоугольных ПУ предложил Грин [203]. Параметры данного условия специально адаптированы для дробно-линейной аппроксимации Паде, и в этом смысле оно идеально подходит для уравнения (4.43). Начальное условие (стартер) Грина задается формулой

$$\mathcal{A}_j(0,y) = \frac{\phi_j(z_s)}{2\sqrt{\pi}}\left(1.4467 - 0.8402k_{j,0}^2y^2\right)e^{-\frac{k_{j,0}^2y^2}{1.5256}}\,, \tag{4.55}$$

которая исключительно проста в реализации. Оно обеспечивает достаточно широкую апертуру для решения большого числа практических задач акустики океана, особенно для досточно низких частот (до 50 Гц). Очевидно, функция, описывающая данный стартер, является локализованной в малой окрестности источника $y = 0$, и, таким образом, данное условие может использоваться в связке как с ГУП, так и с совершенными поглощающими слоями.

Заметим, однако, что для более высоких частот (например, для полосы 300–500 Гц, используемой для передачи навигационных сигналов), стартер (4.55) обеспечивает апертуру лишь около $\pm 10^\circ$ в горизонтальной плоскости, что далеко не всегда удовлетворительно на практике. Кроме того, данный стартер налагает существенные ограничения на шаги сетки как по x, так и по y. В частности, если шаг Δy слишком велик, то он может оказаться недостаточным для того, чтобы график функции (4.55) хорошо разрешался соответствующей сеткой по y (результатом этого может стать появление паразитных осцилляций, вызванных недостаточной точностью аппроксимации разностных производных этой функции). Наши вычислительные эксперименты показывают, что удовлетворительное разрешение начальной функции (4.55) достигается при условии, что на горизонтальную длину волны $2\pi/k_{j,0}$ приходится не менее 30 точек сетки по y. Таким образом шаг сетки Δy в практических расчетах не должен превышать величины $|1/(5k_{j,0})|$.

Кроме того, хотя ШМПУ, основанные на аппроксимациях Паде высших порядков (и тем более ПДМПУ), допускают намного большие шаги Δx маршевой схемы в направлении x, чем обычно требуется для разрешения волн (например, 10–20 точек на характерную длину горизонтальной волны), стартер (4.55) налагает дополнительное ограничение и на величину Δx в связи с появлением паразитных осцилляций в боковых лепестках, формируемых им в дальнем поле (вариации поля по x в боковых лепестках характеризуются существенно меньшими пространственными периодами, чем в параксиальной части решения).

Самоинициализация решения МПУ по методу Коллинза

Изящная методика самоинициализации решения ШПУ была предложена Коллинзом в 1992 году [214]. Соответствующее начальное условие (и процедура его получения) в англоязычной литературе обозначается емким, но трудно переводимым термином self-starter. Мы будем называть его просто стартером Коллинза. Его можно использовать для инициализации солверов как ШМПУ, так и ПДМПУ. Заметим, однако, что данная методика была предложена Коллинзом для решения ШПУ в вертикальном сечении волновода (т.е. для двумерных задач акустики океана), где имеет место волноводное распространение звука. При решении ШМПУ и ПДМПУ в горизонтальной плоскости где, вообще говоря, распространение не имеет волноводного характера, обоснование применимости стартера Коллинза является чуть более сложным. Оно впервые представлено в нашей работе [61] и воспроизведено далее в этом разделе. Кроме того, в разделе 4.6.4, следуя указанной работе, мы также покажем, каким образом можно сочетать использование стартера Коллинза и совершенных поглощающих слоев.

Для вывода стартера Коллинза предположим, что в некоторой малой окрестности источника $0 \leq x < x_0$ коэффициенты (4.41) не зависят от x, т.е. что в операторе $\hat{L}$ переменный коэффициент $k = k(y)$ есть функция только y (в рамках данного подраздела мы всюду опускаем индекс j, соответствующий номеру вертикальной моды).

Рассмотрим полную систему собственных функций $\{f_\nu(y)\}$ оператора $\partial_y^2 + k^2$ на интервале $y \in (-\infty, \infty)$, а также соответствующие им собственные значения λ_ν^2. В указанном выше предположении решение уравнения горизонтальной рефракции (3.19) для $x > 0$ может быть записано в виде

$$A(x,y) = \frac{i\phi(z_s)}{2} \int \frac{1}{\lambda_\nu} f_\nu(0) f_\nu(y)\, \mathrm{e}^{i\lambda_\nu x}\, \mathrm{d}\nu\,. \tag{4.56}$$

Легко видеть, что данное решение при $x = 0$ переходит в функцию

$$A_0(y) \equiv A(0,y) = \frac{i\phi(z_s)}{2} \int \frac{1}{\lambda_\nu} f_\nu(0) f_\nu(y)\, \mathrm{d}\nu \,,$$

удовлетворяющую краевой задаче для одномерного уравнения

$$\sqrt{\partial_y^2 + k^2} A_0 = \frac{i\phi(z_s)}{2}\, \delta(y)$$

с условиями излучения на бесконечности. Решение данной краевой задачи для $k = k(y)$ затруднительно получить численно. По этой причине Коллинз предложил следующую схему инициализации ШПУ [214], состоящую из трех шагов.

На первом шаге строится решение вспомогаетльной краевой задачи для уравнения

$$(1 + \hat{L})\Phi = \frac{i\phi(z_s)}{2k_0^2}\, \delta(y) \,, \tag{4.57}$$

которое легко получить численно (используя дополнительные условия при $y = 0$, эквивалентные наличию дельта-функции $\delta(y)$ в правой части). В частности, при постоянном $k(y) = k_0$, краевая задача для уравнения (4.57) имеет простое аналитическое решение

$$\Phi_0(y) = \frac{\phi(z_s)}{4}\, \mathrm{e}^{ik_0|y|} \,, \tag{4.58}$$

с разрывной производной при $y = 0$. В случае произвольной функции $k(y)$ решение краевой задачи для (4.57) может быть выписано в виде разложения по собственным функциям $\{f_\nu(y)\}$

$$\Phi_0(y) = \frac{i\phi(z_s)}{2} \int \frac{1}{\lambda_\nu^2} f_\nu(0) f_\nu(y) \mathrm{d}\nu \,. \tag{4.59}$$

Второй шаг состоит в применении маршевой схемы (например, описанной в разделе 4.5.2) к начальному условию, заданному функцией $\Phi(y)$, с целью решения ШМПУ в небольшой полосе $0 \le x \le x_0$. В результате при $x = x_0$ мы получим функцию

$$\Phi_{x_0}(y) = \frac{i\phi(z_s)}{2} \int \frac{1}{\lambda_\nu^2} \mathrm{e}^{i\lambda_\nu x_0} f_\nu(0) f_\nu(y) \mathrm{d}\nu \,. \tag{4.60}$$

Из формулы (4.56) следует, что модовая амплитуда $A(x_0, y)$ может быть вычислена путем применения к функции $\Phi_{x_0}(y)$ линейного оператора $k_0\sqrt{1+\hat{L}}$, т.е. что

$$A(x_0, y) = k_0\sqrt{1+\hat{L}}\Phi_{x_0}(y)\,.$$

На этом этапе оператор $\sqrt{1+\hat{L}}$ может быть заменен его аппроксимацией Паде следующего вида

$$\sqrt{1+\hat{L}} = \prod_{s=1}^{p} \frac{1+c^s\hat{L}}{1+b^s\hat{L}}\,. \tag{4.61}$$

Используя аппроксимацию оператора (4.61), мы, зная $\Phi_{x_0}(y)$, легко можем рассчитать $A(x_0, y)$. Эта функция может быть использована в качестве стартера для ШМПУ при $x = x_0$.

Хотя теоретически данный подход позволяет получить стартер со сколь угодно широкой апертурой в горизонтальной плоскости, он также привносит паразитные осцилляции в численное решение задачи, так как применение нескольких шагов солвера ШМПУ к Φ_0 включает в себя вычисление второй производной этой функции по y (хотя даже ее первая производная не является непрерывной). Тем не менее, стартер Коллинза работает хорошо, если шаги сетки Δx и Δy достаточно малы (см. примеры ниже).

Заметим еще, что начальное условие при $x = 0$, полученное из краевой задачи для уравнения (4.57), не имеет компактного носителя (и не является локализованным ни в каком разумном смысле этого слова). Причину этого легко понять по виду формулы (4.58). Таким образом, применение стартера Коллинза автоматически делает неэффективным использование ГУП, и для искусственного ограничения расчетной области в этом случае следует употребить совершенные поглощающие слои (см. раздел 4.6.4).

Лучевой стартер для ШМПУ

Как следует из предыдущих разделов, известные стартеры для ШПУ не являются удовлетворительными с точки зрения эффективности расчетов трехмерных звуковых полей с использованием ШМПУ, так как налагают дополнительные ограничения на шаги сетки. В этом разделе мы рассмотрим предложенный нами стартер для ШМПУ [61], основанный на лучевом представлении поля в горизонтальной плоскости (см. раздел 3.2 предыдущей главы).

Идея формирования стартера с использованием лучевой теории весьма проста и естественна для рассматриваемого типа задач, где расчетная область не ограничена в направлении оси y (в отличие от случая стандартных ПУ, решаемых в координатах r, z в вертикальном сечении волновода, ограниченного в направлении оси z).

Пусть x_0 сопоставимо с длиной волны звука. Зададим интервал $[-\alpha_0, \alpha_0]$ и выполним расчет веера лучевых траекторий с углами скольжения α^s относительно оси x на выходе из источника до их пересечения с линией $x = x_0$ путем решения системы Гамильтона (3.23). Важно, чтобы при $x < x_0$ эти траектории заведомо не пересекались друг с другом. Во всех точках их пересечения с прямой $x = x_0$ рассчитаем величину $A_j(x_0, y(\alpha^s))$ с помощью формулы (3.25) и домножим ее на некоторую сглаживающую оконную функцию, равную единице при $\alpha \in [-\alpha_0 + \delta\alpha, \alpha_0 - \delta\alpha]$ и быстро убывающую на интервалах $[-\alpha_0, -\alpha_0 + \delta\alpha]$ и $[\alpha_0 - \delta\alpha, \alpha_0]$. Полученную в результате функцию α можно также считать функцией y, заданной в точках $y(\alpha^s)$. Выполним ее интерполяцию на точки сетки y_m, получим значения $A_j(x_0, y_m)$, вектор которых и будем считать начальным условием для ШМПУ, заданным при $x = x_0$.

Построенный таким образом лучевой стартер позволяет регулировать апертуру источника путем выбора α_0, что весьма удобно при использовании аппроксимаций Паде различных порядков.

Заметим еще, что если x_0 мало, и в окрестности источника параметры среды меняются плавно, то на практике можно пользоваться формулами для горизонтальных лучей в однородной по x, y среде (3.26).

Разумеется, лучевой стартер также может использован и для инициализации солверов стандартных ПУ, решаемых в вертикальной плоскости (а также и трехмерных ПУ). В этом случае, однако, выбирать x_0 следует с осторожностью, чтобы лучи при $x = x_0$ еще не достигали дна и поверхности океана.

Сравнение различных стартеров

Выполним сравнение описанных выше стартеров задаче расчета поля в регулярном волноводе (т.е. в случае, когда параметры среды не зависят от x, y). В этом случае уравнение горизонтальной рефракции имеет аналитическое решение

$$A_j(x,y) = \frac{i}{4}\phi_j(z_s)\,H_0^{(1)}\big(k_j\sqrt{x^2+y^2}\big)\,. \tag{4.62}$$

Рассмотрим точечный источник звука с частотой $f = 25\,$Гц расположенный на глубине $z_s = 100\,$м в море с постоянной глубиной $200\,$м. Акустическое поле такого источника мы будем вычислять в горизонтальной плоскости на глубине $z_r = 30\,$м.

Скорость звука c_w и плотность ρ_w в водном слое, а также соответствующие параметры дна c_b и ρ_b принимают следующие значения

$$c_w = 1500 \text{ м/с}\,, \quad \rho_w = 1 \text{ г/см}^3\,, \quad c_b = 1700 \text{ м/с}\,, \quad \rho_b = 1,5 \text{ г/см}^3\,,$$

а коэффициент поглощения в дне равен $0,5$ дБ$/\lambda$. Ограничим волновод снизу плоскостью $z = H = 1000$ м, на которой поставим условие мягкой границы.

Для данной частоты в рассматриваемом волноводе возбуждаются три водны моды, которые и учитываются при расчетах поля в данном разделе. Модовые амплитуды вычислялись посредством численного решения ШМПУ и ПДМПУ (см. следующий раздел) с порядком аппроксимации Паде $p = 10$.

Акустическое поле, рассчитанное в волноводе с указанными параметрами с использованием аналитической формулы для модовых амплитуд (4.62), а также приближенные решения данной задачи, полученные с помощью ШМПУ и трех различных стартеров, описанных в предыдущих подразделах, показаны на Рис. 4.15 (для лучевого стартера выбран угол раскрыва $\alpha_0 = 80°$). Данный рисунок качественно иллюстрирует апертуру в горизонтальной плоскости, которую обеспечивает каждый из них.

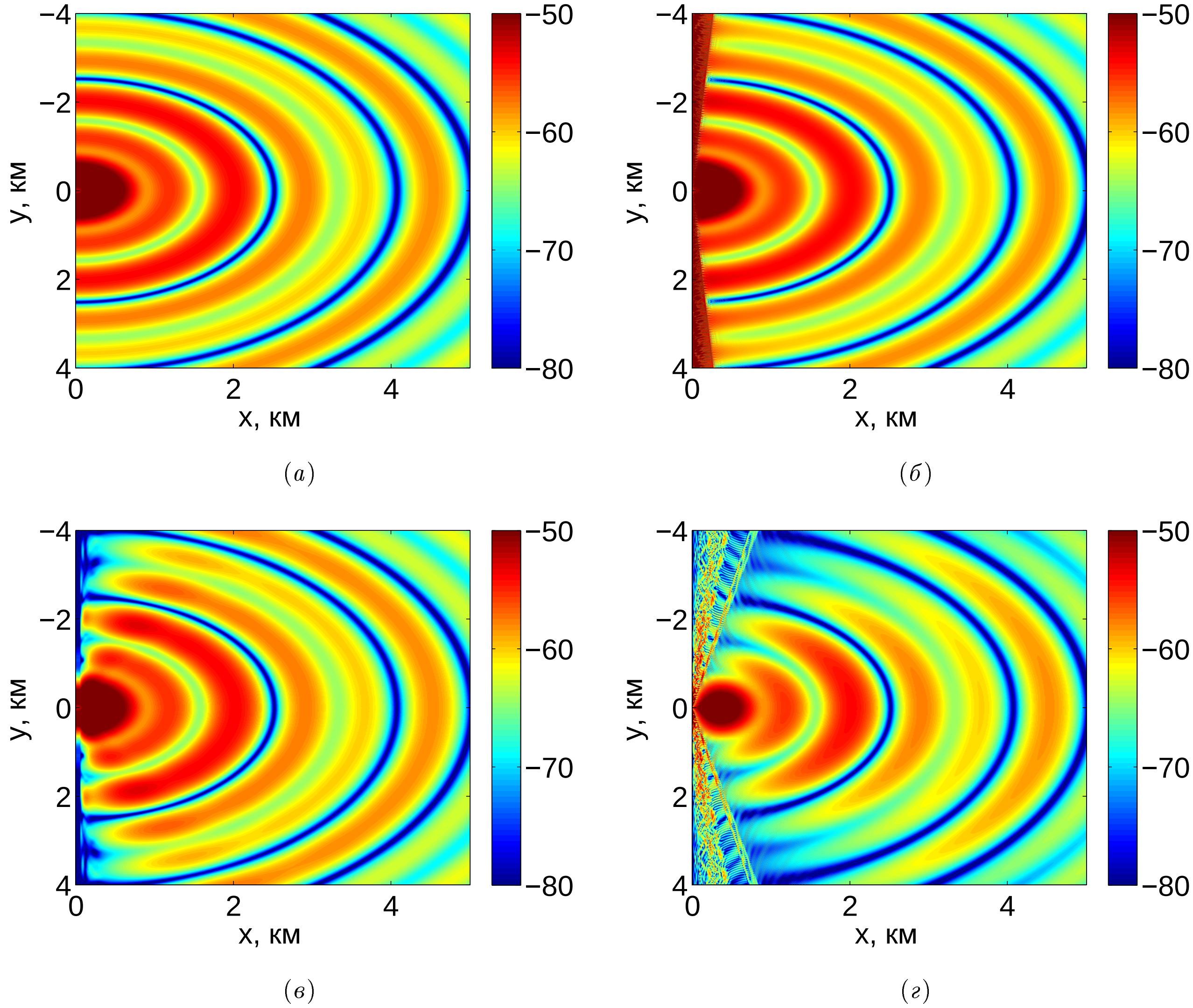


Рис. 4.15. Контурные графики уровней акустического поля $|P(x, y, z = z_r)|$ (в дБ отн. 1 м) в случае регулярного волновода (параметры среды не зависят от x, y): аналитическое решение (а) и численные решения, полученные с помощью стартера Коллинза (б), лучевого стартера (в) и стартера Грина (г).

Количественное сравнение решений, получаемых при использовании каждого из трех стартеров, можно выполнить, сопоставив рассчитанные с их помощью зависимости акустического давления от полярного угла $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$ в горизонтальной плоскости на некотором фиксированном рассстоянии $r = \sqrt{x^2 + y^2} = r_0 = \text{const}$ от источника. Графики этих зависимостей представлены на Рис. 4.16 для $r = r_0 = 3$ км.

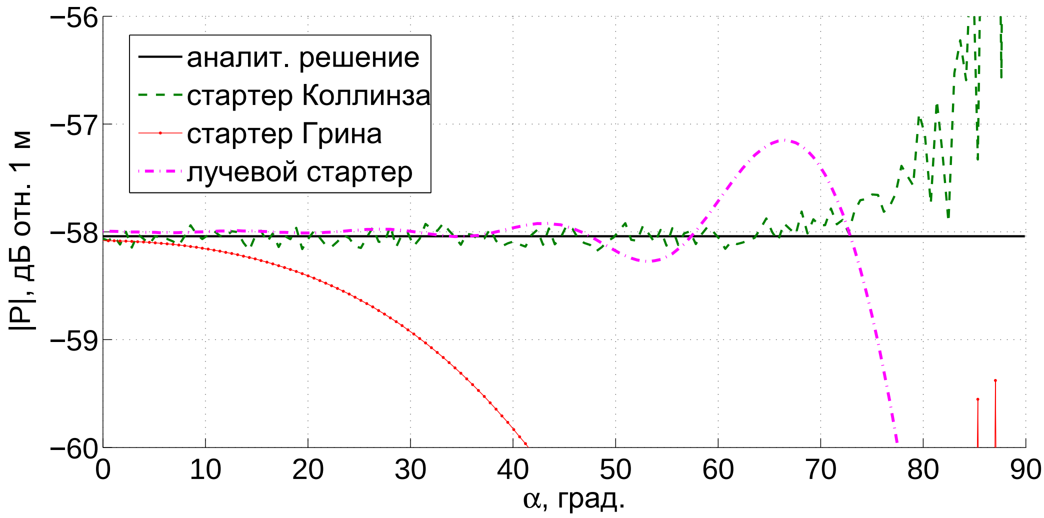


Рис. 4.16. Акустическое давление (в дБ отн. 1 м) как функция полярного угла в горизонтальной плоскости α при $r = r_0 = 3\,$км, рассчитанное с использованием различных стартеров.

Вследствие симметрии задачи, аналитическое решение при $r = r_0$ не зависит от θ, тогда как решения, полученные с помощью ШМПУ, отличаются от него при достаточно больших значениях полярных углов. Во-первых, отметим, что даже на этом (достаточно небольшом) расстоянии от источника звука стартер Грина не возбуждает волн с углами скольжения $|\alpha| > 30^\circ$ относительно оси x (соответствующая ошибка уже превышает 1 дБ). Легко видеть, что лучевой стартер обеспечивает существенно большую апертуру решения в горизонтальной плоскости, причем результирующее плавно меняется с θ. Волны с углами выхода из источника α до 75° включительно описываются решением ШМПУ с таким начальным условием с ошибкой в пределах 1 дБ.

Теоретически стартер Коллинза обеспечивает данный уровень точности даже для большего интервала углов выхода $|\alpha| < 80^\circ$. Однако достичь этого уровня можно лишь при использовании очень маленьких шагов маршевой схемы $\Delta x \leq 2\,$м ввиду появления в решении паразитных осцилляций, которые хорошо видны на Рис. 4.16. Для бо́льших шагов Δx при использовании данного стартера решение ШМПУ становится неустойчивым (особенно при больших значениях порядка аппроксимации Паде p), и общая картина поля может оказаться полностью скрытой на фоне осцилляций такого типа. При использовании лучевого стартера, напротив, решение ШМПУ демонстрирует высокую устойчивость, и точность в пределах 1 дБ относительно аналитического решения выдерживается в интервале $|\alpha| < 75^\circ$ даже для шага $\Delta x = 250$ м.

Из рассмотрения данного примера мы можем сделать вывод о том, что лучевой стартер, предложенный в нашей работе [61], по-видимому является оптимальным для моделирования точечного источника в рамках метода ШМПУ. Заметим, однако, что в случае, когда акустическое поле рассчитывается в полосе фиксированной ширины в несколько километров (как обычно и бывает на практике), результаты на больших расстояниях от источника (например, при удалении на несколько десятков километров) будут практически одинаковыми для всех стартеров, при условии, что используются достаточно мелкая расчетная сетка. С другой стороны устойчивость решения относительно выбора величины шага маршевой схемы имеет важное значение на практике во всех случаях, т.к. порождаемые слишком большими шагами паразитные осцилляции на больших расстояниях от источника могут полностью испортить решение. Именно лучевой стартер налагает наименее жесткие ограничения на шаг сетки.

4.6. Псевдодифференциальное модовое параболическое уравнение в криволинейных координатах

В этом разделе построим модовые параболические уравнения с произвольно широкой апертурой в горизонтальной плоскости, обобщим результаты предыдущего раздела. Вместо использования аппроксимации Паде для операторного квадратного корня в уравнении (4.41) мы перейдем к соответствующему этому уравнению пропагатору, т.е. операторной экспоненте, которая является формальным решением (4.41) для малого шага по маршевой переменной x, и уже затем рассмотрим численный метод для приближенного вычисления такого пропагатора. Этот метод будет основан на построении θ-аппроксиманта Паде для операторной экспоненты. Фактически мы будем осуществлять непосредственное численное решение псевдодифференциального МПУ (4.70) (ПДМПУ). Такой метод расчета волновых полей, по-видимому, был независимо открыт Авиловым [215, 216] и Коллинзом [217]. Хотя работу последнего цитируют чаще, по-видимому, это связано лишь с тем, что пионерскую работу Авилова [215] получить весьма затруднительно. В англоязычной литературе этот метод известен как Split-Step Padé (чаще используется просто аббревиатура SSP)[8], хотя это название, на наш взгляд, является не вполне удачным, так как не отражает сути выполняемых при его использовании вычислений. В рамках данной работы мы будем называть его методом аппроксимации Паде экспоненты операторного квадратного корня (АПЭОКК).

Поскольку в этом разделе наша цель состоит в разработке наиболее универсального метода расчета модовых амплитуд, мы сделаем здесь еще одно дополнительное обобщение. В некоторых случаях целесообразно выводить и решать МПУ в криволинейных координатах. В качестве примера укажем на рассмотренную в разделе 3.4 задачу о формировании волн шепчущей галереи в окрестности криволинейной изобаты (см. также [38]) под влиянием горизонтальной рефракции звука на неоднородном дне. Такие волны естественно моделировать в ортогональной криволинейной системе координат, где изобата совпадает с одной из координатных линий (например, в полярных координатах в случае, если изобата, в окрестности которой формируется шепчущая галерея, представляет собой дугу окружности). Из литературы известны и другие примеры задач, в которых естественно использовать криволинейные координаты для моделирования распространения звука (см., например, работу [218] где рассматривается канализация звуковых волн между двумя искривленными фронтами внутренних волн). В этом разделе мы будем, однако, ассоциировать наши координаты с криволинейными изобатами, чтобы иметь конкретный пример для приложения наших результатов, хотя, разумеется в общем случае одно из семейств криво-

[8] На русский язык его можно перевести как “метод расщепления Паде”.

линейных координатных линий должно совпадать с семейством линий уровня функции $k_j = k_j(x, y)$ (или эффективного показателя преломления для горизонтальных лучей). Если профиль скорости звука в воде можно считать постоянным на некоторой акватории, такие линии уровня будут совпадать с изобатами. Разумеется, описанный ниже метод применим и для решения ПДМПУ в обычных декартовых координатах x, y в горизонтальной плоскости, которые естественно использовать в большинстве практических задач моделирования распространения звука в мелком море.

4.6.1. Вывод ПДМПУ в криволинейных координатах

Предположим, что изобата, в окрестности которой формируются волны шепчущей галереи, задана параметрическим уравнением

$$x = X(s)\,, y = Y(s)\,, \tag{4.63}$$

где s есть натуральный параметр (длина дуги кривой). Мы начнем с задания ортогональной криволинейной системы координат (s, ξ) в окрестности такой изобаты, где ось ξ ориентирована вдоль градиента глубины $\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)$ и имеет противоположное ему направление (такой выбор сделан с тем, чтобы ось ξ совпадала со стандартной нормалью $\mathbf{n} = (Y'(s), -X'(s))$ к изобате (4.63), которая фигурирует, например, в формулах Френе). Некоторая точка (s, ξ) в окрестности изобаты имеет декартовы координаты

$$\begin{cases} x = X(s) + nY'(s)\,, \\ y = Y(s) - nX'(s)\,. \end{cases} \tag{4.64}$$

В криволинейной системе координат (s, ξ) адиабатическое уравнение горизонтальной рефракции (3.19) может быть записано в виде

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\gamma \frac{\partial A_j}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial A_j}{\partial s}\right) + k_j^2 A_j = 0\,, \tag{4.65}$$

где мы опустили вынуждающий член в правой части. В уравнении (4.65) переменный коэффициент $\gamma = \gamma(s, \xi) = 1 + \xi\varkappa(s)$ связан с геометрией изобаты, причем $\varkappa(s)$ есть ее кривизна. Она равна длине производной единичного касательного вектора $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$ к изобате и вычисляется по формуле

$$\varkappa(s) = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2X}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{ds^2}\right)^2}\,. \tag{4.66}$$

Вывод ПДМПУ, соответствующих (4.65), можно существенно упростить, если избавиться от дивергентной формы по переменной s. Последнее может быть сделано с помощью подстановки вида $A_j(s,\xi) = \sqrt{\gamma}v(s,\xi)$.[9] Легко видеть, что уравнение для $v = v(s,\xi)$ имеет следующий вид

$$v_{ss} + \left(\gamma^2 v_\xi\right)_\xi + \left[\gamma^2 k^2 + \frac{1}{4}(\gamma_\xi)^2 + \frac{1}{2}\frac{\gamma_{ss}}{\gamma} - \frac{3}{4}\frac{(\gamma_s)^2}{\gamma^2}\right] v = 0\,. \tag{4.67}$$

Для дальнейшего его удобно переписать в операторной форме

$$v_{ss} = -\hat{L}(s)v\,, \tag{4.68}$$

где

$$\hat{L}(s) = \frac{\partial}{\partial\xi}(\gamma^2)\frac{\partial}{\partial\xi} + \left[\gamma^2 k^2 + \frac{1}{4}(\gamma_\xi)^2 + \frac{1}{2}\frac{\gamma_{ss}}{\gamma} - \frac{3}{4}\frac{(\gamma_s)^2}{\gamma^2}\right]$$

есть оператор, содержащий производные по поперечному к изобате направлению.

Выполняя формальную факторизацию оператора в правой части (4.68), мы можем получить соответствующее псевдодифференциальное ПУ (ПДПУ)

$$v_s = i\sqrt{\hat{L}(s)}v\,. \tag{4.69}$$

Из общих соображений, однако, следует, что несколько более точным приближением (в смысле теории псевдодифференциальных операторов) к (4.68), к тому же обладающим рядом достоинств с физической точки зрения, является так называемое ПДПУ с сохранением энергии [155, 219–222]. Его можно получить, сделав еще одну замену зависимой переменной $\varphi(s,\xi) = \sqrt[4]{\hat{L}(s)}v(s,\xi)$. Легко показать, что ПДПУ для φ будет иметь ту же форму, что и для $v(s,\xi)$

$$\varphi_s = i\sqrt{\hat{L}(s)}\varphi\,. \tag{4.70}$$

[9] Далее мы вновь будем опускать индекс j.

Уравнение (4.70) мы называем в дальнейшем *псевдодифференциальным МПУ* (ПДМПУ). Оставшаяся часть данного раздела будет посвящена описанию методики решения этого уравнения, состоящей в аппроксимации соответствующего ему пропагатора методом Паде.

Общая схема расчета акустического поля с помощью ПДМПУ состоит из описанной ниже последовательности шагов.

1. Вычислить волновые числа во всех точках области $k_j(x, y)$ путем решения семейства акустических спектральных задач для всех (x, y) (на практике соответствующие вычисления могут быть значительно упрощены путем использования теории возмущений для акустических мод).

2. Выбрать подходящую для задачи систему криволинейных координат (s, ξ) таким образом, чтобы координатные линии $\xi = const$ приближали линии уровня функции $k_j(x, y)$ (если такой выбор сделать затруднительно, то можно воспользоваться декартовой системой координат (x, y), причем ось x следует ориентировать вдоль акустической трассы, т.е. от источника к приемнику).

3. Для каждого номера моды j решить уравнение (4.70) и вычислить функцию $v(s, \xi)$ по формуле $v(s, \xi) = (\hat{L}(s))^{-1/4}\varphi(s, \xi)$.

4. Вычислить $A_j(x, y)$ путем преобразования функции $A_j(s, \xi) = \gamma v(s, \xi)$ к декартовым координатам (x, y) (посредством интерполяции).

5. Выполнить суммирование в формуле (3.14) для расчета акустического давления $P(x, y, z)$.

4.6.2. Численное решение ПДМПУ: маршевая схема

Следуя методике из [219], мы вводим равномерную сетку $\{s_n\}$ с шагом h (т.е. такую, что $s_{n+1} = s_n + h$). Уравнение (4.70) может быть формально решено с помощью маршевой схемы [223]

$$\varphi_{n+1} = \exp\left(ik_0 h\sqrt{1+\hat{X}}\right)\varphi_n \equiv \hat{P}\varphi_n\,, \tag{4.71}$$

где k_0 есть отсчетное волновое число, а оператор $\hat{X}$, определяемый соотношением $\hat{L} = k_0^2(1+\hat{X})$, вычисляется в промежуточной точке $s_{n+1/2} = s_n + h/2$. Операторная экспонента $\hat{P}$ называется пропагатором, соответствующим эволюционному уравнению (4.70). Заметим, что в разделе 4.2 мы фактически вычисляли соответствующие пропагаторы для узкоугольного МПУ глобально, т.е. для сколь угодно больших шагов, используя методы из теории групп и алгебр Ли. Пропагатор для уравнения (4.70) может вычисляться только с помощью численных методов для малых шагов h.

4.6.3. Аппроксимация пропагатора $\hat{P}$ в уравнении (4.71)

При проведении расчетов модовых амплитуд мы будем использовать так называемый θ-аппроксимант для пропагатора $\hat{P}$, который был впервые предложен в работе [223].

$$\varphi_{n+1} = \hat{P}\varphi_n \approx \mathrm{e}^{ik_0 h}\left(d_0 + \sum_{k=1}^{p}\frac{d_k}{1+b_k\hat{X}}\right)\varphi_n = \mathrm{e}^{ik_0 h}\left(d_0\varphi_n + \sum_{k=1}^{p} d_k w_{n,k}\right)\,, \tag{4.72}$$

где вспомогательные функции $w_{n,k}$ могут быть получены из решения следующих операторных уравнений

$$(1+b_k\hat{X})w_{n,k} = \varphi_n\,. \tag{4.73}$$

Фактически θ-аппроксимант порядка n представляет собой комбинацию аппроксимаций Паде $[n/n]$ и $[n-1/n]$ для данной функции с весами θ и $1-\theta$ соответственно (разумеется, здесь $0<\theta<1$). Выбирая подходящим образом параметры n и θ мы можем моделировать как распространяющиеся, так и затухающие волны [223] (в горизонтальной плоскости x, y). Так как МПУ обычно используются для расчета звуковых полей в областях, не имеющих физических границы, то правильный учет затухающих мод (волн) в данном случае представляется важным.

4.6.4. Искусственное ограничение расчетной области

Как было отмечено в разделе 4.5 в практических задачах подводной акустики расчетные области обычно не имеют физических границ в горизонтальных направлениях. Таким образом, при расчете звуковых полей с помощью ПДМПУ у нас также естественным образом возникает задача искусственного ограничения расчетной области. В предыдущем разделе мы решили эту задачу, используя ГУП для ШМПУ [207, 224]. Для уравнений в типа (4.70) в криволинейных координатах, насколько нам известно, до сих пор не существует ГУП, совместимых с методом решения SSP, основанном на аппроксимации пропагатора. Проблему искусственного ограничения расчетной области для них можно успешно решить, используя совершенные поглощающие слои (в англоязычной литературе обычно употребляют сокращение PML – Perfectly Matched Layer) [224–226], которые с обеих сторон добавляются к расчетной области. Именно этот метод мы будем использовать в данном разделе.

Предположим, что решение уравнения (4.70) необходимо вычислить в области $(\xi, s) \in \Omega = [-d, d] \times [0, s_{max}]$, представляющей собой криволинейную полосу шириной $2d$ центрированную вдоль изобаты (4.63). Мы увеличим ширину полосы на ϵ с обеих сторон и рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (4.70) в расширенной области $\bar{\Omega} = [-d-\epsilon, d+\epsilon] \times [0, s_{max}]$, заменив оператор $\hat{L}$ его аналогом $\hat{L}_{PML}$ (согласно общей теории совершенных поглощающих слоев)

$$\hat{L}_{PML} = \frac{1}{1+i\sigma(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\gamma^2}{1+i\sigma(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi} + \left[\gamma^2 k^2 + \frac{1}{4}(\gamma_\xi)^2 + \frac{1}{2}\frac{\gamma_{ss}}{\gamma} - \frac{3}{4}\frac{(\gamma_s)^2}{\gamma^2}\right].$$

В данном соотношении функция $\sigma(\xi)$ является монотонно возрастающей по ξ на интервале $[d, d+\epsilon]$ и монотонно убывающей на $[-d-\epsilon, -d]$; во внутренней части области эта величина тождественно равна нулю ($\sigma(\xi) = 0$ при $\xi \in [-d, d]$).

Таким образом, введенный нами оператор $\hat{L}_{PML}$ совпадает с $\hat{L}$ на $[-d, d]$, а вне этого интервала производная $\frac{\partial}{\partial \xi}$ в операторе $\hat{L}$ заменяется на $\frac{1}{1+i\sigma(\xi)}\frac{\partial}{\partial \xi}$.

В нашей численной схеме реализовано решение начально-краевой задачи для уравнения (4.70) в области $\bar{\Omega}$ с однородными условиями Дирихле вида $\varphi|_{\xi=\pm d\pm\epsilon} = 0$ на внешних границах $\xi = \pm d \pm \epsilon$ поглощающих слоев. Внутри расчетной области Ω это решение с высокой точностью приближает решение уравнения (4.70), полученное для области $-\infty < \xi < \infty, s \geq 0$ (и ограниченное на Ω), если функция $\sigma(\xi)$ выбрана правильным образом. В данном разделе мы положим $\sigma(\xi) = \sigma_0(\xi - d)^3/\epsilon^3$ (в представленном ниже примере $\sigma_0 = 5$, $\epsilon = 300$ м).

Отметим еще, что замена оператора L в ПДМПУ оператором L_{PML} формально эквивалентна следующему комплексному преобразованию координаты ξ [226]:

$$\tilde{\xi} = \xi + i\int\limits_d^{\xi} \sigma(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{4.74}$$

Совершенный поглощающий слой и стартер Коллинза

В этом разделе мы опишем, каким образом можно использовать совершенные поглощающие слои совместно со стартером Коллинза для ШМПУ и ПДМПУ. Заметим, что приведенное ниже построение необходимо ввиду того, что, вообще говоря, начальное условие Коллинза не является локализованным (в отличие от начальных условий, соответствующих лучевому стартеру и стартеру Грина).

Стартер Коллинза может быть адаптирован к использованием с совершенными поглощающими слоями с помощью формулы преобразования координат (4.74). Действительно, нам следует лишь выполнить данное преобразование в формуле (4.58). Сделав это для $y > d$, получим

$$\Phi_0(y) = \frac{\phi(z_s)}{4}\,\mathrm{e}^{ik_0 y}\mathrm{e}^{-k_0\int_d^y \sigma(y)\,\mathrm{d}y}\,, \tag{4.75}$$

где последний сомножитель отвечает за затухание волн, составляющих $\Phi_0(y)$ внутри слоя (здесь мы положили $\xi \equiv y$, чтобы согласовать обозначения с использованными в разделе 4.5.4; разумеется, при задании начального условия для ШМПУ/ПДМПУ не имеет значения, какие именно ортогональные координаты используются затем для его решения).

Поскольку численное решение краевой задачи (4.57) в любом случае должно начинаться с определения решения $\Phi_0(y)$ на интервалах $[d-\epsilon, d]$ и $[d, d+\epsilon]$, несложно распространить корректировку, связанную с введением поглощающих слоев, и на этот случай. Так, например, для кубической зависимости параметра поглощения решение в слое (аналог (4.75)) принимает вид

$$\Phi_0(y) = \frac{\varphi(z_s)}{4} \mathrm{e}^{ik_0 y} \mathrm{e}^{-\frac{k_0\beta_0}{4\epsilon^3}(y-d)^4} \tag{4.76}$$

для $y > d$.

Заметим, что данный метод согласования стартера Коллинза с совершенными поглощающими слоями впервые описан в нашей работе [61].

4.6.5. Дискретизация оператора $\hat{X}$

Для решения операторных уравнений (4.73) нам необходимо выполнить дискретизацию оператора $\hat{X}$. Хотя для этого могут использоваться любые способы, для целей данного раздела будет вполне адекватным использовать стандартный конечно-разностный метод второго порядка на равномерной сетке $\{\xi_\ell\}$, где $\xi_{\ell+1} = \xi_\ell + \tau$. Таким образом, каждое операторное уравнение (4.73) сводится к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей.

4.6.6. Примеры расчета с использованием ПДМПУ

Мы завершаем данный раздел демонстрацией двух содержательных примеров использования ПДМПУ. В первом примере мы вновь обращаемся к задаче о расчете акустического поля в клиновидном волноводе. Поскольку этот волновод обнаруживает трансляционную симметрию, естественно выбрать для решения задачи декартовы координаты, как это было сделано в разделе 4.3.1. Сразу заметим, в отличие от клина с малым углом наклона, аналитическое решение для которого получено в разделе 4.3.1, акустическое поле в рассматриваемой здесь задаче формируется в том числе горизонтальными лучами, не попадающими в апертуру узкоугольного МПУ. По этой причине необходимо использовать именно ШМПУ или ПДМПУ для ее решения.

Во втором примере мы рассматриваем область с вращательной симметрией – уже известный нам волновод мелкого моря с чашеобразным дном, где в окрестности семейства круговых изобат формируются волны шепчущей галереи (см. раздел 3.4 предыдущей главы работы). Разумеется, в этой задаче как раз естественно выбрать такие криволинейные координаты, что одно из семейств коордиантных линий совпадает с изобатами. Заметим, что в отличие от компоненты решения трехмерного уравнения Гельмцольца, рассчитанной в разделе 3.4, здесь мы получим полное поле точечного источника, включающее также и расходящиеся волны (не захваченные шепчущей галереей).

Клиновидный волновод

Начнем демонстрацию возможностей ПДМПУ с задачи о клиновидном прибрежном волноводе, методика решения которой с помощью метода изображений была подробно рассмотрена в первой главе диссертации (см. раздел 1.4). Напомним, что распространение в этой задаче, вообще говоря, не является адиабатическим. Известно, что при распространении звука вверх по клину происходит последовательная отсечка всех водных мод. Тем не менее, представленные ниже результаты расчетов показывают, что по крайней мере в случае распространения под малыми углами к изобатам учет эффекта горизонтальной рефракции является существенно более важным для моделирования акустического поля, чем взаимодействие мод.

При решении задачи мы будем использовать систему координат, показанную на Рис. 4.1. Разумеется, в данном случае криволинейные координаты (s, ξ)

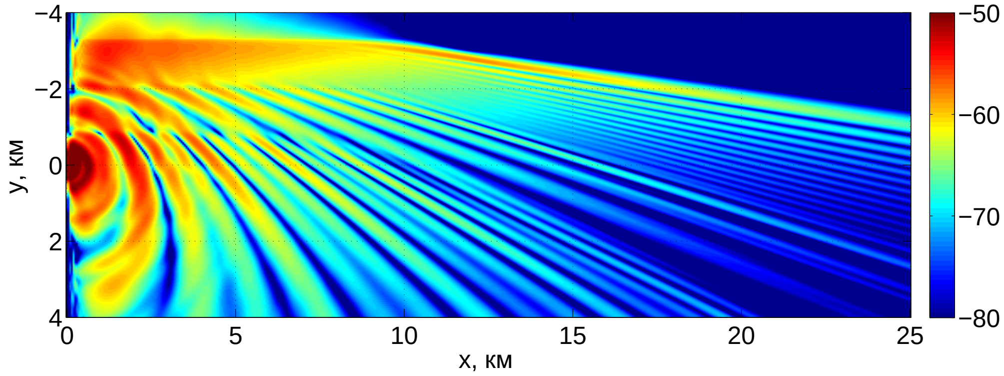


Рис. 4.17. Контурный график акустического поля (в дБ отн. 1 м), вычисленного с помощью ПДМПУ в плоскости $z = 30$ м.

становятся просто декартовыми координатами (x, y), причем $\gamma = \gamma(s, \xi) = 1$, а $\varkappa(s) = 0$. Случай, когда необходимо использовать криволинейные координаты, рассмотрен в следующем разделе. Скорость звука и плотность в водном слое имеют следующие значения: $c_1 = 1500$ м/с, а $\rho_1 = 1$ г/см^3, а соответствующие параметры дна равны $c_2 = 1700$ м/с, а $\rho_2 = 1,5$ г/см^3. Точечный тональный источник с частотой 25 Гц расположен в точке $x = 0$, $y = 0$, $z = 100$ м, где глубина моря составляет $h = 200$ м. Глубина $h = h(y)$ линейно зависит от y, причем $h(0) = h$, а угол наклона дна относительно горизонтали (двугранный угол между поверхностью и дном) составляет $2,86^\circ$.

Акустическое поле в плоскости $z = 30$ м, рассчитанное путем численного решения ПДМПУ с порядком аппроксимации Паде $p = 9$, который обеспечивает горизонтальную апертуру приблизительно от -80 до 80 градусов, представлено на Рис. 4.17. Его сравнение с эталонным решением, полученным с использованием метода изображений (см. первую главу настоящей диссертации) вдоль линии $y = 0$ в этой плоскости показано на Рис. 4.18. Именно такое сравнение обычно является ключевым этапом тестирования трехмерных моделей распространения звука в акустике океана. В данном случае видно, что решения, полученные с помощью разработанной нами методики, основанной на ПДМПУ, практически идеально совпадают с эталонным. Заметим, что в отличие от случая клиновидного волновода с наклоном дна $0,5^\circ$, рассмотренного в разделе 4.3.1, в данной

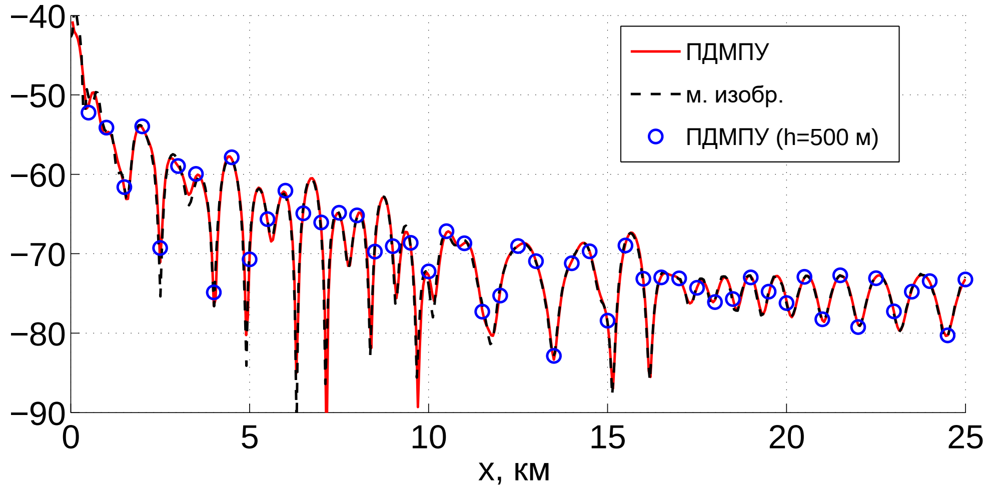
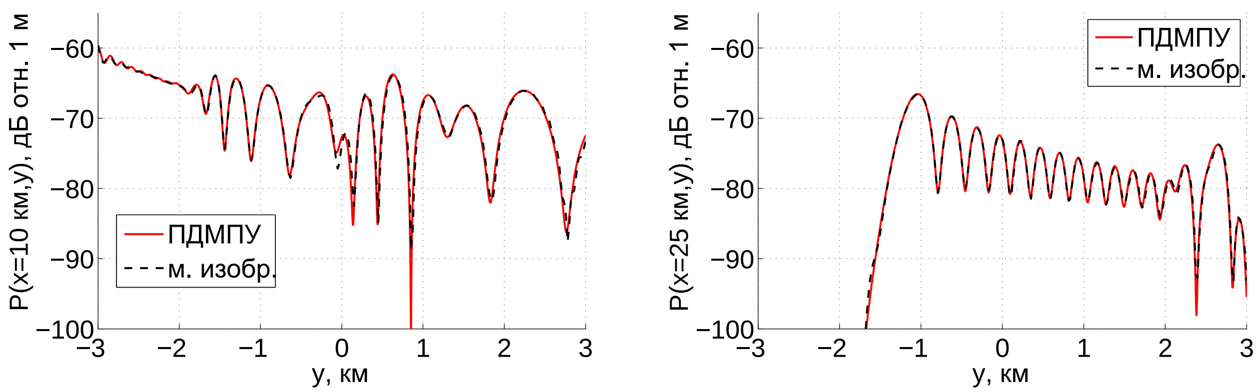


Рис. 4.18. Сравнение эталонного решения задачи о распространении звука в клине, вычисленного вдоль линии $y = 0$, $z = 30$ м с помощью метода изображений (пунктирная линия), с решениями, полученными с использованием ПДМПУ с шагами сетки 10 м (сплошная линия) и 500 м (круглые маркеры).

задаче решение не может быть получено с помощью узкоугольного МПУ, так как в акустическое поле на дальнем отрезке прямой $y = 0$, $z = 30$ м формируется в том числе горизонтальными лучами с углами выхода из источника, лежащими вне апертуры узкоугольного МПУ.



(*а*) $x = 10$ км (*б*) $x = 25$ км

Рис. 4.19. Зависимость акустического давления (в дБ отн. 1 м) от переменной y при $x = 10$ км (а) и $x = 25$ км (б) при $z = 30$ м, рассчитанная с использованием ПДМПУ (сплошная линия) и метода изображений (пунктир).

Важным преимуществом ПДМПУ является возможность использования больших шагов h в маршевой схеме. Как показано на Рис. 4.18, решение, вычисленное с шагом $h = 500$ м, все еще практически идеально совпадает с решением, полученным с помощью метода изображений (на самом деле даже шаг $h = 1000$ м обеспечивает хорошее совпадение поля, рассчитанного с помощью ПДМПУ, с эталонным). Возможность использования таких шагов является огромным преимуществом при выполнении моделирования дальнего распространения звука на практике. Например, при моделировании распространения навигационных сигналов, рассмотренных в шестой главе диссертации, можно пользоваться шагами 25–50 м.

Выполним теперь сравнение акустического поля, рассчитанного с помощью ПДМПУ, с эталонным решением вдоль линий, перпендикулярных изобате (см. Рис. 4.19), т.е. в сечениях волновода вертикальными плоскостями, параллельными оси y. Для такого сравнения мы рассчитали поле вдоль прямых $x = 10$ км и $x = 25$ км на глубине $z = 30$ м. Как видно из рисунка, в обоих случаях ПДМПУ обеспечивает высокую точность расчета поля в полосе -3 км $\leq y \leq 3$ км. Этот результат является в некотором смысле неожиданнымм, поскольку вариации глубины моря в клине таковы, что внутри данной полосы происходит отсечка двух водных мод из трех, возбуждаемых источником [73]. Как известно, при распространении звука через участки акватории, где достигается глубина отсечки, всегда наблюдается сильное сильное взаимодействие мод (см. обсуждение этого явления в работе [105]). Тем не менее, как видно из данного примера, в случае, когда распространение характеризуется малыми углами скольжения в горизонтальной плоскости относительно изобат, при расчете поля этим эффектом вполне можно пренебречь. В то же время, как видно из рисунков, представленных в этом разделе, эффект горизонтальной рефракции в данном случае вносит решающий вклад в интерференционную структуру акустического поля.

В этом случае моделирование распространения звука с использованием адиабатических ПДМПУ обеспечивает наилучший баланс между точностью воспроизведения этой структуры и скоростью выполнения расчетов. Напомним, что расчет поля в данной задаче с помощью трехмерных параболических уравнений (при условии обеспечения того же уровня точности) может быть выполнен на персональном компьютере лишь за несколько десятков часов [142], в то время как аналогичные вычисления с использованием ПДМПУ занимают считаные минуты.

Волновод шепчущей галереи

В завершение данной главы рассмотрим еще один пример расчета звукового поля с помощью ПДМПУ по схеме, изложенной в разделе 4.6.1. Мы еще раз обратимся к задаче расчета звукового поля в мелком море, где наблюдается формирование шепчущей галереи в окрестности круговой изобаты. Напомним, что в разделе 3.4.7 мы вычисляли лишь компоненту поля, составленную модами шепчущей галереи (ШГ), по формуле (3.82), причем волновые числа этих мод вычислялись по методу ВКБ [38]. Здесь мы воспользуемся ПДМПУ для расчета полного поля от точечного источника звука, расположенного в окрестности изобаты, над которой формируется ШГ. Такой источник будет возбуждать как волны ШГ, так и обычную расходящуюся во всех направлениях волну. Можно сказать, что часть горизонтальных лучей, расходящихся от источника, захватывается шепчущей галереей, а часть покидает неоднородный участок с неоднородным дном и далее расходится обычным образом.

Как было отмечено в предыдущей главе, данную задачу естественно решать, используя полярную систему координат (r, θ) в горизонтальной плоскости (центр системы координат, разумеется, совпадает с центром кривизны семейства изобат). Поскольку расчет поля в волноводе с радиальным батиметрическим профилем (3.56) рассматривался в разделе 3.4.7, здесь мы выполним расчет для радиального профиля (3.57) с участком, на котором глубина зависит от r линейно. При расчетах ниже будут использоваться те же самые акустические параметры волновода и источника звука, что зафиксированы в разделе 3.4.3. Нулевую координатную линию для поперечной переменной ξ в данном случае

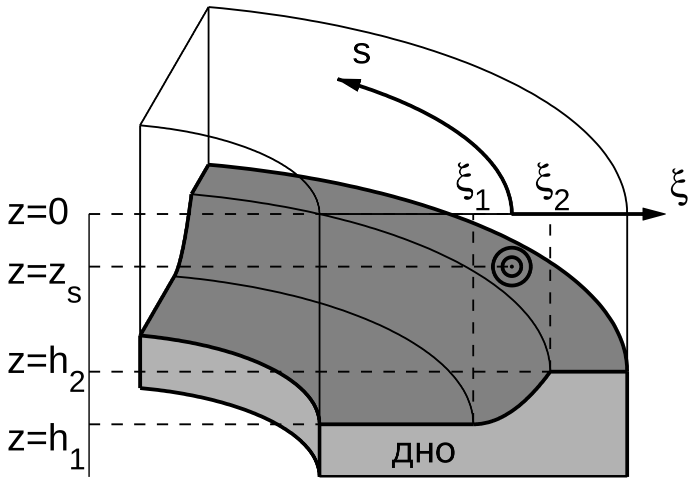


Рис. 4.20. Область мелкого моря с криволинейными изобатами. Координата s представляет собой дистанцию от источника вдоль некоторой (опорной) криволинейной изобаты; координатные линии $s = const$ в каждой точке направлены вдоль градиента глубины; величина ξ измеряет расстояние вдоль этих линий до опорной изобаты. Глубина моря считается постоянной при $\xi > \xi_2$ и при $\xi < \xi_1$

удобно совместить с изобатой $r = r_s$, положив

$$\xi = r - r_s \,, \quad s = r_s\theta \,, \tag{4.77}$$

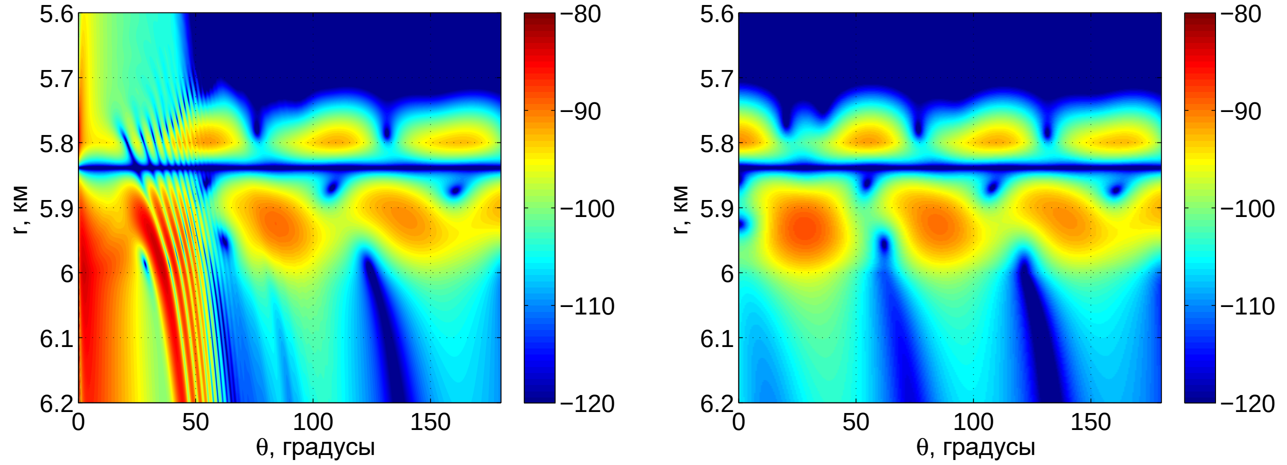
где $r = r_s = 5800$ м, $\theta = 0$ – координаты источника звука (см. Рис. 4.20).

Напомним, что в рассматриваемом волноводе мелкого моря имеется три вертикальные водные моды для всех значений r и θ. Как показано в предыдущей главе, волновод шепчущей галереи, однако, формируется в этом примере только для водной моды наибольшего номера, т.е. для $j = 3$. В свою очередь, для компоненты поля $P_3(r, \theta, z) = A_3(r, \theta)\phi_3(z, r, \theta)$, соответствующей данной вертикальной моде, в этом случае обнаруживается модовая структура в горизонтальной плоскости ввиду формирования ШГ. Энергия, переносимая модами ШГ, локализуется в окрестности изобаты $r = r_s$ и распространяется вдоль нее без характерной для модовых амплитуд цилиндрической расходимости. Таким образом, следует ожидать, что на больших расстояниях от источника в окрестности данной изобаты основную роль в формировании структуры звукового поля будут играть именно моды ШГ, в то время как вклад “обычных” волн, испытывающих цилиндрическую расходимость, будет исчезающе мал.

Метод расчета ШГ-компоненты звукового поля $P_3(r, \theta, z)$, основанный на расчете азимутальных волновых чисел по методу ВКБ, подробно описан в предыдущей главе диссертации. Результат такого расчета для рассматриваемого здесь случая представлен на Рис. 4.21(б). Уровни звукового поля на рисунке представлены в дБ относительно 1 м от источника для глубины $z = z_s = 10$ м (в декартовых координатах r, θ[10]). Мы также вычислили функцию $P_3(r, \theta, z = z_s)$ посредством численного решения ПДМПУ в криволинейных координатах (s, θ). Результаты вычислений показаны на Рис. 4.21(а). Хотя качественное сходство интерференционной структуры звукового поля на подграфиках (а) и (б) Рис. 4.21 при больших s несомненно, для более детального количественного сравнения построим графики зависимости уровней звуковых полей, рассчитанных двумя методами, от s (θ) вдоль линии $r = r_s$ (см. Рис. 4.22). Хорошо видно, что на большом удалении от источника полное звуковое поле фактически совпадает с его ШГ-компонентой.

Для лучшей иллюстрации этого результата мы также преобразовали рассчитанное с помощью ПДМПУ поле к декартовым координатам (см. Рис. 4.23). На рисунке хорошо видно, что некоторая часть акустической энергии поля канализируется в окрестности изобаты $r = r_s$ ввиду влияния горизонтальной рефракции звука на наклонном дне. Для некоторых горизонтальных лучей, соответствующих третьей вертикальной моде этот эффект приводит лишь к искривлению их траекторий, и они все же покидают границы наклонного участка дна (такие лучи мы называем расходящимися). Тем не менее, имеется также и значительная часть горизонтальных лучей, которые захватывается волноводом ШГ. Когда все расходящиеся лучи покидают окрестность изобаты, поле вблизи от нее оказывается состоящим исключительно из мод ШГ (как видно из

[10] Другими словами, на этом рисунке мы выполнили распрямление координатных линий полярных координат, чтобы была лучше видна модовая структура поля.



(*а*) ПДМПУ (*б*) ВКБ, формула (3.82)

Рис. 4.21. Контурный график компоненты звукового поля третьей вертикальной моды P_3 (в дБ отн. 1 м), сформированного точечным источником звука в плоскости $z = z_s$ для радиального батиметрического профиля (3.57) и рассчитанного с помощью ПДМПУ (а) и с использованием метода ВКБ и формулы (3.82) (б). Видно, что решения обнаруживают замечательное сходство при больших s.

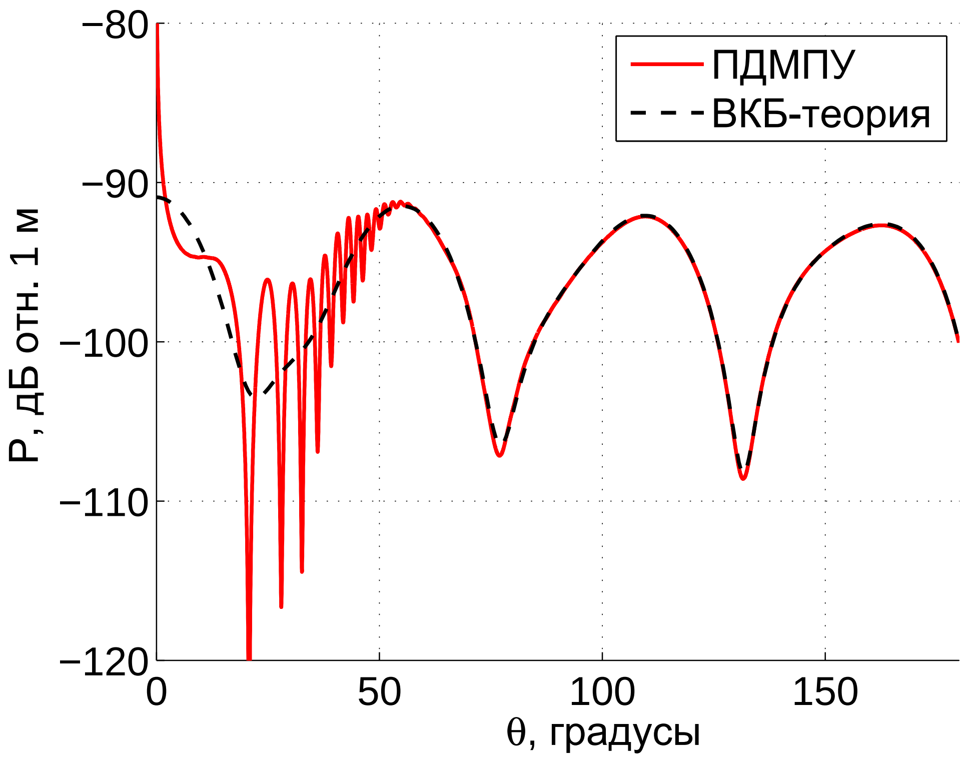


Рис. 4.22. Сравнение решений, представленных на Рис. 4.21 вдоль линии $r = r_s$ (т.е. при $\xi = 0$).

Рис. 4.22).

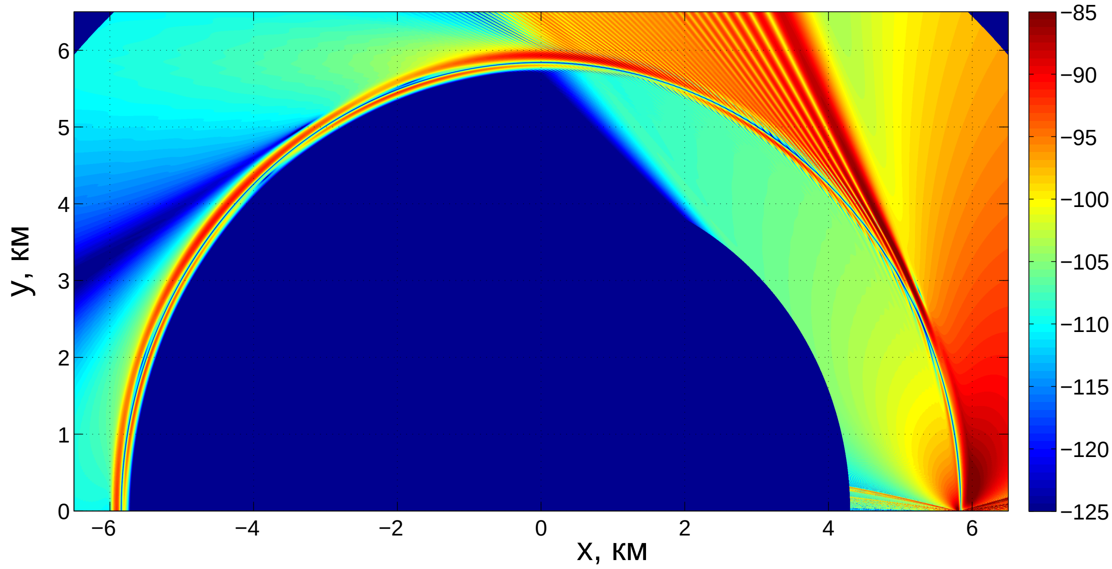


Рис. 4.23. Акустическое поле P_3 (в дБ отн. 1 м) в мелком море с круговыми изобатами и радиальным батиметрическим профилем (3.57) как функция горизонтальных координат x, y при $z = z_s = 10$ м.

Отметим, что в данном примере мы положили $\varkappa = \varkappa(s) = 1/r_s$. Сравнение двух решений, представленное на Рис. 4.22, показывает, что ПДМПУ позволяет адекватно учитывать криволинейную геометрию изобат в данной задаче. Кроме того, данное решение еще раз подтверждает правильность расчета ШГ-компоненты поля, выполненного в предыдущей главе с помощью построенной в предыдущей главе ВКБ-теории мод шепчущей галереи. Заметим, что хотя в обоих случаях расчеты выполнялись в адиабатическом приближении, предыдущий пример показывает, что при распросстранении под малыми углами относительно семейства изобат (а именно распространение такого типа имеет место в волноводе ШГ) ПДМПУ обеспечивает высокую точность расчетов даже в случае, когда имеет место отсечка мод.

4.7. Выводы к четвертой главе

В этой главе для описания распространения звука в мелком море с трехмерными неоднородностями дна было использовано модовое параболическое уравнение, которое является приближением для уравнения горизонтальной рефракции. Преимущество этого метода, в частности, в том, что он позволяет раскрыть некоторые физические механизмы формирования интерференционной структуры акустического поля в горизонтальной плоскости во многих важных случаях, когда решения МПУ могут быть получены в явной аналитической форме. Интересным примером такого рода является задача о распространении звука над подводным хребтом, в которой решение МПУ позволяет получить уравнения волновых фронтов для различных вертикальных мод и, таким образом, объяснить особенности интерференционной картины полученного решения.

Явные решения узкоугольного МПУ в этой главе получены с помощью методов теории групп и алгебр Ли, которые применяются для распутывания и вычисления операторных экспонент, в терминах которых могут быть записаны решения параболических уравнений. В задачах подводной акустики эти методы были впервые использованы в наших работах [47, 51, 55, 63] (хотя ранее они использовались для решения уравнений Шредингера, математически идентичных МПУ). Данные работы существенно расширили класс трехмерных задач акустики океана, для которых известны аналитические решения, т.к. до их появления аналитическое решение, основанное на методе изображений, было известно только для клиновидного прибрежного волновода. Несмотря на то, что это решение получено при минимальном наборе упрощающих предположений, его форма почти не проясняет того, как именно трехмерные неоднородности дна участвуют в формировании структуры звукового поля, и в этом смысле формулы (4.20), (4.24) значительно более информативны. Работая с этими формулами и варьируя входящие в них параметры, можно оценить степень влияния каждого из них на интерференционную картину и уровни звукового поля в различных точках.

В практических задачах акустики океана, где необходимо учитывать реальную форму дна и гидрологию на моделируемой акватории, МПУ можно легко решить с помощью численных методов. В этом случае, однако, имеет смысл пользоваться широкоугольными МПУ (или ПДМПУ), которые обспечивают существенно более высокую точность расчетов при тех же вычислительных затратах на их решение, что и для узкоугольного МПУ. МПУ можно рассматривать как результат редукции порядка (размерности) модели распространения звука в мелком море, основанной на трехмерном параболическом уравнении [227] (в той же мере, в какой уравнения горизонтальной рефракции суть результат редукции порядка для трехмерного уравнения Гельмгольца). Практика показывает, что расчеты звукового поля с использованием МПУ обеспечивают тот уже уровень точности, что и трехмерные ПУ, при гораздо более высокой эффективности (скорости выполнения вычислений). Такого рода сопоставление описано в работах [47, 106].

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [47, 51, 60, 61].

На результатах данной главы основаны следующие выносимые на защиту положения

- В адиабатическом приближении построены новые аналитические решения для класса задач расчета звуковых полей в мелком море с трехмерными неоднородностями батиметрии, описываемыми квадратичными параметрическими функциями. На примере волновода мелкого моря с подводным хребтом показано, что построенные решения позволяют выполнять качественный анализ интерференционной структуры поля точечного источника в горизонтальной плоскости.

- Разработана и апробирована путем решения тестовых задач новая методика моделирования акустических полей в трехмерных нерегулярных волноводах мелкого моря, основанная на численном решении псевдодифференциальных модовых параболических уравнений в области с искусственными границами в адиабатическом приближении. Данная методика позволяет выполнять расчет акустических полей с существенно более высокой скоростью, чем при использовании трехмерных параболических уравнений.

Глава 5

Итеративные параболические уравнения для модовых амплитуд

Стандартные широкоугольные параболические уравнения (ШПУ), получаемые с помощью формальной факторизации оператора Гельмгольца и различных аппроксимаций операторного квадратного корня (как это описано в разделе 4.5 предыдущей главы), в настоящее время являются одним из основных вычислительных инструментов для решения задач распространения волн в неоднородных средах различной физической природы. Они применяются в радиофизике [228], акустике океана [73], сейсмологии и геофизике [202]. Наиболее часто при их выводе используются аппроксимации квадратного корня с помощью полиномов или дробно-рациональных функций – аппроксимации Паде (поэтому здесь и далее соответствующие широкоугольные ПУ мы будем для краткости называть ШПУ Паде). По-видимому, впервые аппроксимации операторного квадратного корня с помощью полиномов Тейлора (второго и высших порядков) при выводе ШПУ были использованы Поповым и Хозиоским [229], а приближения рациональными функциями Паде были предложены Клаэрбоутом в книге [202].

В наших работах был развит альтернативный подход к получению широкоугольных параболических аппроксимаций для решения уравнения Гельмгольца [43, 48, 49]. Использованный в этих работах прием для вывода ШПУ основан на применении метода многих масштабов и фактически является естественным продолжением и развитием собственно предложенного Леонтовичем и Фоком [186] подхода, основанного на введении параболического шкалирования пространственных переменных (см. ниже). С помощью метода многих масштабов можно получить систему *итеративных параболических уравнений* (ИПУ), в которой вынуждающий член n-ого уравнения получается из решения $n-1$-го уравнения (и, таким образом, уравнения должны решаться последовательно – одно за другим). Частичная сумма ряда, составленного из решений ИПУ, приближает решение исходного уравнения Гельмгольца [43]. Такую частичную сумму из n членов ряда мы называем широкоугольной параболической аппроксимацией n-ого порядка. В акустике океана идея использования параболических аппроксимаций такого рода принадлежит Трофимову, хотя ранее системы аналогичных ИПУ изучались Малюжинцем [230], а также Грикуровым и Киселевым [231].

Важным преимуществом метода ИПУ является то, что одновременно с самими уравнениями с помощью тех же самых многомасштабных разложений выводятся также граничные и интерфейсные условия для них [43] (даже в случаях, когда соответствующие границы имеют сложную форму). По контрасту, в теории классических ШПУ Паде вопрос об условиях, которые необходимо использовать на наклонных границах области или границах разделов двух сред, остается открытым. Ряд частных примеров показывает, что для ПУ в этих случаях нельзя использовать те же самые условия, что и для уравнения Гельмгольца, из которого они выведены [232, 233]. По этой причине при решении двумерных задач акустики океана в координатах r, z с помощью ШПУ обычно используется ступенчатая аппроксимация батиметрического профиля на акустической трассе [73, 234–236] (с тем, чтобы ставить граничные и интерфейсные условия только на горизонтальных границах).

Отметим, что сам по себе метод ИПУ обладает тем же уровнем универсальности, что и стандартные ШПУ Паде. Его можно использовать как для построения приближенного решения двумерного или трехмерного уравнения Гельмгольца (1.18) для акустического давления [43, 66], так и для аппроксимации модовых амплитуд [48], удовлетворяющих уравнению горизонтальной рефракции (3.19), т.е. вместо широкоугольных МПУ, описанных в разделе 4.5 предыдущей главы (такие уравнения мы будем называть модовыми ИПУ, или МИПУ). Более того, в отличие от ШПУ Паде итеративные параболические аппроксимации могут быть также использованы и в случае нелинейного уравнения Гельмгольца [49].

Как было отмечено в предыдущей главе, при использовании ПУ для расчета модовых амплитуд обычно приходится иметь дело с задачами Коши в областях, не имеющих физических границ. Разумеется, численное решение таких задач может быть осуществлено только после введения искусственных границ расчетной области таким образом, чтобы поставленное на них граничное условие не нарушало структуру решения во внутренней ее части. С этой целью нами были разработаны граничные условия прозрачности (ГУП) для ИПУ [48].

Отметим, что первое уравнение в иерархии ИПУ фактически является стандартным узкоугольным параболическим уравнением Леонтовича-Фока. Математически оно эквивалентно нестационарному уравнению Шредингера из квантовой механики (разумеется, в нелинейном случае получается нелинейное уравнение Шредингера). Для уравнений такого типа в последение три десятиления было разработано несколько классов ГУП. Первые их варианты были независимо предложены Баскаковым и Поповым [204] (для задач оптики) и Пападакисом [237] (для двумерных задач подводной акустики). В дальнейшем были разработаны их дискретные и полудискретные аналоги (т.е. согласованные с той или иной численной схемой), которые подробно рассмотрены в обзорной статье [207]. Многие из этих ГУП были также обобщены на случай ШПУ Паде (а также ШПУ, основанных на приближении квадратного корня рядом Тейлора [208]). Условие такого типа [213] для ШПУ с дробно-линейной аппроксимацией операторного квадратного корня были, в частности, использовано при решении ШМПУ в предыдущей главе. Отметим, что для ШПУ Паде произвольных порядков ГУП были получены в относительно недавних работах [209–211].

В этой главе мы рассмотрим вывод ИПУ и связанных с ними граничных и интерфейсных условий, следуя работам [43, 66], а также граничных условий прозрачности. Мы также опишем метод численного решения ИПУ, являющийся обобщением метода Крэнка-Николсон, и дискретизацию полученных нами

ГУП. Отметим, что в работе [48] нами также исследованы вопросы корректности начально-краевых задач (в т.ч. с ГУП) для системы ИПУ и вопросы устойчивости предложенных нами численных схем для их решения. Здесь мы коротко обсудим эти результаты, в некоторых случаях ограничившись лишь их формулировкой (поскольку наша диссертация посвящена в большей степени физическим вопросам и вычислительным методам, чем их математическому обоснованию). В заключительной части данной главы мы также покажем, как метод ИПУ может быть использован в случае нелинейного уравнения Гельмгольца.

5.1. Вывод итеративных параболических уравнений, а также связанных с ними граничных и интерфейсных условий

В этом разделе мы, следуя работам [43, 66], получим систему итеративных параболических уравнений, соответствующую двумерному уравнению Гельмгольца. Заметим, что в трехмерном случае процедура вывода не обнаруживает принципиальных отличий [66] от описанной ниже. При выводе мы будем работать в декартовых координатах (x, z), имея в виду в том числе двумерные задачи распространения звука в волноводе, который возникает в сечении океана вертикальной плоскостью и характеризуется наличием границ и интерфейсов. Для таких задач мы получим условия для итеративных параболических уравнений, которые должны выполняться на границах и интерфейсах, согласованные с соответствующими условиями для исходного уравнения Гельмгольца. При выводе этих условий будут использованы те же разложения и допущения, что и при получении самой системы ИПУ. В случае, когда ИПУ используются для аппроксимации решения уравнения горизонтальной рефракции (3.19), разумеется, такие условия не требуются (таким образом, приведенный ниже вывод охватывает и этот случай).

Рассмотрим задачу распространения звука в двумерном геоакустическом волноводе $\Omega = \{(x,z)|z \geq 0\}$, состоящем из водного слоя и одного или нескольких слоев дна (в рамках этой главы мы будем считать его жидким) переменной толщины (в целом мы будем придерживаться обозначений, введенных в работе [43]). Акустическое давление $P(x,z)$, производимое точечным источником гармонических сигналов частоты f, расположенным в точке $x = 0$, $z = z_s$ в таком волноводе будет удовлетворять двумерному уравнению Гельмгольца вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\kappa^2 p = \frac{1}{\rho}\delta(x)\delta(z-z_s)\,, \tag{5.1}$$

где функции $\rho = \rho(x,z)$ и $\kappa = \kappa(x,z) = \omega^2/c^2$ суть плотность и волновое число среды. Будем предполагать, что на поверхности моря $z = 0$ выполняется условие мягкой границы

$$P(x,0) = 0\,. \tag{5.2}$$

По причинам, которые будут объяснены ниже, в рамках данной главы мы будем предполагать, что область Ω не имеет нижней границы. Иными словами, мы будем рассматривать задачу для уравнения Гельмгольца в полупространстве $z \geq 0$), причем будем полагать, что начиная с некоторого достаточного большого значения глубины $z = L$ это полупространство является однородной средой, так что $\rho(x,z) = \rho_b$ и $\kappa(x,z) = \kappa_b$ для всех $z \geq L$. В этом случае для обеспечения корректности краевой задачи для уравнения (5.1) в области Ω мы должны потребовать выполнение условий излучения при $R = \sqrt{x^2+z^2} \to \infty$ (см., например, [73]).

На границах раздела сред, т.е. поверхностях вида $z = h(x)$, на которых параметры среды могут иметь разрыв первого рода (например, на интерфейсе вода-дно) мы, как и во всех предыдущих главах, ставим условия непрерывности давления и нормальной компоненты колебательной скорости (1.11), (1.12).

Пусть ϵ есть малый параметр, представляющий собой отношение длины волны звука к типичному размеру неоднородностей среды. Следуя Леонтовичу и Фоку [186], введем медленные переменные $X = \epsilon x$, $Z = \epsilon^{1/2} z$, используя так называемое параболическое шкалирование. Мы будем использовать метод многомасштабных разложений [238], и потому введем дополнительно быструю переменную $\eta = (1/\epsilon)\theta(X, Z)$ (которая будет соответствовать фазе решения). Постулируем следующие разложения параметров задачи и ее решения

$$
\begin{aligned}
\rho &= \rho(X, Z)\,, \\
\kappa^2 &= \kappa_0^2(X) + \epsilon\nu(X, Z)\,, \\
P &= P_0(X, Z, \eta) + \epsilon P_1(X, Z, \eta) + \ldots\,.
\end{aligned}
$$

Как правило, мы будем полагать, что величина κ_0 является вещественной и, следовательно, относить мнимую добавку к волновому числу в среде, описывающую затухание акустических волн, к члену $\nu(X, Z)$.

Следуя общему алгоритму применения метода многих масштабов [238], заменим теперь производные в уравнении (5.1) согласно правилу

$$
\frac{\partial}{\partial x} \to \epsilon\left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{\epsilon}\theta_X\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial z} \to \epsilon^{1/2}\left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{\epsilon}\theta_Z\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\,.
$$

Используя постулированные выше разложения, перепишем уравнение Гельмгольца (5.1) в новых (растянутых) переменных

$$
\begin{aligned}
&\epsilon^2\left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{\epsilon}\theta_X\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{\epsilon}\theta_X\frac{\partial}{\partial \eta}\right)(P_0 + \epsilon P_1 + \ldots)\right) \\
&+ \epsilon\left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{\epsilon}\theta_Z\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{\epsilon}\theta_Z\frac{\partial}{\partial \eta}\right)(P_0 + \epsilon P_1 + \ldots)\right) \\
&+ \frac{1}{\rho}(\kappa_0^2(X) + \epsilon\nu(X, Z))(P_0 + \epsilon P_1 + \ldots) = 0\,.
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

Будем теперь собирать вместе члены с одинаковыми степенями параметра ϵ. В порядке $O(\epsilon^{-1})$ мы получим равенство $(\theta_Z)^2 P_{0\eta\eta} = 0$, из которого следует, что θ не зависит от Z, поскольку любое решение уравнения $P_{0\eta\eta} = 0$ нарушает равномерность асимптотического разложения.

Уравнение при $O(\epsilon^0)$ имеет вид

$$
(\theta_X)^2 P_{0\eta\eta} + \kappa_0^2 P_0 = 0\,.
$$

Чтобы удовлетворить его, положим $P_0 = A_0(X,Z)\exp(i\eta)$. Отсюда следует, что

$$(\theta_X)^2 = \kappa_0^2 \,.$$

Это равенство представляет собой уравнение Гамильтона-Якоби для нашей задачи. Зафиксировав одну из ветвей его решения, мы тем самым ограничимся волнами, которые распространяются только в положительном или только отрицательном направлении оси X. Заметим, что в методе итеративных параболических уравнений выбор знака в равенстве $\theta_X = \pm\kappa_0$ соответствует выбору одного из сомножителей в формальной факторизации (4.39) оператора Гельмгольца в (3.19). Именно в этот момент мы ограничиваемся однонаправленным распространением волн вдоль оси x. В рамках данной главы мы выберем ветвь $\theta_X = \kappa_0$ (и, таким образом, будем рассматривать только волны, распространяющиеся вправо).

Теперь положим $P_j = A_j(X,Z)\exp(i\eta)$ для всех $j = 0,1,\ldots$. Тогда в каждом из следующих порядков $O(\epsilon^{j+1})$, $j \geq 0$ мы получим амплитудное уравнение вида

$$2i\frac{1}{\rho}\kappa_0 A_{j,X} + \left(\frac{1}{\rho}A_{j,Z}\right)_Z + \left[i\left(\frac{1}{\rho}\kappa_0\right)_X + \frac{1}{\rho}\nu\right]A_j + \left(\frac{1}{\rho}A_{j-1,X}\right)_X = 0\,, \qquad (5.4)$$

Для того, чтобы случай $j = 0$ также описывался формулой (5.4), положим функцию A_{-1} тождественно равной нулю.

Заметим, что все величины в уравнениях (5.4) являются функциями от растянутых переменных (эти переменные X, Z, η и функции $\nu(X,Z), A_j(X,Z)$ от них мы будем собирательно называть *асимптотическими величинами*). Для решения реальных задач необходимо переходить от асимптотических величин к *физическим* (т.е. к независимым переменным x, z и соответствующим функциям). Этот переход может быть выполнен с помощью соотношений

$$\bar{\nu}(x,z) = \epsilon\nu(X,Z)\,,$$
$$\bar{A}_j(x,z) = \epsilon^j A_j(X,Z)\,,$$
$$\bar{\theta}(x) = \int\limits_0^X \frac{1}{\epsilon}\theta_X\,dX = \int\limits_0^x \kappa_0\,dx\,.$$

Легко показать, что уравнение (5.4) в физических переменных имеет вид

$$2i\frac{1}{\rho}\kappa_0\bar{A}_{j,x} + \left(\frac{1}{\rho}\bar{A}_{j,z}\right)_z + \left[i\left(\frac{1}{\rho}\kappa_0\right)_x + \frac{1}{\rho}\bar{\nu}\right]\bar{A}_j + \left(\frac{1}{\rho}\bar{A}_{j-1,x}\right)_x = 0\,, \tag{5.5}$$

В дальнейшем при записи уравнений (5.5) в физических переменных мы будем опускать черту над входящими в них функциями, так как по частным производным ясно, какие именно переменные (физические или асимптотические) фигурируют в данном уравнении, и путаницы здесь не возникает.

Уравнения (5.5) имеют параболический тип. Поскольку вынуждающий член в каждом из них (как в системе (5.4), так и в (5.4)) вычисляется путем дифференцирования решения предыдущего уравнения, мы будем называть их *итеративными параболическими уравнениями* (ИПУ). Действительно, каждое следующее уравнение вносит поправку к решению предыдущего.

Комплексное поле акустического давления $P(x,z)$, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (5.1) может быть приближенно рассчитано по формуле

$$P(x,z) \approx \sum_{j=0}^{n} P_j(x,z) = \exp\left(i\int\limits_0^x \kappa_0(x)\,dx\right)\sum_{j=0}^{j=n} A_j(x,z)\,. \tag{5.6}$$

Такую частичную сумму ряда, составленного из решений $n+1$ первых уравнений системы (5.5) (уравнений для $j = 0,\ldots n$) мы будем называть *широкоугольной параболической аппроксимацией порядка n.*

Интересно отметить, что система ИПУ, подобных (5.5), ранее использовалась в работе Грикурова и Киселева [231] при моделировании распространения гауссовых пучков. Подобный подход также предлагался в ранних (по-видимому, неопубликованных) работах Малюжинца.[1]

Отметим также, что решения уравнений (5.5) мы будем искать в пространстве $C([0, x_{max}], L^2([0, \infty)))$ (выбор пространства будет несколько уточнен в дальнейших разделах).

Среди основных проблем, связанных с практическим использованием широкоугольных ПУ, получаемых с помощью формальной факторизации оператора Гельмгольца (4.39) наибольшие технические трудности создает отсутствие согласованных с ними интерфейсных условий [73]. Эта проблема, вообще говоря, имеет принципиальный характер, так как сама процедура такой факторизации может быть выполнена только в предположении о том, что оператор под квадратным корнем в (4.39) коммутирует с производной по продольной переменной (т.е. с $\partial/\partial x$). Отсутствие интерфейсных условий приводит к необходимости приближать наклонные границы раздела ступенчатыми функциями и, как следствие, к нарушению закона сохранения потока энергии для “стандартных” широкоугольных ПУ. Последнюю проблему на практике решают искусственной корректировкой потока энергии при скачке глубины [73].

В следующем подразделе мы покажем, что в рамках теории ИПУ (5.5) проблема вывода интерфейсных и граничных условий может быть элегантным образом решена с помощью тех же асимптотических разложений, который используются при выводе самих ИПУ. Получаемые таким образом условия оказываются согласованными с уравнениями, что позволило нам доказать ряд результатов о сходимости ряда (5.6) к решению уравнения Гельмгольца, а также об асимптотическом сохранении потока энергии [43].

5.1.1. Вывод граничных условий для ИПУ, а также условий на границах раздела

Выведем теперь условия на границах раздела $z = h(x)$ сред (интерфейсах) для итеративных параболических уравнений. Напомним, что условия на

[1] Сообщено автору А.В. Поповым (ИЗМИРАН).

границе раздела для уравнения Гельмгольца (5.1) имеют вид

$$P|_{z=h(x)+0} = P|_{z=h(x)-0}\,, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{z=h(x)+0} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{z=h(x)-0}\,, \tag{5.7}$$

где $\partial/\partial\mathbf{n}$ есть производная вдоль вектора нормали к интерфейсу $\mathbf{n}$. Будем считать, что глубина моря медленно меняется вдоль акустической трассы. Это условие можно выразить соотношением $h = h(\epsilon x) = h(X)$. Учитывая этот факт, подставим теперь разложение

$$P = \exp(\bar\theta)\sum_{j=0}^{j=l-1}\bar A_j = \exp\left(\frac{1}{\epsilon}\theta\right)\sum_{j=0}^{j=l-1}\epsilon^j P_j$$

в выражение для производной по нормали

$$\frac{\partial P}{\partial n} = P_z + h_x P_x =$$
$$\exp\left(\frac{1}{\epsilon}\theta\right)\left[\sum_{j=0}^{j=n-1}\epsilon^j A_{j,z} + \epsilon h_X i\theta_X\sum_{j=0}^{j=n-1}\epsilon^j A_j + \epsilon h_X\epsilon\sum_{j=0}^{j=n-1}\epsilon^j A_{j,X}\right].$$

Используя это выражение, перепишем теперь условия (5.7), после чего сгруппируем в них члены с разными степенями ϵ. Таким образом, мы получим следующие условия на границе раздела для итеративных параболических уравнений системы (5.5) (сразу запишем результат в физических переменных)

$$\begin{aligned} &\bar A_j|_{z=h(x)+0} = \bar A_j|_{z=h(x)-0}\,,\\ &\left[\frac{1}{\rho}\left(\bar A_{j,z} + i\kappa_0 h_x\bar A_j + h_x\bar A_{j-1,x}\right)\right]\bigg|_{z=h(x)+0}\\ &= \left[\frac{1}{\rho}\left(\bar A_{j,z} + i\kappa_0 h_x\bar A_j + h_x\bar A_{j-1,x}\right)\right]\bigg|_{z=h(x)-0}\,, \quad 0\le j\le n-1\,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Предположим теперь, что нижняя граница расчетной области находится на глубине H, где ставится условие акустически жесткой границы. Пусть глубина, на которой находится эта граница, медленно меняется по x, т.е. $z = H(\epsilon x)$. Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно получить условие на этой границе для ИПУ (5.5). Оно имеет вид

$$\bar A_{j,z} + i\kappa_0 H_x\bar A_j + H_x\bar A_{j-1,x} = 0\,, \quad 0\le j\le n-1 \quad \text{при} \quad z = H(x)\,. \tag{5.9}$$

Полученные нами граничные условия (5.9) и условия на границе раздела (5.8) по существу являются обобщением граничного условия Абрахамсона-Крайса [232]. Все эти условия получены с помощью того же асимптотического разложения акустического давления, что и сама система уравнений (5.8), и потому полностью согласованы с ней. Отметим, что аналогичных согласованных с традиционными широкоугольными параболическими уравнениями [73] (т.е. уравнениями, получаемыми с помощью метода формальной факторизации, подобного использованному в последнем разделе предыдущей главы) граничных и интерфейсных условий до сих пор не выведено, несмотря на многочисленные исследования этого вопроса, которые ведутся уже несколько десятилетий (см., например, работу [233]).

5.1.2. О начальных условиях для ИПУ

Как и в случае с МПУ, рассмотренными в предыдущей главе диссертации, начальные условия для ИПУ необходимо выбирать таким образом, чтобы вычисленное с их помощью поле (5.6) приближало решение уравнения Гельмгольца с точечным источником звука. В “вертикальное” уравнение Гельмгольца (5.1) такой источник может быть введен с помощью вынуждающего члена (правой части), имеющего вид дельта-функции $\delta(x, z - z_s)$. Разумеется, ИПУ могут быть использованы и для аппроксимации решения уравнения горизонтальной рефракции (3.19), где в правой части также стоит дельта-функция.

Мы будем использовать следующие начальные условия $A_j(0, z)$ в задаче Коши для уравнений системы (5.5):

$$
\begin{aligned}
&A_0(0,z) = S(z)\,, \\
&A_j(0,z) = 0, \quad j = 1, 2, \dots\,,
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

где в качестве функции $S(z)$ можно использовать один из известных аналитических стартеров для стандартных параболических уравнений [73]. Наш опыт показывает, что для расчетов двумерного звукового поля в плоскости x, z (или

r, z) хорошо подходят начальные условия Томпсона [73, 239] и Грина [203]. Для модовых ИПУ, которые решаются в неограниченной в "поперечном" направлении области (т.е. в полуплоскости $x \geq 0, -\infty < y < \infty$) подходят начальное условие Гаусса (см. примеры ниже) и Грина.

5.2. Некоторые свойства ИПУ

5.2.1. Асимптотическое сохранение потока энергии

Формулировка теоремы о сохранении потока энергии в этом разделе вновь потребует от нас использования выражений для решений ИПУ в асимптотических переменных, поэтому чтобы отличать их от выражений в физических переменных мы вновь будем ставить над последними черту. Зафиксируем геоакустический волновод Ω, границы которого задаются прямой $z = 0$ и кривой $z = H(x)$. Предположим, что в волноводе имеется граница раздела сред, заданная уравнением $z = h(x)$, на которой скорость звука и плотность могут терпеть разрывы первого рода. Как и прежде, мы будем предполагать, что $h = h(\epsilon x)$ и $H = H(\epsilon x)$.

Усредненный по времени поток акустической энергии $J(P)$ через некоторое вертикальное сечение волновода определяется формулой

$$J(P) = \frac{1}{2\omega} \int\limits_0^{H(x)} I(P)\, dz, \quad \text{где} \quad I(P) = \frac{1}{\rho} \mathrm{Im} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot P^* \right), \tag{5.11}$$

а величина P^* получается комплексным сопряжением P.

Теорема 5.2.1. *Предположим, что* $\mathrm{Im}(\bar{\nu}) = 0$ *(т.е. что затухание в среде отсутствует). Пусть* $\{\bar{A}_0, \ldots, \bar{A}_n\}$ *суть решения начально-краевой задачи для системы ИПУ* (5.5) *с граничными и интерфейсными условиями* (5.8),(5.9) *образующие параболическую аппроксимацию порядка* n *Пусть*

$$P = \exp\left(i\bar{\theta}\right) \cdot \left(\bar{A}_0 + \ldots + \bar{A}_n\right) = \exp\left(\frac{i}{\epsilon}\theta\right) \cdot \left(A_0 + \ldots + \epsilon^n A_n\right) .$$

Тогда скорость изменения потока энергии по x представляет собой величину порядка ϵ^{n+2}, т.е.

$$\frac{d}{dx}J(P) = O(\epsilon^{n+2})\,.$$

Данная теорема устанавливает тот факт, что изменение потока энергии при переходе между различными сечениями некоторого геоакустического волновода равно нулю с точностью до степени малого параметра, которая больше порядка итеративной параболической на 2. Доказательство этой теоремы приведено в работе [43]. Мы не приводим его здесь, поскольку данный результат получен Трофимовым, и не связан с вкладом автора настоящей диссертации в статью [43].

5.2.2. О распространении мод в модели ИПУ

В слоистой среде, т.е. в волноводе, где величины ρ, $\bar{\nu}$ и κ_0 не зависят от x, решение ИПУ можно сравнить с решением уравнения Гельмгольца, полученным с помощью метода нормальных волн. Ввиду линейности задачи мы ограничимся рассмотрением решений, профиль которых по z имеет вид модовой функции акустической спектральной задачи $\phi(z)$. Известно, что стандартные широкоугольные ПУ, получаемые с помощью формальной факторизации оператора Гельмгольца, дают некоторую ошибку в фазе решений такого типа [73] (по сравнению с фазой нормальных волн, которые являются решениями самого уравнения Гельмгольца). Аналогичная ошибка возникает и в случае ИПУ, однако, как будет показано ниже, она может быть сделана сколь угодно малой путем увеличения порядка итеративных параболических аппроксимаций.

Будем искать решения уравнений системы ИПУ (5.5) в виде следующего анзаца

$$\bar{A}_l(x,z) = B_l(x)\phi(z)\,, \quad l = 0,\ldots,n\,. \tag{5.12}$$

На всем протяжении данного раздела мы будем преполагать, что $\mathrm{Im}\bar{\nu} = 0$ и для определенности рассматривать начально-краевую задачу для ИПУ, составляющих широкоугольную аппроксимацию порядка n в слоистом волноводе с мягкой границей $z=0$ ($\bar{A}_l = 0$ при $z=0$, $l=0,\ldots,n$) и жесткой границей при $z=H$ ($\bar{A}_{l,z}=0$ при $z=H$,$l=0,\ldots,n$). В качестве начальных условий для системы ИПУ при $x=0$ мы примем $\bar{A}_0=\phi(z)$, $\bar{A}_l=0$,$l=1,\ldots,n$ (т.е. рассмотрим распространение одной вертикальной моды).

Подставляя выражение (5.12) в уравнения (5.5), мы находим, что $B_0 = \exp(ikx)$, где k и $\phi(z)$ представляют собой собственное значение и собственную функцию следующей спектральной задачи

$$\left(\frac{1}{\rho}\phi_z\right)_z + \frac{1}{\rho}\nu\phi = \frac{1}{\rho}2\kappa_0 k\phi\,, \tag{5.13}$$

а функции B_l для $l=1,\ldots,n$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$2i\kappa_0 B_{l,x} + 2\kappa_0 k B_l + B_{l-1,xx} = 0\,. \tag{5.14}$$

Каждое решение $(k,\phi(z))$ спектральной задачи (5.13) соответствует решению спектральной задачи (k_H^2,ϕ_H) для уравнения Гельмгольца (3.2), причем, как легко видеть, $\phi_H(z)=\phi(z)$ и, кроме того,

$$k_H^2 = 2k\kappa_0 + \kappa_0^2\,. \tag{5.15}$$

Нетрудно проверить, что решение уравнения (5.14) с начальными условиями $B_l(0)=0$, $l=1,\ldots,n$ имеет вид $B_l = C_l\exp(ikx)$, где $C_0=1$, а C_l для $l>0$ удовлетворяют следующему обыкновенному дифференциальному уравнению с начальным условием

$$2i\kappa_0 C_{l,x} + C_{l-1,xx} + 2ikC_{l-1,x} - k^2 C_{l-1} = 0\,, \quad C_l(0)=0\,. \tag{5.16}$$

Из этого уравнения видно, что функции $C_l(x)$ суть полиномы степени l.

Сформулируем теперь основной результат данного раздела

Теорема 5.2.2. *Пусть $0<k_H<\kappa_0$. Тогда*

$$B_0+\ldots+B_n \rightrightarrows \exp(i(k_H-\kappa_0)x) \quad \textit{при} \quad n\to\infty$$

на любом конечном интервале (символ $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость).

Доказательство. Пусть $S_n = C_0 + \cdots + C_n$. Поскольку S_n есть многочлен степени n, положим $S_n(x) = b_0^n + \dots b_n^n x^n$. Предполагая, что $b_l^n = 0$ при $l > n$ и принимая во внимание, что $S_0 = 1$, мы получаем следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} &2i\kappa_0 l b_l^{n+1} + (l+1) l b_{l+1}^n + 2ikl b_l^n - k^2 b_{l-1}^n = 0\,, \quad l = 1, \dots, n+1 \\ &b_0^{n+1} = 1\,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Подстановка $b_l^n = \dfrac{i^l k^l}{l!} d_l^n$ дает следующие уравнения для d_l^n:

$$\begin{aligned} &2\kappa_0 d_l^{n+1} + k\left(d_{l+1}^n + 2d_l^n + d_{l-1}^n\right) = 0\,, \quad l = 1, \dots, n+1 \\ &d_0^{n+1} = 1\,. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Эти уравнения определяют оператор $\mathcal{P}$ на пространстве последовательностей вида $\{u_0, \dots u_l, \dots\} = \{u_l\}$ и таких, что $u_0 = 1$, с заданной на нем метрикой $d\left(\{u_l\}, \{v_l\}\right) = \|\{u_l\} - \{v_l\}\| = \sup_l |u_l - v_l|$. Этот оператор действует следующим образом: если $\{w_l\} = P\left(\{u_l\}\right)$, то

$$w_l = -\frac{k}{2\kappa_0}\left(u_{l+1} + 2u_l + u_{l-1}\right) = -\frac{2k}{\kappa_0}\frac{u_{l+1} + 2u_l + u_{l-1}}{4} \quad \text{для} \quad l > 0\,.$$

Поскольку выполнено неравенство $\|\{(u_{l+1} + 2u_l + u_{l-1})/4\}\| \le \|\{u_l\}\|$, то оператор $\mathcal{P}$ имеет неподвижную точку при условии $|2k/\kappa_0| < 1$. В нашем случае это неравенство выполняется

$$\left|\frac{2k}{\kappa_0}\right| = \left|\frac{k_H^2 - \kappa_0^2}{\kappa_0^2}\right| < 1 \quad \text{если} \quad 0 < k_H < \kappa_0\,.$$

Поэтому у $\mathcal{P}$ действительно есть неподвижная точка, причем $\{d_l^n\} \to \{d_l\}$ где последовать $\{d_l\}$ такова, что

$$2\kappa_0 d_l + k\left(d_{l+1} + 2d_l + d_{l-1}\right) = 0\,, \quad d_0 = 1\,. \tag{5.19}$$

Подстановка $d_l = w^l$ дает нам характеристическое уравнение для w

$$2\kappa_0 w + kw^2 + 2kw + k = 0\,,$$

которое имеет два корня: $w_1 = (k_H - k - \kappa_0)/k$ и $w_2 = (-k_H - k - \kappa_0)/k$. Определяемая вторым корнем последовательность $\{w_2^l\}$ не принадлежит нашему пространству, так как $\sup_l w_2^l = \infty$. Первый корень дает последовательность $\{b_l = \dfrac{i^l k^l}{l!} d_l\}$, элементы которой суть последовательные коэффициенты разложения Тейлора для функции $x \to \exp(i(k_H - k - \kappa_0)x$. Отсюда легко следует вывод о том, что $\exp(i(\kappa_0 + k)x)\,(C_0 + \ldots + C_n) \rightrightarrows \exp(ik_H x)$ на любом конечном интервале. $\square$

Заметим, что условие $k_H < \kappa_0$ выполняется, если в качестве κ_0 принять величину $\omega/c_{\min}$, где $c_{\min}$ – наименьшее значение скорости звука в данном волноводе. Обычно κ_0 выбирают именно таким образом. Можно показать, что и при другом выборе κ_0 сходимость имеет место во многих случаях (см. детали в работе [43]).

5.3. Граничные условия прозрачности для системы ИПУ

При решении двумерных задач распространения звука систему ИПУ (5.5) необходимо решать в вертикальном сечении океанического волновода, т.е. в области $\Omega = \{(x,z)|z \geq 0, 0 \leq x \leq x_{max}\}$, которая ограничена сверху поверхностью и состоит из нескольких слоев, на границах которых параметры среды могут меняться скачкообразно. Данная область, тем не менее, не имеет физической нижней границы и обычно необходимо считать, что самый нижний из слоев представляет собой однородное полупространство, т.е. что существует достаточно большое значение L, такое что $\rho(x,z) = \rho_b$, $\kappa(x,z) = \kappa_b$ и $\nu(x,z) = \nu_b$ для всех $z \geq L$. Если при $z = L$ поставить, например, граничное условие Дирихле или Неймана, то отраженная от этой границы волна вернется в расчетную область и нарушит в ней структуру решения. Эту проблему можно решить, если взять L существенно большим, чем значения глубин, для которых нам нужно вычислить звуковое поле, и искусственно увеличить затухание в нижних слоях дна (так обычно поступают, например, при выполнении расчетов с помощью известных программ RAM/RAMs). Такое решение, однако, требует значительного увеличения общих размеров расчетной области и ведет к существенному снижению эффективности расчетной программы.

Значительно более эффективным инструментом для искусственного ограничения области, в которой решается задача распространения звука, являются граничные условия прозрачности (ГУП). Такие условия обеспечивают свободное прохождение волн, падающих на границу $z = L$, во внешнюю среду. Разумеется, искусственная граница $z = L$ должна быть расположена ниже, чем все неоднородности среды, которые необходимо учесть при решении задачи распространения звука.

Разумеется, ГУП равным образом необходимы и для ИПУ, возникающих при построении широкоугольных параболических аппроксимаций для уравнения горизонтальной рефракции (3.19). Действительно, для таких ИПУ начально-краевая задача естественным образом ставится в области $\Omega = \{(x, y)| -\infty < y < \infty, 0 \leq x \leq x_{max}\}$, не имеющей физических границ. На практике, однако, нас всегда интересует решение в некоторой полосе $\Omega^t = \{(x, y)| -L \leq y \leq L, 0 \leq x \leq x_{max}\}$, содержащей в себе акустическую трассу (линию, соединяющую источник и приемник). По этой причине расчетную область для ИПУ необходимо ограничить данной полосой, поставив ГУП на ее границах $y = \pm L$. Разумеется, вывод и конечная форма этих условий будут одинаковы для двумерной задачи в вертикальной плоскости (x, z) и при расчете модовых амплитуд в трехмерной задаче. Для определенности в данном разделе мы будем рассматривать первый случай и, в основном, проводить рассуждения для границы $z = L$. При этом конечный результат будет приведен как для правой, так и для левой границы расчетной области.

Без потери общности в данном разделе мы будем решать следующую задачу. Пусть набор функций $\mathbf{A} = (A_0(x, z), A_1(x, z), \ldots, A_n(x, z))$ представляет собой решение начально-краевой задачи в для системы итеративных уравнений

$$
\begin{aligned}
&2i\kappa_0 A_{j,x} + A_{j,zz} + \nu A_j + A_{j-1,xx} = 0\,, \\
&A_0(0,z) = S(z)\,, \quad A_j(0,z) = 0\,, \quad j = 1, 2, \dots\,, \\
&A_j(x,0) = 0\,, \\
&\lim_{z\to\infty} |A_j(x,z)| = 0\,.
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

в области $\Omega = \{(x,z)|z \geq 0, 0 \leq x \leq x_{max}\}$ с начальным условием $S(z)$, носитель которого является подмножеством отрезка $[0, L]$.

Мы получим такие граничные условия

$$
\mathcal{B}(A_j) = 0\,, \tag{5.21}
$$

для (5.20) на границе $z = L$, что решение $\mathbf{A}^t = (A_0^t(x,z), A_1^t(x,z), \dots, A_n^t(x,z))$ начально-краевой задачи (5.20) для системы ИПУ в искусственно ограниченной области $\Omega^t = \{(x,z)|0 \leq z \leq L, 0 \leq x \leq x_{max}\}$ с начальными условиями (5.10) и граничными условиями (5.21) на границе $z = L$ будет совпадать с решением исходной задачи в области Ω. Условия (5.21), удовлетворяющие этому определению, т.е. такие, что $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$ для всех $(x,z) \in \Omega^t$, и называются граничными условиями прозрачности для системы (5.20).

Заметим, что мы используем упрощенную форму (5.20) системы уравнений (5.5), так как предполагается, что в области $z \geq L$ величины ρ и κ не зависят от z, x (из наших рассуждений будет ясно, однако, что эти условия употребительны и в общем случае, т.е. для системы (5.5)).

5.3.1. Вывод граничных условий прозрачности

Отметим прежде всего, что исходная начально-краевая задача в полупространстве $z \geq 0$, очевидно, эквивалентна двум следующим связанным задачам

$$\begin{cases} 2i\kappa_0 A^t_{j,x} + A^t_{j,zz} + \nu A^t_j + A^t_{j-1,xx} = 0\,, \quad (x,z) \in \Omega^t\,, \\ A^t_0(0,z) = S(z)\,, \quad A^t_j(0,z) = 0, \quad j = 1,2,\dots\,, \\ A^t_j(x,0) = 0, \quad j = 0,1,\dots\,, \\ A^t_{j,z}(x,L) = A_{j,z}(x,L)\,, \end{cases} \tag{5.22}$$

$$\begin{cases} 2i\kappa_0 A^r_{j,x} + A^r_{j,zz} + \nu_b A^r_j + A^r_{j-1,xx} = 0\,, \quad (x,z) \in \Omega^r\,, \\ A^r_j(0,z) = 0, \quad j = 0,1,\dots\,, \\ A^r_j(x,L) = A^t_j(x,L)\,, \\ \lim_{z\to\infty} |A^r_j(x,z)| = 0\,. \end{cases} \tag{5.23}$$

Здесь (5.22) есть задача на ограниченной области Ω^t, (5.23) – задача в полупространстве $\Omega^r = [0, x_{max}] \times [L, \infty)$, представляющем собою внешнюю среду (в работах, относящихся к ГУП для уравнения Шредингера, (5.23) обычно называется правой внешней задачей [207]). Для заданных функцией $A^t_j(x,L)$ падающих на границу $z = L$ волн задача их распространения во внешней однородной среде может быть решена в явном виде. После этого можно вычислить производную решения $A^t_{j,z}(x,L)$ на границе. Таким образом, всю процедуру решения задачи 5.23 можно считать оператором, который отображает функцию $A^t_j(x,L)$ в $A^t_{j,z}(x,L)$ (т.е. оператором Дирихле к Нейману, или частным случаем оператора Пуанкаре-Стеклова). Этот оператор мы и будем использовать в качестве $\mathcal{B}$ в граничном условии (5.21) задачи (5.22).

Заметим, что формулировки задач (5.22),(5.23) не предполагают скачка плотности при $z = L$. Его наличие, однако, можно учесть, используя подход, описанный в работе [213].

Считая, что функция $A^t_j(x,L)$ известна, найдем теперь решение задачи (5.23), используя ее в граничном условии при $z = L$. Применим преобразование Лапласа $\mathcal{L} : f(x) \mapsto \hat{f}(\xi)$ ко всем равенствам, входящим в формулировку начально-краевой задачи (5.23). В результате получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \hat{A}^r_{j,zz} + (2i\kappa_0\xi + \nu_b)\hat{A}^r_j = -\xi^2 \hat{A}^r_{j-1}\,, \quad z \in [L,\infty)\,, \\ \hat{A}^r_j(\xi,L) = \hat{A}^t_j(\xi,L)\,, \\ \lim_{z\to\infty} |\hat{A}^r_j(\xi,z)| = 0\,. \end{cases} \tag{5.24}$$

Введем новую независимую переменную $t = z - L$ и следующие обозначения $\hat{A}^r_j(\xi,z) = P_j(t)$, $2i\kappa_0\xi + \nu_b = -w^2$, $\xi^2 = v$, $\hat{A}^t_j(\xi,L) = a_j$ в равенствах, входящих в (5.24). В новых обозначениях эта задача принимает вид

$$\begin{cases} P''_j - w^2 P_j = -vP_{j-1}\,, \quad t \in [0,\infty)\,, \\ P_j(0) = a_j\,, \\ \lim_{t\to\infty} |P_j| = 0\,. \end{cases} \tag{5.25}$$

Заметим, что v, w не зависят от t, причем $w = \sqrt[+]{-2i\kappa_0\xi - \nu_b}$ означает означает ветвь квадратного корня с положительной вещественной частью (очевидно, что в задаче (5.25) w представляет собой параметр).

Система краевых задач (5.25) может быть решена с помощью метода вариации произвольной постоянной. Непосредственно видно, что ее решение имеет вид

$$P_j(t) = \mathrm{e}^{-wt}\left(a_j + a_{j-1}vP_1(t,w) + a_{j-2}v^2P_2(t,w) + \cdots + a_0P_j(t,w)\right)\,, \tag{5.26}$$

где $P_k(t,w)$ при $k \geq 1$ суть полиномы относительно переменной t, такие что функция $q_k(t) = \mathrm{e}^{-wt}P_k(t,w)$ есть решение следующей краевой задачи с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} q''_k - w^2 q_k = -\mathrm{e}^{-wt}P_{k-1}(t,w)\,, \\ q_k(0) = 0\,, \\ \lim_{t\to\infty} |q| = 0\,. \end{cases}$$

Подставляя выражение для $q_k(t)$, получаемое из (5.26), в эту краевую задачу, мы, в свою очередь, получаем краевую задачу для полиномов $P_k(t,w)$

$$\begin{cases} P''_k - 2wP'_k = -P_{k-1}\,, \\ P_k(0,w) = 0\,, \\ \lim_{t\to\infty} |P_k(t,w)\mathrm{e}^{-wt}| = 0\,. \end{cases} \tag{5.27}$$

Еще раз подчеркнем, что величина w – параметр, содержащийся в многочленах $P_k(t,w)$, и потому их производные по t (5.27) мы обозначаем просто штрихами.

Легко проверить, что краевая задача (5.27) имеет решение вида

$$P_k(t,w)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{k,j}\frac{t^j}{w^{2k-j}}\,, \tag{5.28}$$

где набор коэффициентов $\bar{\alpha}_{k+1}=\{\alpha_{k+1,j}\}$ может быть пересчитан из набора $\bar{\alpha}_k$ посредством решения следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2(k+1)\alpha_{k+1,k+1}=-\alpha_{k,k}\,, \\ -2(j+1)(j+2)\alpha_{k+1,j+2}-2(j+1)\alpha_{k+1,j+1}=-\alpha_{k,j}, \quad j=1,\ldots,k-1\,, \\ 2\alpha_{k+1,2}-2\alpha_{k+1,1}=0\,. \end{cases} \tag{5.29}$$

Решение системы (5.29) может быть легко получено с помощью метода Гаусса в виде следующих рекурсивных формул, позволяющих вычислить $\alpha_{k+1,j}$ через $\alpha_{k+1,j+1}$

$$\begin{cases} \alpha_{k+1,k+1}=\frac{1}{2(k+1)}\alpha_{k,k}\,, \\ \alpha_{k+1,j}=\frac{j+1}{2}\alpha_{k+1,j+1}+\frac{1}{2j}\alpha_{k-1,j}, \quad j=2,\ldots,k\,, \\ \alpha_{k+1,1}=\alpha_{k+1,2}\,. \end{cases} \tag{5.30}$$

Теперь у нас имеются все необходимые компоненты для вычисления решения задачи (5.24). Мы получаем следующее выражение для $\hat{A}_j^r$ в полупространстве $z\geq L$ (в двойственных переменных ξ):

$$\hat{A}_j^r(\xi,z)=\mathrm{e}^{-w(\xi)(z-L)}\left(\sum_{k=0}^{j}\xi^{2k}P_k(z-L,w(\xi))\hat{A}_{j-k}^t(\xi,L)\right)\,,$$

где мы пишем $P_k(z-L,w(\xi))$ вместо $P_k(z-L,w)$, чтобы подчеркнуть зависимость коэффициентов полинома от ξ. Чтобы теперь получить граничное условие в терминах оператора Дирихле к Нейману (ДкН), мы дифференцируем последнее уравнение по z

$$\frac{\partial \hat{A}_j^r(\xi,z)}{\partial z} = \mathrm{e}^{-w(z-L)} \left(\sum_{k=0}^{j} \xi^{2k} (P_k'(z-L,w) - wP_k(z-L,w)) \hat{A}_{j-k}^t(\xi,L) \right). \tag{5.31}$$

Вспомним теперь, что условие связи краевых задач в (5.22) имеет вид $A_{j,z}^t(x,L) = A_{j,z}^r(x,L)$, и подставим в него выражение для $A_{j,z}^r(\xi,z)$ из формулы (5.31). Заметив, что

$$w(\xi)\mathrm{e}^{-w(\xi)(z-L)} \left(\sum_{k=0}^{j} \xi^{2k} P_k(z-L,w(\xi)) \hat{A}_{j-k}^t(\xi,L) \right) \Bigg|_{z=L} = w(\xi)\hat{A}_j^t(\xi,L)\,,$$

а также что

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{j} \xi^{2k} P_k'(z-L,w) \hat{A}_{j-k}^t(\xi,L) \Bigg|_{z=L} \\
&= \sum_{k=1}^{j} \xi^{2k} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sum_{m=1}^{k} \alpha_{k,m} \frac{(z-L)^m}{w^{2k-m}} \right) \Bigg|_{z=L} \hat{A}_{j-k}^t(\xi,L) \\
&= \sum_{k=1}^{j} \xi^{2k} \left(\frac{\alpha_{k,1}}{w^{2k-1}} + \sum_{m=2}^{k} m\alpha_{k,m} \frac{(z-L)^m}{w^{2k-m}} \right) \Bigg|_{z=L} \hat{A}_{j-k}^t(\xi,L) \\
&= \sum_{k=1}^{j} \xi^{2k} \frac{\alpha_{k,1}}{w^{2k-1}} \hat{A}_{j-k}^t(\xi,L)\,,
\end{aligned}$$

мы получим граничное условие прозрачности в терминах оператора ДкН в переменных ξ, z:

$$\frac{\partial \hat{A}_j^t(\xi,z)}{\partial z} \Bigg|_{z=L} = -w(\xi)\hat{A}_j^t(\xi,L) + \sum_{k=1}^{j} \xi^{2k} \frac{\alpha_{k,1}}{w^{2k-1}} \hat{A}_{j-k}^t(\xi,L)\,. \tag{5.32}$$

Для полноты изложения отметим, что аналогичное условие на левой границе расчетной области (например, при $z=0$) имеет вид

$$\frac{\partial \hat{A}_j^t(\xi,z)}{\partial z} \Bigg|_{z=0} = w(\xi)\hat{A}_j^t(\xi,0) - \sum_{k=1}^{j} \xi^{2k} \frac{\alpha_{k,1}}{w(\xi)^{2k-1}} \hat{A}_{j-k}^t(\xi,0)\,. \tag{5.33}$$

Для того, чтобы получить ГУП в физических переменных x, z, применим к равенствам (5.32) и (5.33) обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}^{-1} : \hat{f}(\xi) \mapsto f(x)$, воспользовавшись следующими его свойствами $\mathcal{L}^{-1}$:

$$\mathcal{L}^{-1}(\xi^{2k}\hat{f}(\xi)) = \frac{d^{2k}f}{dx^{2k}}\,,$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\hat{g}(\xi-a)\hat{f}(\xi)) = \mathrm{e}^{ax}\int\limits_0^x g(x-y)\mathrm{e}^{-ay}f(y)dy = \mathrm{e}^{ax}\mathcal{L}^{-1}(\hat{g}(\xi)\mathcal{L}(\mathrm{e}^{-ax}f(x)))\,,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt[+]{\xi}}{\xi^k}\hat{f}(\xi)\right) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{dy}{\sqrt{x-y}}\int\limits_0^y\int\limits_0^{y_k}\cdots\int\limits_0^{y_2} f(y_1)dy_1dy_2\dots dy_k\,,$$

и замечая, что

$$\frac{1}{w(\xi)^{2k-1}} = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}(2k-1)}}{(2\kappa_0)^{k-\frac{1}{2}}}\frac{\sqrt[+]{\xi-\frac{i\nu_b}{2\kappa_0}}}{\left(\xi-\frac{i\nu_b}{2\kappa_0}\right)^k}\,.$$

Таким образом, мы получаем конечные выражения для ГУП

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_j^t(x,z)}{\partial\mathbf{n}} &= -\sqrt{\frac{2\kappa_0}{\pi}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{i\frac{\nu_b}{2\kappa_0}x}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{dy}{\sqrt{x-y}}\Bigg(A_j^t(y,z)\mathrm{e}^{-i\frac{\nu_b}{2\kappa_0}y}\\ &-\sum_{k=1}^j\alpha_{k,1}(-2i\kappa_0)^{-k}\int\limits_0^y\int\limits_0^{y_k}\cdots\int\limits_0^{y_2}\mathrm{e}^{-i\frac{\nu_b}{2\kappa_0}y_1}\,\frac{\partial^{2k}A_{j-k}^t(y_1,z)}{\partial y_1^{2k}}dy_1dy_2\dots dy_k\Bigg)\end{aligned} \tag{5.34}$$

при $z=L$ и $z=0$ (здесь $\mathbf{n}$ обозначает единичный вектор направленный наружу области и ортогональный ее границе при $z=L$ и $z=0$). Для практических целей удобно вычислить заранее набор коэффициентов $\alpha_{k,1}$

$$\alpha_{1,1}=\frac{1}{2}\,,\quad \alpha_{2,1}=\frac{1}{8}\,,\quad \alpha_{3,1}=\frac{1}{16}\,,\quad \alpha_{4,1}=\frac{5}{128}\,,\quad \alpha_{5,1}=\frac{7}{256}\,,\dots\,.$$

Приведенного здесь набора достаточно для решения многих практических задач.

Вид граничных условий (5.34) существенно упрощается, если выбрать отсчетное волновое число κ_0 таким образом, что $\nu_b=0$ (это условие будет выполнено, если положить $\kappa_0=\kappa_b$ в (5.5)). В этом случае кратные интегралы в правой части (5.34) исчезают, и ГУП принимает вид

$$\frac{\partial A_j^t(x,z)}{\partial\mathbf{n}} = -\sqrt{\frac{2\kappa_0}{\pi}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\sum_{k=0}^j\alpha_{k,1}(-2i\kappa_0)^{-k}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{\partial^k A_{j-k}^t(y,z)}{\partial y^k}\frac{dy}{\sqrt{x-y}}\,, \tag{5.35}$$

при $z=0,L\,,$

где $\alpha_{0,1} = -1$.

Отметим, что ГУП (5.34) представляют собой естественное обобщение известных ГУП для одиночного параболического уравнения (см., например, [207]), в то время как его упрощенная форма (5.35) – обобщение ГУП для узкоугольного параболического уравнения, потенциал в котором равен нулю на границе области [204, 240].

5.4. Корректность начально-краевых задач для ИПУ и единственность их решения

В этом разделе мы сначала докажем единственность решения начально-краевой задачи для системы ИПУ с ГУП (5.34), а затем покажем, что эта задача является корректной. Для простоты мы вновь будем рассматривать задачу в области с правой искусственной границей $z = L$:

$$\begin{aligned}
&2i\kappa_0 A^t_{j,x} + A^t_{j,zz} + \nu A^t_j + A^t_{j-1,xx} = 0\,, \;\; (x,z) \in \Omega^t\,,\\
&A^t_0(0,z) = S(z)\,, \quad A^t_j(0,z) = 0, \;\; j = 1,2,\dots\,,\\
&A^t_j(x,0) = 0, \;\; j = 0,1,\dots\,,\\
&\frac{\partial A^t_j(x,z)}{\partial z} = -\sqrt{\frac{2\kappa_0}{\pi}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{k=0}^{j} \frac{\alpha_{k,1}}{(-2i)^k \kappa_0^k} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{\partial^k A^t_{j-k}(y,z)}{\partial y^k} \frac{dy}{\sqrt{x-y}} \text{ при } z = L\,.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

5.4.1. Существование и единственность

Доказательство единственности основывается на следующем стандартном результате для однородного уравнения Шредингера [241]

Лемма 5.4.1. *[241] Пусть задана начально-краевая задача*

$$\begin{aligned}
&2i\kappa_0 B_x + B_{zz} + \nu B = 0\,, \;\; (x,z)\in\Omega^t\,,\\
&B(0,z) = S(z)\,, \quad S(z) = 0 \text{ для } z \geq L\,,\\
&B(x,0) = 0\,,\\
&\frac{\partial B(x,z)}{\partial z} = -\sqrt{\frac{2\kappa_0}{\pi}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\alpha_{0,1}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{B(y,z)dy}{\sqrt{x-y}} \text{ при } z = L
\end{aligned} \tag{5.37}$$

для стандартного узкоугольного ПУ с ГУП на границе $z = L$. Пусть функция $S(z) \in H^2[0,L]$ в начальном условии и потенциал $\nu(x,z) \in C([0,\infty), L^\infty[0,L])$ равны нулю при $z = L$. Тогда задача (5.37) имеет единственное решение $B(x,z) \in C([0,\infty), L^2[0,L])$.

Из данной леммы немедленно вытекает следующий результат:

Предложение 5.4.1. *Если существует два решения $A_j^1(x,z)$ и $A_j^2(x,z)$ начально-краевой задачи (5.36), то $A_j^1(x,z) = A_j^2(x,z)$ для всех $(x,z) \in \Omega^t$.*

Доказательство. Если $A_j^1(x,z)$ и $A_j^2(x,z)$ удовлетворяют (5.36), то $A_j^1(x,z) - A_j^2(x,z)$ есть решение начальной-краевой задачи (5.37) с начальным условием $S(z) = 0$ для всех z. Из единственности решения этой задачи следует, что функция $A_j^1(x,z) - A_j^2(x,z)$ тождественно равна нулю для всех x, z. □

Для доказательства существования решения задачи (5.36) и ее корректности мы сначала рассмотрим начально-краевую задачу для узкоугольного параболического уравнения с вынуждающим членом $\zeta = \zeta(x,z)$ общего вида

$$\begin{aligned}
&2i\kappa_0 A_x + A_{zz} + \nu A + \zeta = 0\,,\\
&A(0,z) = 0\,,\\
&A(x,0) = 0\,,\\
&\lim_{z\to\infty} |A(x,z)| = 0\,.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Для такой задачи можно доказать следующее утверждение [242, 243]:

Лемма 5.4.2. *Если вынуждающий член $\zeta(x,z)$ принадлежит пространству $C([0,x_{max}],H^2(\mathbb{R}))$, а потенциал $\nu(x,z)$ в узкоугольном уравнении – пространству $C([0,x_{max}],H^2(\mathbb{R}))$, причем $\nu(x,z)=0$ для $z\geq L$, то начально-краевая задача (5.38) имеет единственное классическое решение*

$$A(x,z)\in C([0,x_{max}],H^2(\mathbb{R}))\cap C^1([0,x_{max}],L^2(\mathbb{R}))\,.$$

Заметим, что Дои доказал [243], что решение принадлежит и пространству $C([0,x_{max}],\ H^k(\mathbb{R}))$ для достаточно гладкого вынуждающего члена и потенциала. Здесь и далее мы будем предполагать, что эти условия выполняются, т.е. что $\zeta(x,z)\in C([0,x_{max}],C^M(\mathbb{R}))$ и $\nu(x,z)\in C([0,x_{max}],C^M(\mathbb{R}))$ для такого (достаточно большого) натурального числа M, что $A_{jxx}(x,z)$ в уравнениях (5.20) принадлежит $C([0,x_{max}],H^2(\mathbb{R}))$ для всех $j=1,2,\ldots,n$.

Хотя последнее предположение может показаться чересчур ограничительным, формулировка более общих необходимых условий для $S(z)$ и $\nu(x,z)$ уведет нас слишком далеко от магистрального направления настоящей диссертации. Хотя функция $S(z)$ для многих стартеров ПУ [73] действительно принадлежит $C^\infty(\mathbb{R})$, потенциал ν часто требуется считать кусочно-гладкой функцией по z (часто удобно считать ее кусочно-линейной, особенно если профиль скорости звука является результатом интерполяции данных натурных измерений), и приведенное здесь доказательство не годится для этого случая.

Объединяя приведенные выше рассуждения, мы можем сформулировать следующее утверждение

Лемма 5.4.3. *Для $\nu(x,z)\in C([0,x_{max}],C^M(\mathbb{R}))$ и $S(z)\in C^M(\mathbb{R})$, где M достаточно велико, начально-краевая задача (5.20) имеет единственное классическое решение $\mathbf{A}=(A_0(x,z),A_1(x,z),\ldots,A_n(x,z))$, где*

$$A_j(x,z)\in C([0,x_{max}],H^2(\mathbb{R}))$$

.

Эта лемма немедленно влечет за собой

Предложение 5.4.2. *Если выполнены условия Леммы 5.4.3 и, кроме того, $\nu(x,z) = 0$ и $S(z) = 0$ для всех $z \geq L$, то существует классическое решение задачи (5.36) (которое является единственным согласно Предложению 5.4.1). Это решение совпадает с решением (5.20) для всех $(x,z) \in \Omega^t$.*

Доказательство. По построению ГУП, любое решение $A_j(x,z)$ задачи в полупространстве (5.20) удовлетворяет (5.35). Таким образом, решение из Леммы 5.4.3 также является решением задачи (5.36). □

5.4.2. Корректность

Поскольку решение начально-краевой (5.36) с ГУП есть просто ограничение решения задачи в полупространстве для (5.20) на искусственно ограниченную область Ω^t, корректность задачи (5.36) также следует из корректности задачи (5.20). Последняя устанавливается следующим предложением

Предложение 5.4.3. *Для решения начально-краевой задачи (5.20) в предположениях Леммы 5.4.3 для $j = 1, 2, \ldots$ выполняется следующее неравенство*

$$2\kappa_0 \left(N(x) - N(0)\right) \leq \int\limits_0^x \eta(\xi) d\xi \,, \tag{5.39}$$

где

$$N(x) = \|A_j(x,z)\|_{L_z^2} = \left(\int\limits_0^\infty |A_j(x,z)|^2 dz \right)^{1/2} ,$$

$$\eta(x) = \|\partial^2 A_{j-1}(x,z)/\partial x^2\|_{L_z^2} = \left(\int\limits_0^\infty |\partial^2 A_{j-1}(x,z)/\partial x^2|^2 dz \right)^{1/2} .$$

Доказательство. Для удобства мы будем проводит доказательство, используя обозначения из (5.38), однако будем подразумевать, что $A(x,z) = A_j(x,z)$ и $\zeta(x,z) = \partial^2 A_{j-1}(x,z)/\partial x^2$.

Перепишем параболическое уравнение из (5.38) в виде

$$2\kappa_0 A_x = iA_{zz} + i\nu A + i\zeta\,,$$

умножим его на функцию A^* (звездочка означает комплексное сопряжение) и рассмотрим вещественную часть получившегося равенства. После тривиальных преобразований получим

$$\kappa_0 \frac{\partial}{\partial x}|A|^2 = \mathrm{Re}(iA^* A_{zz}) + \mathrm{Re}(i\nu|A|^2) + \mathrm{Re}(iA^*\zeta)\,.$$

Проинтегрируем теперь последнее уравнение по z:

$$\kappa_0 \frac{d}{dx}\|A\|^2_{L^2_z} = \mathrm{Re}\left(\int\limits_0^\infty iA^* A_{zz} dz\right) + \int\limits_0^\infty \mathrm{Im}(\nu)|A|^2 dz + \mathrm{Re}\left(i\int\limits_0^\infty A^*\zeta dz\right)\,.$$

В начале применим интегрирование по частям

$$\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^\infty iA^* A_{zz} dz\right) = \mathrm{Re}\left(iA^* A_z|_0^\infty - i\int\limits_0^\infty A_z^* A_z dz\right) = \mathrm{Re}\left(i\int\limits_0^\infty |A_z|^2 dz\right) = 0\,.$$

После этого заметим, что $\mathrm{Im}(\nu) = 0$ для среды без затухания, в то время как в среде с затуханием $\mathrm{Im}(\nu) < 0$. Таким образом, мы можем заключить, что

$$\kappa_0 \frac{d}{dx}\|A\|^2_{L^2_z} \le \mathrm{Re}\left(i\int\limits_0^\infty A^*\zeta dz\right) \le \|A\|_{L^2_z}\|\zeta\|_{L^2_z}\,.$$

Последнее неравенство в наших обозначениях можно переписать следующим образом

$$2\kappa_0 N'(x) N(x) \le N(x)\eta(x)$$

и, тем самым, завершить доказательство нашего предложения

$$2\kappa_0(N(x) - N(0)) = 2\kappa_0 \int\limits_0^x N'(\xi) d\xi \le \int\limits_0^x \eta(\xi) d\xi\,.$$

$\square$

5.5. Численная схема для решения начально-краевой задачи для ИПУ с ГУП и ее устойчивость

В этом разделе мы рассмотрим численную схему для решения системы ИПУ (5.5) с полученными в разделе 5.3 ГУП (5.5). Предложенная ниже схема является обобщением численной схемы Баскакова и Попова [204]. Во внутренней части расчетной области ИПУ приближаются с помощью конечно-разностной схемы типа Крэнка-Николсон, которая является безусловно устойчивой в неограниченной (по z) области или области с границами, на которых стоит условие Дирихле [207]. Вообще говоря, включение в численную схему такого типа ГУП может сделать ее лишь условно устойчивой, как показано в работах [46, 244] (множество значений $\Delta x/(\delta z^2)$, для которых схема устойчива, может иметь весьма нетривиальную структуру, например быть сходным с канторовым множеством). Относительно недавно Сун и Ву доказали [240], дискретизация ГУП, предложенная Баскаковым и Поповым приводит к безусловно устойчивой численной схеме. Мы обобщили их подход к доказательству устойчивости на случай предложенной ниже численной схемы для решения задачи (5.36) (наша схема также оказывается безусловно устойчивой).

Введем в рассмотрение равномерную сетку $x^n = n\Delta x$, $z^m = m\Delta z$, $n = 0, 1, \ldots, N$, $m = 0, 1, \ldots, M$, где $\Delta z M = L$, $\Delta x N = x_{max}$. В этом разделе верхние индексы используются для указания на значения некоторой заданной функции $U(x,z)$ в точках сетки. Более точно, мы полагаем

$$U^{n,m} \equiv U(x^n, z_m)\,, \quad U^{n+1/2,m} \equiv \frac{1}{2}\left(U(x^{n+1}, z^m) + U(x^n, z^m)\right)\,.$$

Для параболических уравнений (5.5) в задаче (5.36) мы применяем конечно-разностную дискретизацию по методу Крэнка-Николсон, модифицированную таким образом, чтобы учесть вынуждающий член:

$$2i\kappa_0\frac{A_j^{n+1,m}-A_j^{n,m}}{\Delta x}+\frac{A_j^{n+1/2,m+1}-2A_j^{n+1/2,m}+A_j^{n+1/2,m-1}}{\Delta z^2}\\ +\nu^{n+1/2,m}A_j^{n+1/2,m}+(A_{j-1,xx})^{n+1/2,m}=0\,. \tag{5.40}$$

Значение последнего в промежуточной точке

$$(A_{j-1,xx})^{n+1/2,m}=\left((A_{j-1,xx})^{n+1,m}+(A_{j-1,xx})^{n,m}\right)/2$$

вычисляется из решения уравнения для A_{j-1} с помощью стандартной трехточечной разностной аппроксимации второго порядка точности

$$(A_{j-1,xx})^{n,m}\approx\frac{A_{j-1}^{n+1,m}-2A_{j-1}^{n,m}+A_{j-1}^{n-1,m}}{\Delta x^2}\,.$$

Схема (5.40) является маршевой по переменной x, т.е. такой, что вектор $\mathbf{A}_j^n=(A_j^{n,0},A_j^{n,1},\dots,A_j^{n,M})$ вычисляется путем применения некоторого линейного оператора к вектору $\mathbf{A}_j^{n-1}$. Начальное условие в (5.36) при $x=0$ дает стартовый вектор $\mathbf{A}_j^0$ этой схемы:

$$A_0^{0,m}=S(z^m)\,,\quad A_j^{0,m}=0,\quad j=1,2,\dots\,. \tag{5.41}$$

Граничное условие Дирихле $A_j(x,0)=0$ при $z=0$ в численной схеме принимает вид

$$A_j^{n,0}=0\,,\quad j=0,1,2,\dots\,. \tag{5.42}$$

Опишем теперь конечно-разностную дискретизацию ГУП (5.35) в задаче (5.36). Перепишем сначала сверточный интеграл в ГУП в следующем виде

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{\partial^k A_{j-k}^t(y,z)}{\partial y^k}\frac{dy}{\sqrt{x-y}}=\frac{d^k}{dx^k}\int\limits_0^x\frac{\partial A_{j-k}^t(y,z)}{\partial y}\frac{dy}{\sqrt{x-y}}\,.$$

Здесь мы воспользовались аппроксимацией, предложенной в работе Баскакова и Попова [204]:

$$\int\limits_0^{(n+1)\Delta x}\frac{\partial A_j(y,L)}{\partial y}\frac{dy}{\sqrt{x-y}}\approx\sum_{k=0}^n\gamma_k A_j^{n+1-k,M}\,, \tag{5.43}$$

где $\gamma_0 = \sqrt{2}/\sqrt{\Delta x}$, а для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\gamma_k = \frac{-2}{\sqrt{\Delta x}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k-1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}\right)}\,.$$

Для дальнейшего упрощения записи введем дополнительно коэффициенты $\beta_k = \sqrt{\frac{2\kappa_0}{\pi}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\gamma_k$ и применим следующую аппроксимацию для вынуждающих членов в граничном условии $z = L$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2\kappa_0}{\pi}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\sum_{k=1}^{j}\alpha_{k,1}(-2i\kappa_0)^{-k}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\Delta x(n+1)}\frac{\partial^k A^t_{j-k}(y,z)}{\partial y^k}\frac{dy}{\sqrt{x-y}}\\ \approx \sum_{k=1}^{j}\alpha_{k,1}(-2i\kappa_0)^{-k}(D_x)^k\sum_{s=0}^{n}\beta_k A_j^{n+1-s,M}\,,\end{aligned} \tag{5.44}$$

где $(D_x)^k$ есть k-ая центральная разностная производная D_x, определенная соотношением

$$D_x U^{n,m} = \frac{U^{n+1,m} - U^{n-1,m}}{2\Delta x}$$

для любой функции $U^{n,m} = U(x^n, z^m)$, заданной в точках нашей сетки x^n, z^m. Обозначим теперь правую часть приближенного равенства (5.44)) как W_j^n. Тогда дискретизация ГУП (5.35) из начально-краевой задачи 5.36 может быть выполнена следующим образом

$$\frac{1}{2\Delta z}\left(A_j^{n+1/2,M+1} - A_j^{n+1/2,M-1}\right) = -\sum_{k=0}^{n}\beta_s A_j^{n+1/2-s,M} - W_j^{n+1/2}\,. \tag{5.45}$$

Выражая величину $A_j^{n+1/2,M+1}$ из (5.45) и подставляя ее в формулу (5.40) (для $m = M$), мы в конечном итоге получаем

$$\begin{aligned}2i\kappa_0\frac{A_j^{n+1,M} - A_j^{n,M}}{\Delta x} + 2\frac{A_j^{n+1/2,M-1} - A_j^{n+1/2,M}}{\Delta z^2} + \nu^{n+1/2,M}A_j^{n+1/2,M} -\\ -\frac{2}{\Delta z}\left(\sum_{k=0}^{n}\beta_s A_j^{n+1/2-s,M} + W_j^{n+1/2}\right) + (A_{j-1,xx})^{n+1/2,M} = 0\,,\end{aligned} \tag{5.46}$$

Уравнения (5.40), (5.46) и (5.42) в совокупности составляют систему линейных алгебраических уравнений, которые позволяют получить $\mathbf{A}_j^{n+1}$, зная $\mathbf{A}_j^n$.

Сун и Ву [240] доказали следующий результат для численной схемы (5.40, 5.46, 5.42) без вынуждающего члена (т.е. для случая $A_{j-1,xx}=0$ и $W_j=0$):

Предложение 5.5.1. *В случае начально-краевой задачи* (5.37) *численная схема (5.40, 5.46, 5.42) является безусловно устойчивой, т.е. следующее неравенство выполняется для всех n:*

$$\|\mathbf{B}^n\|_{\ell^2} \le \|\mathbf{B}^0\|_{\ell^2}\,,$$

где $\mathbf{B}^n = (B^{n,1},\dots,B^{n,M})$, а $\|\cdot\|_{\ell^2}$ обозначает ℓ^2-норму:

$$\|\mathbf{B}^n\|_{\ell^2}^2 = \sum_{m=0}^{M} |B^{n,m}|^2\,.$$

Легко видеть, что в случае уравнения для $A_j(x^n,z^m)$ вынуждающие члены в рамках численной схемы могут рассматриваться как дополнительные начальные условия (вводимые при $x=x^1$, $x=x^2,\dots$). Фактически это утверждение представляет собой дискретный аналог принципа Дюамеля. Вклады от всех этих дополнительных начальных условий соединяются в решении неоднородного уравнения для A_j, и, согласно Предложению 5.5.1 мы можем сделать следующий вывод

Предложение 5.5.2. *Численное решение начально-краевой задачи* (5.36), *полученное с помощью численной схемы* (5.40)-(5.46)-(5.42) *является безусловно устойчивым, и следующая оценка выполняется для всех $N=1,2,\dots$:*

$$\|\mathbf{B}^N\|_{\ell^2} \le \|\mathbf{B}^0\|_{\ell^2} + C_1\sum_{n=0}^{N}|W_j^n|^2 + C_2\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}|(A_{j-1,xx})^{n,M}|^2\,,$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от W_j, $A_{j-1,xx}$ и N.

Доказательство этого предложения тривиальным образом вытекает из Предложения 5.5.1.

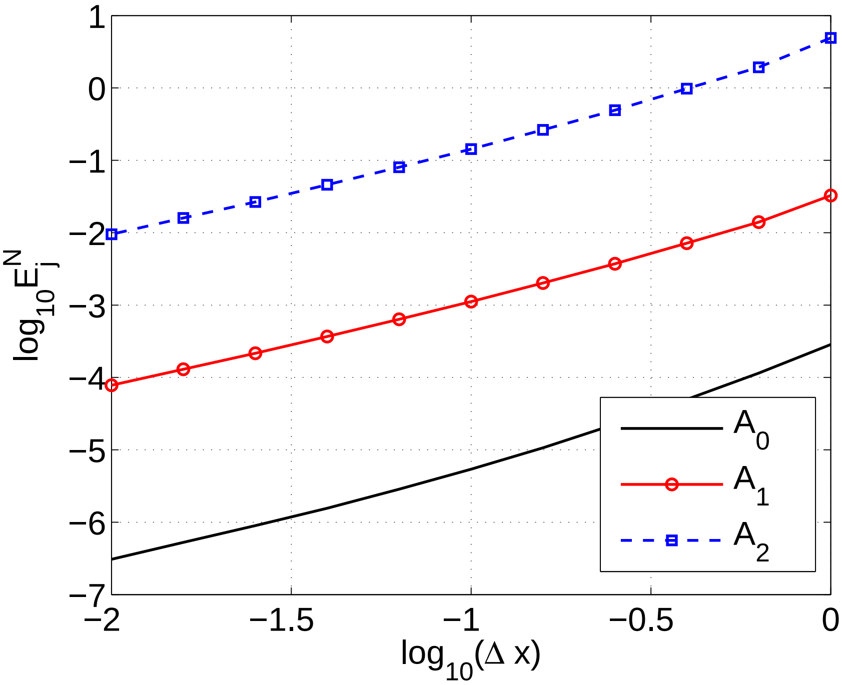


Рис. 5.1. Ошибки E_j^N по норме ℓ^2, рассчитанные для различных шагов сетки Δx для решений $A_j(x,y)$, $j = 0, 1, 2$.

5.6. Примеры расчетов с использованием ГУП

В этом разделе мы проводим некоторые численные эксперименты, чтобы проверить точность расчетов с помощью ИПУ (5.5) и эффективность полученных нами ГУП для этих уравнений. Поскольку характеристики ГУП не зависят от неоднородностей внутри вычислительной области, мы начнем с простейшего случая распространения звука в однородной среде. В этом случае задача имеет аналитическое решение, и точность расчетов с помощью ГУП может быть оценена непосредственным с сравнением с ним. Во втором примере мы имеем дело с более приближенной к реальности задачей о распространении звука в клиновидном прибрежном волноводе в направлении градиента глубины (в вертикальной плоскости), которая неоднократно использовалась нами для тестирования решений, полученных другими методами.

5.6.1. Однородное полупространство

В этом примере решается модельная задача о распространении звука в однородном полупространстве $z \geq 0$, акустические параметры которого имеют значения $c(x,z) = c$ и $\rho(x,z) = 1$. Пусть источник тональных сигналов частоты f расположен в точке $x = 0$, $z = z_s$. Мы вводим искусственную границу $z = L = 2z_s$ и рассчитываем звуковое поле путем численного решения начально-краевой задачи (5.36) для системы ИПУ с помощью конечноразностной схемы (5.40)-(5.46)-(5.42). Для данного примера мы установили следующие значения параметров: $c = 1500$ м/с, $z_s = 100$ м, $f = 100$ Гц.

В этом примере мы будем использовать начальное условие в виде функции Гаусса для A_0 в начально-краевой задаче (5.36), которое имеет вид [73]

$$A_0(0,z) = S(z) = \bar{A}\mathrm{e}^{-\frac{(z-z_s)^2}{\sigma^2}} \tag{5.47}$$

(такое начальное условие позволяет моделировать поле, формируемое точечным источником). Легко видеть, что для этого граничного условия все уравнения в системе (5.20) в однородном полупространстве $z \geq 0$ могут быть легко решены путем использования преобразования Фурье по переменной z (см. [73]). Полученные таким способом решения, например, для A_0^A и A_1^A (верхний индекс A означает, что решение получено аналитически) имеют вид

$$\begin{aligned} A_0^A(x,z) &= U_0(x, z - z_s) - U_0(x, z + z_s)\,, \\ A_1^A(x,z) &= U_1(x, z - z_s) - U_1(x, z + z_s)\,, \end{aligned} \tag{5.48}$$

где $U_0(x,z), U_1(x,z)$ суть решения соответствующих ИПУ в однородной среде (т.е. в области $-\infty \leq z \leq \infty$) для случая, когда источник находится в точке $z = 0$:

$$U_0(x,z) = \bar{A}\sqrt{\frac{\sigma^2\kappa_0}{\sigma^2\kappa_0 + 2ix}}\exp\left(-\frac{\kappa_0 z^2}{\sigma^2\kappa_0 + 2ix}\right)\,,$$

$$U_1(x,z) = ix\frac{6x^2 - 6i\sigma^2\kappa_0 x + 12i\kappa_0 z^2 x - 2\kappa_0^2 z^4 + 6\sigma^2\kappa_0^2 z^2 - \frac{3}{2}\sigma^4\kappa_0^2}{\kappa_0(\sigma^2\kappa_0 + 2ix)^4}U_0(x,z)\,. \tag{5.49}$$

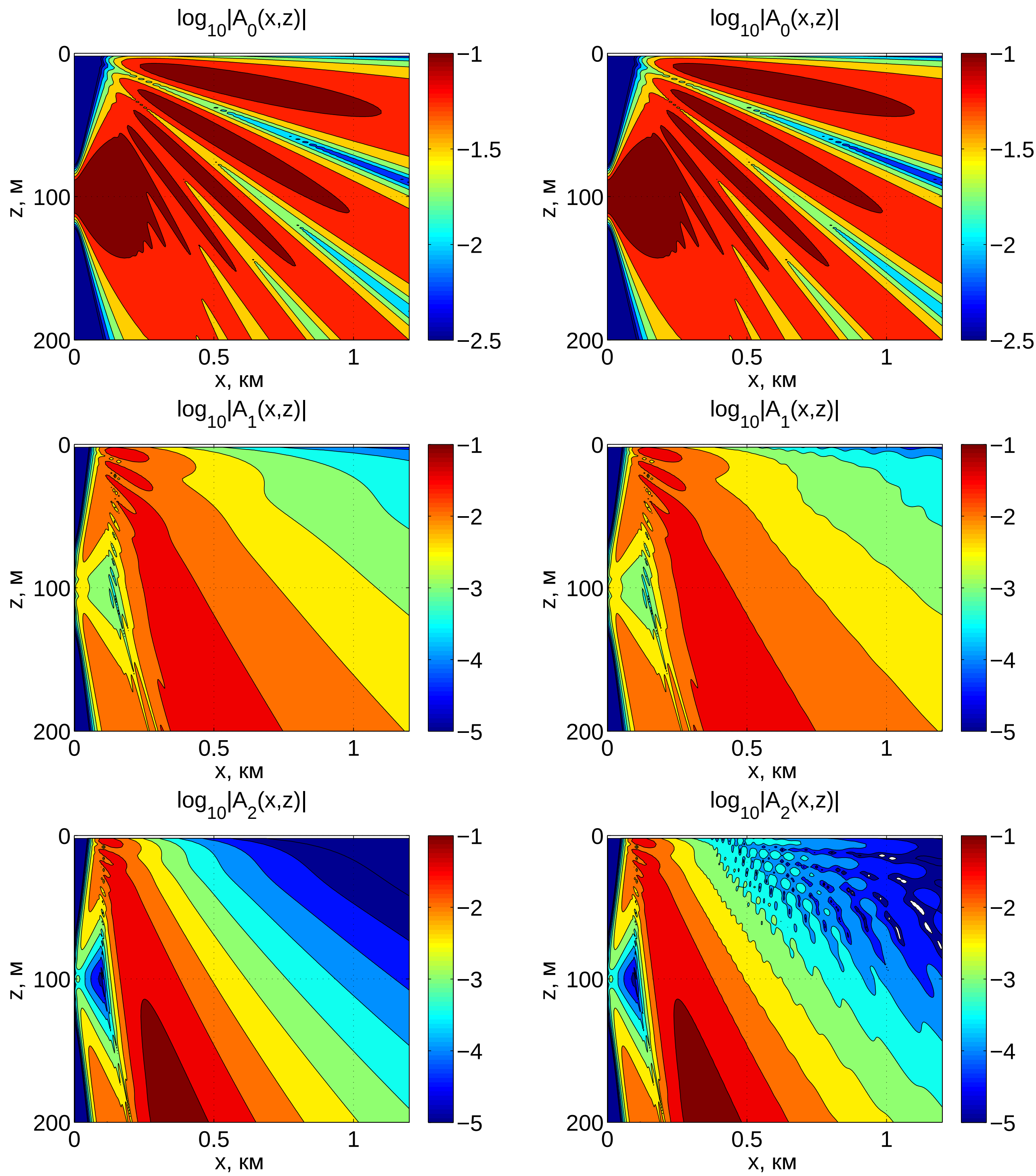


Рис. 5.2. Контурные графики решений ИПУ $\log_{10}|A_j(x,z)|$ (в логарифмических единицах) для $j=0$ (верхний ряд), $j=1$ (средний ряд), $j=2$ (нижний ряд). В правом столбце показаны решения начально-краевой задачи (5.36), вычисленные с помощью конечноразностной схемы, а в левом – рассчитанные аналитически.

Решения уравнений более высоких порядков могут быть получено тем же самым элементарным способом. В книге [73], показано, что для наилучшего приближения поля точечного источника параметры начального условия (5.47) необходимо выбрать следующим способом

$$\bar{A} = \sqrt{\kappa_0}\,, \quad \sigma = \frac{\sqrt{2}}{\kappa_0}\,.$$

Для оценки эффективности ГУП мы будем сравнивать функции $A_0, A_1, \ldots$, рассчитанные путем решения начально-краевой задачи (5.36) методом конечных разностей, с аналитическими решениями $A_0^A, A_1^A, \ldots$ задачи в полупространстве (5.20), которое описывается приведенными выше формулами. При решении задачи с помощью конечноразностной схемы использовались различные пары шагов сетки $\Delta x_q, \Delta z_q$:

$$\Delta x_q = \frac{1}{10^{0.2q}}\Delta x_0\,, \quad \Delta z_q = \frac{1}{10^{0.1q}}\Delta z_0\,,$$

где $\Delta z_0 = 1$ м, $\Delta x_0 = 1$ м. Таким образом, отношение $(\Delta z_q)^2/\Delta x_q = (\Delta z_0)^2/\Delta x_0$ было постоянным (так обычно поступают при тестировании конечноразностых схем для параболических уравнений).

Для оценки точности численного метода мы вычисляли E_j^N – отношение ошибки решения по норме ℓ^2 при $x_{max} = N\Delta x$ к ℓ^2-норме точного решения в точках сетки интервала $[0, L]$, т.е. величину

$$E_j^N = \frac{\|\mathbf{A}_j^N - \mathbf{A}_j^{A,N}\|_{\ell^2}}{\|\mathbf{A}_j^{A,N}\|_{\ell^2}}\,, \tag{5.50}$$

где $\mathbf{A}_j^{A,n} = \left(A_j^A\left(x^n, z^0\right), A_j^A\left(x^n, z^0\right), \ldots, A_j^A\left(x^n, z^0\right)\right)$.

Отметим, что поскольку наша численная схема представляет собой прямое обобщение схемы Баскакова-Попова, то оценка ошибки, полученная в [240], может быть элементарным образом распространена на наш случай. Таким образом мы получаем

$$E_j^N \leq C|\Delta z^{3/2} + \Delta x^{3/2}\Delta z^{-1/2}|\,. \tag{5.51}$$

Если варьировать шаг сетки, сохраняя отношение $\Delta z^2/\Delta x$ постоянным, то мы получим оценку $E_j^N = O(\Delta z^{3/2}) = O(\Delta x^{3/4})$. Наши расчеты показывают, что численные решения A_j сходятся к соответствующим аналитическим со скоростью, которую предсказывает оценка (5.51) (т.е. так, что ошибка почти пропорциональна $\Delta x^{3/4}$). Эту сходимость иллюстрирует Рис. 5.1, где ошибки E_j^N показаны как функции шага сетки Δz_q для $j = 0, 1, 2$. Вычисленные решения A_0, A_1, A_2 представлены на Рис. 5.2 вместе с соответствующими аналитическими решениями в виде контурных графиков интенсивности в логарифмических единицах (это означает, что мы построили на рисунке линии уровня $0, -1, -2, \ldots$ для функции $\log_{10}|A_j(x, y)|$). Из этих графиков видно, что на искусственной границе $z = L$ амплитуда отраженной волны составляет не более 10^{-3} амплитуды падающей волны (если бы на графиках были показаны линии уровня собственно амплитуды, а не ее логарифма, то отраженную волну попросту не было бы видно). Таким образом, полученные нами ГУП эффективно решают задачу искусственного ограничения расчетной области.

В завершение этого подраздела отметим, что уровень точности несколько снижается с увеличением j. Это связано, главным образом, с численным дифференцированием правой части решения (5.5). В работе [43] нам удалось устранить этот рост ошибок путем использования формул Ланцоша для численного дифференцирования с шумоподавлением. В рамках данной диссертации, однако, мы не останавливаемся на этом вопросе.

5.6.2. Распространение звука в клиновидном волноводе

Рассмотрим теперь задачу о распространении звука в клиновидном прибрежном волноводе мелкого моря в направлении убывания глубины моря. Эта задача является стандартным сценарием, используемым для тестирования различных моделей, основанных на методе параболического уравнения (см. обсуждение в монографии [73]). Известно, в этом случае распространение звука по существу является двумерным (происходит в плоскости x, z без проявлений горизонтальной рефракции) и, кроме того, установлено, что при типичных для акустики мелкого моря параметрах волновода обратное рассеяние звука в этом сценарии пренебрежимо мало (таким образом, не наблюдается физических эффектов, препятствующих использованию в этом случае метода параболического уравнения).

Параметры клиновидного волновода в данном примере имеют те же значения, что и в разделе 1.4 первой главы настоящей работы, а его схема показана на Рис. 1.3 (ось x в нашем случае, однако, имеет противоположное показанному на рисунке направление). Глубина моря в точке излучения равна 200 м, а источник располагается на глубине 100 м от поверхности океана. Как и прежде, частоту звука мы считаем равной 25 Гц. Мы будем рассматривать распространение звука вдоль оси x в плоскости x, z в направлении уменьшения глубины (т.е. в направлении береговой линии). Заметим, что угол наклона дна в этом случае равен $2,86^\circ$ что существенно превышает характерные наклоны дна на шельфе, например, Японского и Охотского морей и, таким образом, рассматриваемый пример является в некотором смысле экстремальным вариантом неоднородного геоакустического волновода.

В расчетах мы использовали стартер Томсона [239] в качестве начального условия $S(z)$ в начально-краевой задаче (5.36). Этот стартер имеет очень широкую апертуру и хорошо подходит для инициализации решения широкоугольных ПУ в случае волноводного распространения [73]. В нашем примере искусственной границей расчетной области является прямая $z = L = 240$ м, на которой мы ставим ГУП (5.35) (в данном случае такой выбор обусловлен тем, что функция $S(z)$ имеет локальный минимум при $z = L$).

Для решения задачи мы вводим равномерную сетку с шагами $\Delta z = 0,25$ м и $\Delta x = 5$ м. Решения начально-краевой задачи (5.36) вычислены для $j = 0, 1, 2, 3, 4$, что позволяет нам получить широкоугольную аппроксимацию четвертого порядка (5.6) путем суммирования $A_j(x, y)$ и деления результата на $\sqrt{x}$ (с целью учета цилиндрической расходимости волн).

Результаты расчетов показаны на Рис. 5.3 и Рис. 5.4. По сложившейся традиции точность решения ПУ проверяется путем сравнения уровней акустического поля (в дБ отн. 1 м от источника) с решением, полученным с помощью модовой программы COUPLE на горизонтах $z = 30$ м и $z = 150$ м.[2] Эти сравнения показаны на двух подграфиках Рис. 5.3, которые демонстрируют очень хорошее совпадение результатов, полученных с помощью численного решения ИПУ и результатов расчета с использованием COUPLE. Из контурного графика уровней звукового поля, показанного на Рис. 5.4 в свою очередь хорошо видно, что введенная нами искусственная граница полностью решает проблему свободного прохождения волн из расчетной области во внешнюю среду.

Отметим еще, что стартер Томсона с широкой апертурой является необходимым для обеспечения высокой точности расчетов в ближнем поле (если точность в ближнем поле не имеет значения, то можно использовать и более простое в реализации гауссово начальное условие). Также заметим, что в нашей первой работе, посвященной ИПУ [43] эта задача решалась без использования подходящих ГУП для системы(5.20), что не позволило достичь приемлемой точности решения на горизонте $z = 150$ м (ввиду присутствия волн, отраженных от искусственной границы, на которой ставилось не вполне подходящее условие). Точность решения на глубине $z = 30$ м также существенно улучшена в работе [48] по сравнению с решением из [43], полученным без использования рассмотренных выше ГУП.

Подчеркнем еще раз, что использование ГУП (5.35) позволяет искусственно ограничить расчетную область непосредственно за последней неоднородностью среды, которую необходимо учесть в расчетах. В данном случае такой неоднородностью является граница раздела вода-дно, на которой параметры среды терпят разрыв первого рода. Без использования подходящих ГУП область бы пришлось существенно расширить слоем с повышенным затуханием, который бы позволил подавить отраженные от нижней границы волны. Такое

[2] В программе COUPLE расчеты выполняются с помощью метода нормальных волн с учетом взаимодействия мод и обратного рассеяния. Заметим, что применение COUPLE для сравнения в данном случае – лишь дань традиции, заложенной в работе [104]. Решение COUPLE в этом случае полностью совпадает с решением, полученным с помощью метода изображений, описанного в разделе (1.4) настоящей работы.

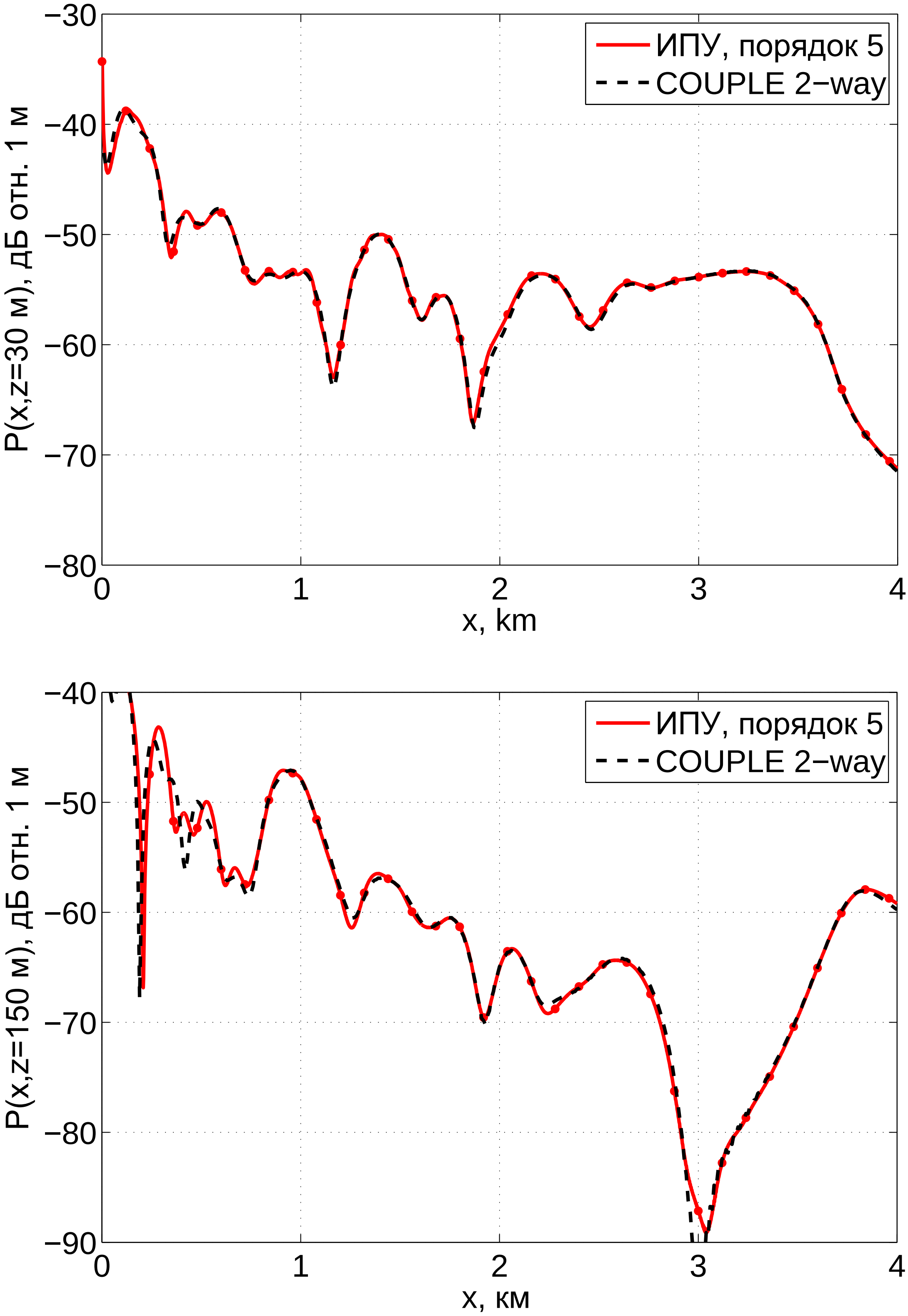


Рис. 5.3. Уровни акустического поля на горизонтах $z = 30$ м (верхний подграфик) и $z = 150$ м (нижний подграфик) как функции расстояния от источника x, вычисленные путем решения ИПУ (5.20) с использованием ГУП (5.35) (сплошная линия) и модовой программы COUPLE (пунктирная линия).

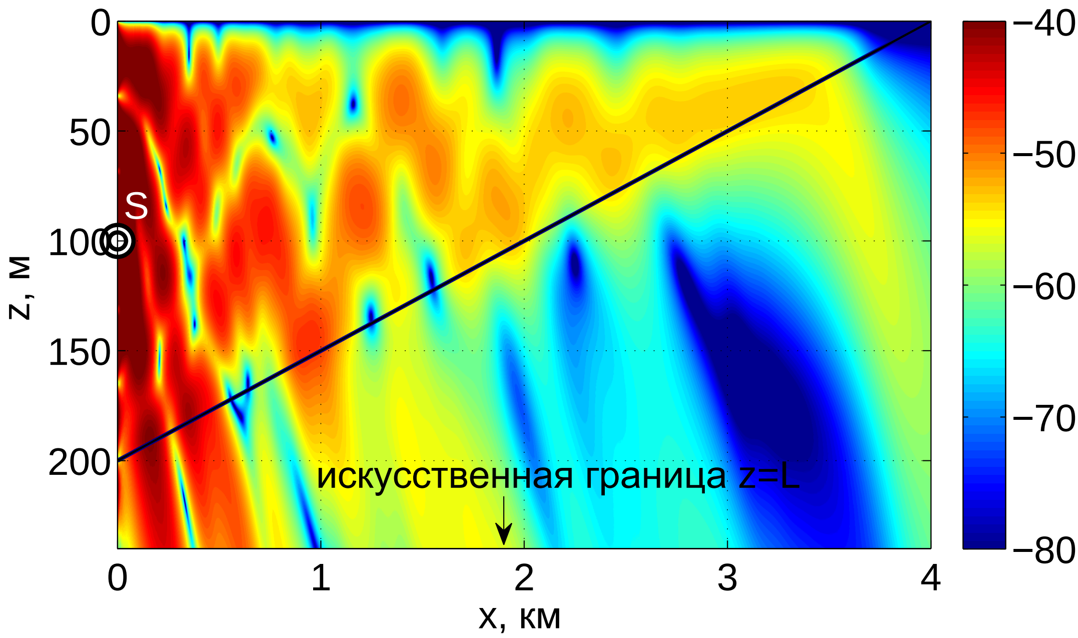


Рис. 5.4. Контурный график уровней акустического поля (в дБ отн. 1 м от источника) в вертикальном сечении клиновидного волновода, полученный путем решения задачи с использованием ИПУ и ГУП (5.35) (широкоугольная параболическая аппроксимация четвертого порядка). Положение источника отмечено буквой S, а батиметрический профиль (рельеф дна) показан сплошной жирной линией.

расширение области, однако, существенно снижает эффективность численной схемы в целом.

5.7. Выводы к пятой главе

В этой главе представлена разработанная нами теория итеративных параболических уравнений. Основополагающей работой для данной теории стала статья [43], где были впервые выведены ИПУ и связанные с ними граничные и интерфейсные условия, которые могут быть использованы при решении задач подводной акустики. Основной вклад в эту публикацию принадлежит Трофимову, однако часть изложенных в ней результатов получена непосредственно автором настоящей диссертации (например, Теорема 5.2.2 и численная схема для решения ИПУ в волноводах с неоднородным дном).

Теория ИПУ получила значительное развитие в работах [48, 49, 65, 66, 70, 71], где вклад автора настоящего диссертационного исследования уже является решающим. Так, например, в работах [48, 65] получены граничные условия прозрачности для ИПУ (с использованием вывода, основанного на преобразовании Лапласа) и, кроме того, сформулированы и доказаны результаты о существовании и единственности решений начально-краевых задач для ИПУ, а также установлены условия корректности таких задач. В этих же работах предложена конечно-разностная численная схема для решения ИПУ, и доказана ее безусловная устойчивость. Дальнейшее развитие эта тематика получила в наших работах, выполненных совместно с Тыщенко, где предложен ETD2-метод[3] для решения системы ИПУ.

В статье [66] было предложено обобщение ИПУ на трехмерный случай, а работах [49, 70] была развита теория широкоугольных параболических аппроксимаций для нелинейного уравнения Гельмгольца.[4]

Еще раз отметим, что формализм теории ИПУ может быть с равным успехом использован как для двумерных задач подводной акустики (в координатах x, z, как это показано в разделе 5.6.2), так и для аппроксимации решения уравнения горизонтальной рефракции, подобно тому, как это делается в разделе 4.5 с помощью стандартных широкоугольных МПУ. ИПУ для трехмерного уравнения Гельмгольца является альтернативой обычным трехмерным ПУ [27, 28]. Эта альтернатива представляется весьма многообещающей в смысле вычислительной эффективности ввиду отсутствия необходимости учитывать перекрестные члены, существенно замедляющие расчеты с применением традиционных трехмерных ПУ. Для трехмерного случая, однако еще предстоит разработать граничные условия прозрачности, аналогичные тем, что были выведены Фещенко и Поповым [246, 247] для двумерного (по пространству) уравнения Шредин-

[3] ETD – Exponential Time Differencing, спектральный метод формального интегрирования эволюционных уравнений, основанный на приближении операторных экспонент.

[4] В этих работах рассматривалось нелинейное уравнение Гельмгольца для распространения электромагнитных волн в среде Керра [245], однако этот формализм может быть перенесен без каких-либо изменений на задачи нелинейной акустики.

гера (см. также работу Шэдле [248]).

Результаты пятой главы опубликованы в работах [43, 46, 48, 49].

На результаты данной главы опирается следующее положение, выносимое на защиту

- Предложен и теоретически обоснован новый метод расчета акустических полей в волноводах мелкого моря, основанный на численном решении итеративных параболических уравнений с граничными условиями прозрачности. Доказана корректность начально-краевых задач для итеративных параболических уравнений, а также безусловная устойчивость разработанной численной схемы для их решения.

Глава 6

Оценка влияния горизонтальной рефракции на точность решения задач акустической дальнометрии

Заключительная глава настоящей диссертации посвящена вопросу, имеющему практическую природу. Эффект горизонтальной рефракции, различные проявления и способы моделирования которого подробно рассмотрены в предшествующих главах, фактически состоит в отклонении горизонтальных лучей (связанных с отдельными вертикальными модами) от прямолинейного распространения, наблюдаемого в вертикально-стратифицированной и однородной в горизонтальных направлениях среде. Таким образом, различные модальные компоненты импульсных акустических сигналов проходят между точкой излучения и точкой приема расстояния, в разной степени превышающие длину геодезической (т.е. кратчайшей линии на поверхности Земли, соединяющей эти точки). Этот факт имеет большое значение для решения задач акустической дальнометрии и акустического позиционирования подводных объектов [22, 23, 249–252]. Поскольку вторая задача фактически сводится к первой, с этого момента мы будем говорить только о влиянии горизонтальной рефракции на точность определения дальности до источника звука по данным акустических измерений.

В описанном здесь исследовании мы существенно упростим общую постановку вопроса о влиянии горизонтальной рефракции на точность решения задач дальнометрии и ограничимся лишь случаем мелкого моря и вопросом об установлении дистанции до источника импульсных сигналов, находящегося на значительном удалении от точки приема (в рассмотренном здесь эксперименте это расстояние составляет более 100 км). Основным фактором, вызывающим горизонтальную рефракцию звука в мелком море, являются неоднородности морского дна. Именно эффекты такого рода составляют основное содержание нашей диссертации, поэтому приведенные ниже результаты, с нашей точки зрения, удачным образом дополняют предыдущие главы.

Отметим, что вопрос о влиянии горизонтальной рефракции на решение задачи определения дальности и направления на источник звука, по-видимому, впервые поставил Баер [21]. В его работе, однако, рассматривается распространение звука через синоптический вихрь в глубоком океане, наличие которого, как показал автор, приводит к ошибке определения направления на источник порядка $0,5^\circ$. Решение задач дальнометрии в глубоком океане, как правило, усложняется тем, что возникает необходимость учета горизонта, на котором осуществляется прием сигнала. Действительно, по мере удаления от оси подводного звукового канала (ПЗК) в принимаемом импульсном сигнале исчезают компоненты, соответствующие модам малых номеров (т.к. они локализованы вблизи оси ПЗК). Вообще говоря, это должно означать, что при решении задач дальнометрии для точек приема на различных горизонтах следует брать различные значения эффективных скоростей распространения сигнала.[1] В работе [56], однако, показано (путем количественных оценок и рассуждений качественного характера), что эта величина является практически постоянной для достаточно большого интервала горизонтов приема, содержащего в т.ч. и ось ПЗК.

В мелком море ситуация заметно упрощается, так как, во-первых, нет смысла говорить о зависимости эффективной скорости от горизонта, на котором находится приемник, а во-вторых, модовая структура импульсных сигналов

[1] В рассматриваемой нами постановке задач дальнометрии мы считаем, что, благодаря синхронизации часов на передающем и принимающем устройствах, нам известно общее время распространения сигнала между точками излучения и приема. Для установления дальности до источника звука, таким образом, остается умножить это время на некоторое значение эффективной скорости распространения. В работе [56] показано, что в глубоком океане в качестве первого приближения этой величины можно взять скорость звука на оси ПЗК.

является существенно более простой, чем в глубоком океане. Последнее означает, что в мелком море обычно имеется меньше волноводных (водных) мод, и, кроме того, на больших расстояниях от источника (благодаря увеличению ответственных за затухание мнимых частей горизонтального волнового числа с ростом номера моды) следует ожидать, что большая часть энергии принимаемого сигнала приходится на первую модальную компоненту. Основной вопрос, которому посвящена работа [59], ставшая основой данной главы, состоит в том, в какой мере отсутствие учета горизонтальной рефракции способно снизить точность решения задач акустической дальнометрии.

В данной главе будет рассмотрен натурный эксперимент, в ходе которого исследовалось распространение звука на трассе протяженностью около 136 км, ориентированной вдоль кромки континентального шельфа Японского моря. В ходе эксперимента были получены импульсные характеристики данного протяженного геоакустического волновода. В ходе последующей теоретической работы нам удалось получить весьма точные оценки основных параметров этой импульсной характеристики, для чего, однако, потребовалось привлечь несколько различных математических моделей. Основной целью постановки описанного эксперимента была разработка и апробация систем акустической дальнометрии [22, 253]. Данный эксперимент стал продолжением многолетнего цикла работ [22, 56, 126, 253–255], в которых исследовались оценки эффективных скоростей распространения импульсных широкополосных сигналов и их применение к решению задач акустической дальнометрии. В предшествующих работах, однако, исследования выполнялись на акустических трассах, ориентированных вдоль наклона дна и перпендикулярно кромке шельфа (в т.ч. при распространении звука с шельфа в глубокий океан).

Многочисленные эксперименты по апробации описанной в указанных работах методики решения задач акустической дальнометрии, выполненные группой Моргунова в ТОИ ДВО РАН за последние 20 лет, показывают, что данная методика обеспечивает относительную ошибку определения расстояния до источника звука в пределах 0,04% (см., например, [125], а также другие публикации тех же авторов) для трасс протяженностью несколько сотен километров. Данная оценка характеризует методическую погрешность и вычисляется через невязку значений расстояния, определенного акустическими средствами, и расстояния, рассчитанного по данным GPS и принимаемого за истинное. Заметим, что, вообще говоря, достижение данного уровня точности в той или иной серии конкретных экспериментов не гарантирует, что он будет обеспечиваться во всех случаях. Тем не менее, его можно использовать в качестве отправной точки для анализа роли различных факторов в последующих экспериментах.

В настоящей главе показано, что для трассы всего протяженностью 136 км (относительно короткой в масштабах акустических навигационных систем большой дальности) в случае распространения вдоль кромки шельфа данный уровень точности не может быть обеспечен без учета горизонтальной рефракции звука на наклонном дне. В то же время, учет данного эффекта обеспечивает необходимую для достижения такой точности поправку. С учетом того, что неопределенность в значениях различных параметров среды в рассматриваемом эксперименте в целом не превышает уровня неопределенности, с которым имели дело авторы работ [125, 126, 255], можно сделать вывод, что горизонтальная рефракция как дополнительный фактор, влияющий на точность оценки дальности, и его роль в данном случае идентифицированы нами правильно.

Отметим, что автор настоящей работы не участвовал в постановке описанного ниже эксперимента и первичной обработке полученных в нем данных. Однако их интерпретация и, в частности, установление связи между результатами эксперимента и эффектом горизонтальной рефракции, составившие основу содержания работы [59], выполнены именно автором диссертации.

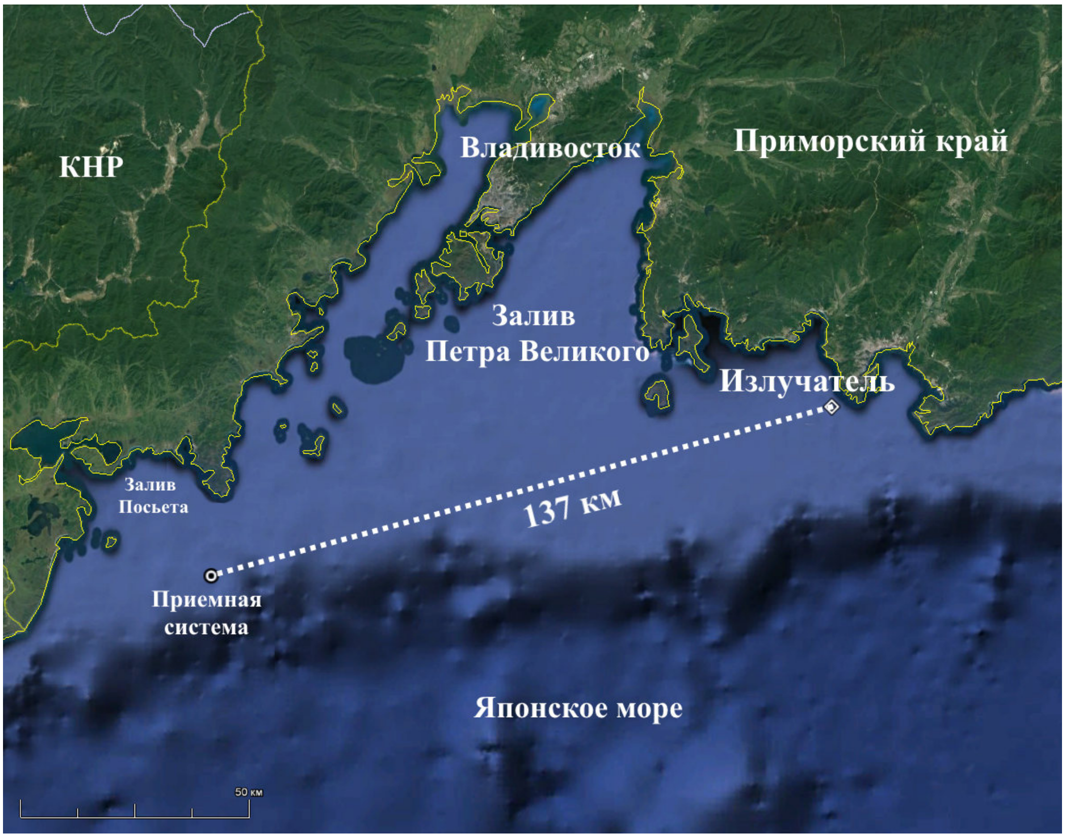


Рис. 6.1. Общая схема эксперимента.

6.1. Описание эксперимента

Экспериментальные исследования проводились в осенний период, характеризующийся наличием выраженного сезонного термоклина в водном слое на глубинах от 50 до 100 метров. Акустическая трасса была ориентирована приблизительно вдоль кромки шельфа Японского моря, причем глубина в точке излучения (около 35 м) была несколько меньше, чем в среднем по трассе (около 80 м). Мобильный широкополосный пьезокерамический излучатель при помощи крановой установки свешивался с борта судна, стоявшего на якоре поблизости от мыса Лихачева, и опускался на глубину 30 метров (при этом он оказывался в 5 метрах от морского дна). Раз в три минуты излучался широкополосный фазоманипулированный сигнал с несущей частотой 400 Гц на основе М-последовательности длиной 1023 символа. Более 90% энергии излучаемого сигнала приходилось на полосу частот от 300 до 500 Герц.

В конечной точке трассы, в двадцати километрах от мыса Шульца, с яхты

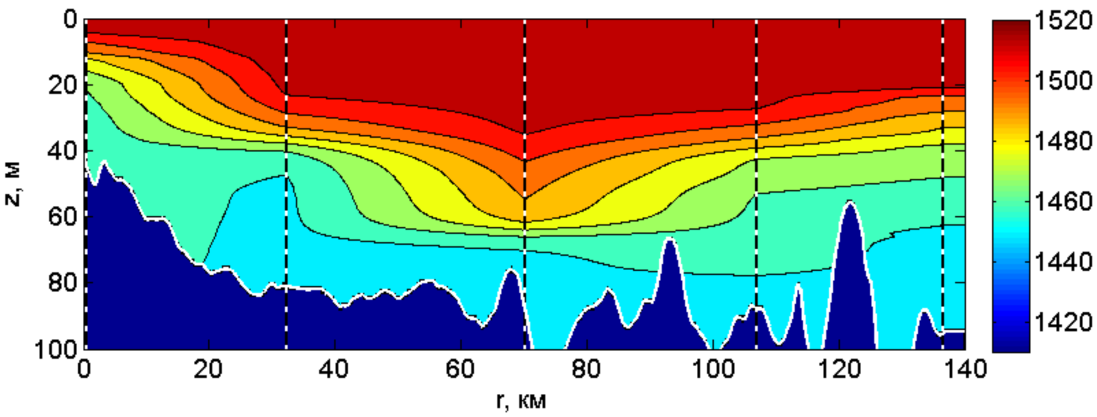


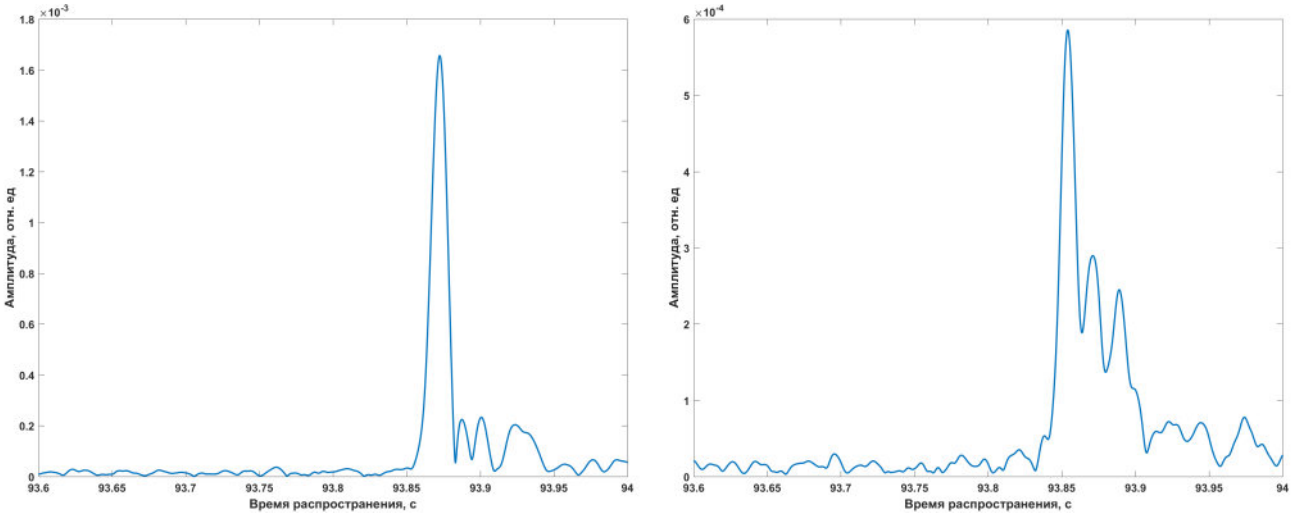
Рис. 6.2. Рельеф дна вдоль акустической трассы (сплошная линия), а также контурный график распределения скорости звука в водном слое, полученный путем интерполяции данных натурных измерений, выполненных CTD-зондом в точках трассы, отмеченных вертикальными пунктирными линиями.

«Светлана» производилась постановка свободно дрейфующего радиогидроакустического буя (РГБ), обеспечивавшего приём излучённых сигналов. С целью фиксации положения относительно источника в момент приёма сигнальной посылки РГБ был оснащён GPS-приёмником. Данные GPS и акустическая информация в реальном времени передавалась по радиоканалу в пункт обработки и записи, расположенный на борту яхты «Светлана». Временной интервал между моментами излучения и приёма сигналов фиксировался с помощью системы единого времени [126, 253].

На Рис. 6.1 представлена общая схема проведения эксперимента и отмечены местоположения точек излучения и приема сигналов. На Рис. 6.2 показан рельеф дна на экспериментальной трассе (по данным батиметрической съемки с помощью эхолота), а также распределение скорости звука в водном слое, полученное по данным точечных измерений, выполненных с помощью CTD-зонда в пяти точках трассы, разделяющих ее на четыре сегмента почти одинаковой длины (вертикальные пунктирные линии на Рис. 6.2).

6.2. Импульсные характеристики волновода

Гидрофон РГБ был погружен на глубину 80 метров и принимал сигналы, распространяющиеся вблизи дна. В ходе обработки вычислялась взаимнокорреляционная функция (ВКФ) сигналов, зарегистрированных приемником, и излученной модулированной М-последовательности. Получаемая в результате функция времени представляет собой экспериментальную оценку импульсной характеристики волновода (ИХВ) (при дальнейшем анализе и построении графиков мы используем модуль этой функции). В течение всего эксперимента в наблюда-



(*а*) с одним максимальным приходом (*б*) распределение энергии сигнала по трем приходам

Рис. 6.3. Примеры различных типов импульсных откликов, зафиксированных в эксперименте.

емых ИХВ имеется стабильный максимальный первый приход (см. Рис. 6.3(а)), и лишь в редких случаях акустическая энергия принимаемого сигнала распределяется по группе из трёх приходов, максимумы которых разделены временными интервалами порядка 10 миллисекунд (Рис. 6.3(б)). По этой причине в качестве экспериментальной оценки времени распространения i-ой сигнальной посылки принималась величина τ_i^{exp}, вычисляемая как разность времени излучения и времени регистрации максимального пика рассчитанной ИХВ. Заметим, что точность оценки времени регистрации максимального прихода в рамках данной методики определяется полушириной пика автокорреляционной функции излучаемой М-последовательности. В данном случае эта величина составляет 5 миллисекунд и, таким образом, относительная погрешность измерения τ_i^{exp} в эксперименте равна $0,005\%$ для каждой посылки.

Наблюдаемая в эксперименте структура ИХВ с выраженным единственным максимумом из общих соображений может быть объяснена тем, что на таком удалении от источника звука волновод подавляет все модальные компоненты сигнала, кроме той, что соответствует первой моде, что обусловлено быстрым ростом модальных коэффициентов затухания [73, 75] с номером моды. Данное объяснение будет дополнительно верифицировано в следующем разделе путем моделирования тональной компоненты сигнала на центральной частоте 400 Гц с последующим расчетом модовых амплитуд.

Используя данные GPS о положении приёмника и излучателя, а также рассчитанные времена распространения сигналов, можно определить эффективную скорость звука как

$$V_{eff}(i) = R^i_{GPS}/\tau_i^{exp} \,,$$

где R^i_{GPS} — расстояния по данным GPS между источником и приёмником в момент регистрации i-ой посылки. Результаты данных расчётов представлены на Рис.6.4, из которого видно, что значение V_{eff} в течение двух часов эксперимента варьируется в очень узком диапазоне значений 1455,2—1455,7 м/с. Среднее значение этой величины составляет 1455,4 м/с, а среднеквадратичное отклонение – около 0,1 м/с. Таким образом, относительная погрешность определения эффективной скорости распространения по совокупности всех данных рассматриваемого эксперимента не превышает 0,01%. Заметим, что эта оценка погрешности уже учитывает временну́ю изменчивость среды, в которой распространяется звук (на протяжении двух часов, в течение которых выполнялись прием и излучение сигналов) и потому заметно превышает инструментальную погрешность измерения τ_i^{exp} для отдельных посылок. Таким образом, вклад нестационарности параметров волновода в общую погрешность оценки расстояния от излучателя до приемника существенно ниже верхнего уровня относительной ошибки, обеспечиваемой рассматриваемой методикой акустической дальнометрии.

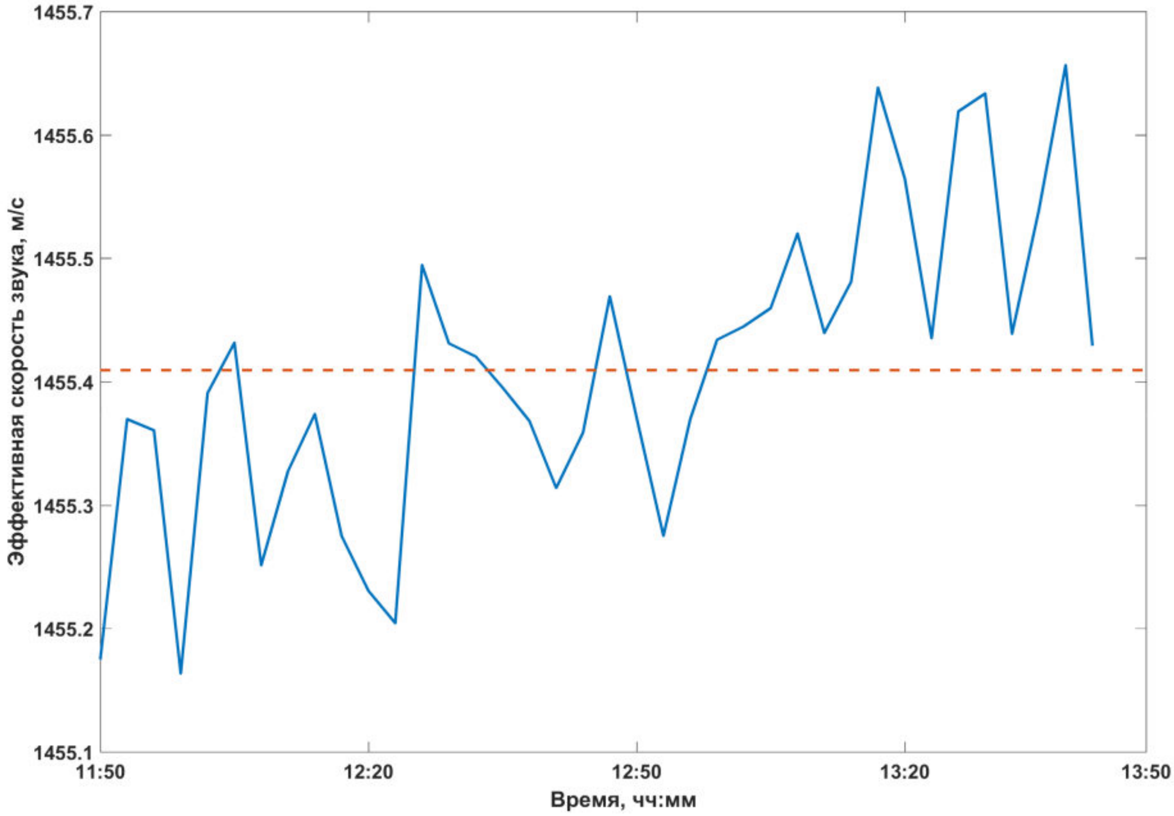


Рис. 6.4. Рассчитанные значения эффективной скорости для каждого измерения (сплошная линия) и среднее значение эффективной скорости на двухчасовом фрагменте (пунктирная линия).

Несмотря на дрейф РГБ и флуктуации параметров волновода, неизбежно проявляющиеся за такой промежуток времени, оцениваемая в эксперименте эффективная скорость распространения сигналов вдоль рассматриваемой трассы является исключительно устойчивой величиной.

6.3. Изменение модовой структуры поля вдоль трассы

Распространение импульсного звукового сигнала в мелком море обычно сопровождается волноводной дисперсией [75]. При этом он разделяется на отдельные модальные импульсы (компоненты), которые распространяются с групповыми скоростями мод соответствующих номеров на характерных для данного сигнала частотах звука [73, 75]. Если глубина моря существенно превышает характерные для сигнала длины акустических волн, то межмодовая дисперсия значительно более выражена, чем внутримодовая (именно эта ситуация имеет место в нашем случае, см. ниже).

С каждой модой на каждой частоте в спектре сигнала связан некоторый (модальный) коэффициент затухания [73], зависящий от параметров волновода в данной точке трассы. Известно, что этот коэффициент быстро растет с номером моды [75]. По этой причине при распространении сигналов в мелком море на дальние расстояния следует ожидать, что в удаленных от излучателя точках трассы над уровнем шума будут выделяться лишь импульсные компоненты, соответствующие модам малых номеров.

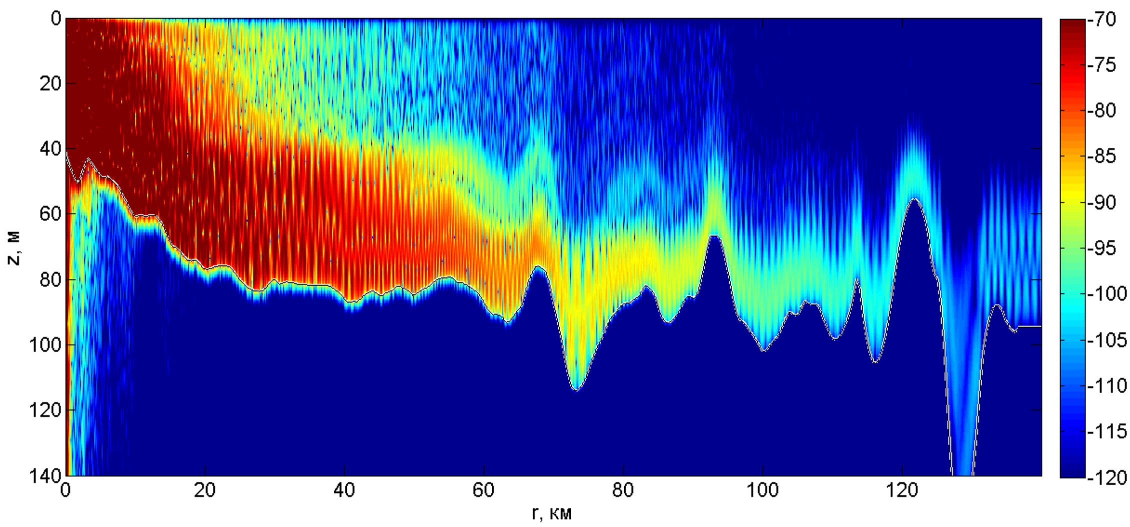


Рис. 6.5. Звуковое поле (в дБ отн. 1 м), рассчитанное для экспериментальной трассы на Рис. 6.2 с помощью метода широкоугольного параболического уравнения для частоты $f_0 =$ 400 Гц. Для дистанций более 40 км поле имеет характерную 1-2 модовую структуру.

Для иллюстрации этого утверждения мы провели расчет тональной компоненты звукового поля для центральной частоты импульсного сигнала $f_0 =$ 400 Гц с помощью широкоугольного параболического уравнения модели RAM [73, 256]. В расчетах были использованы полученные в эксперименте профили скорости звука и данные о батиметрии вдоль акустической трассы, причем в промежуточных точках мы производили линейную интерполяцию по данным

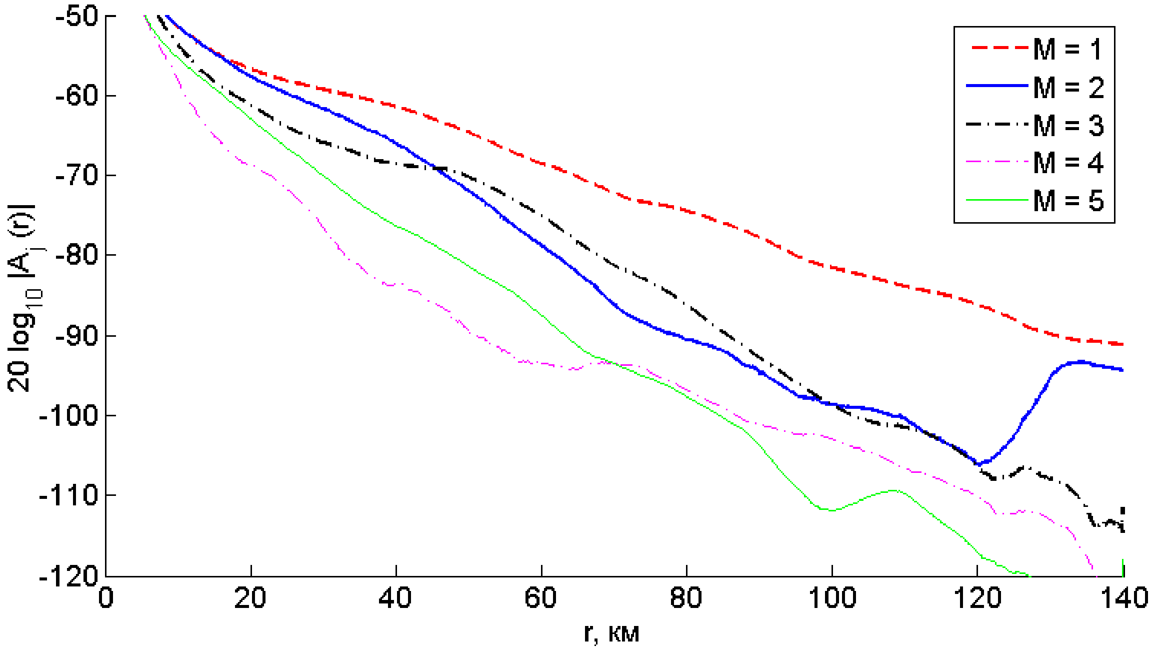


Рис. 6.6. Модальные амплитуды для разложения звукового поля, представленного на Рис. 6.5, для первых десяти мод (частота $f_0 = 400$ Гц). Видно, что уже с середины трассы интенсивность первой модовой компоненты сигнала превышает интенсивность всех остальных на 10 дБ и более.

двух ближайших к точке гидрологических станций (см. Рис. 6.2). Вдоль всей трассы дно предполагалось однородной средой (бесконечной глубины) с акустическими параметрами $c_b = 1700$ м/с (скорость звука), $\rho_b = 1,7$ г/см^3 (плотность), $\beta_b = 0,25$ дБ/длину волны. Отметим, что хотя имеющиеся в нашем распоряжении данные о структуре дна в районе проведения эксперимента не отличаются высокой детализацией, варьирование указанных параметров[2] практически не сказывается на качественных и количественных результатах, полученных в этом и следующих разделах работы (ввиду того, что мы имеем дело, главным образом, с модами малых номеров и частотами, для которых влияние параметров дна при данных глубинах весьма незначительно). Результаты расчета поля $\hat{P} = \hat{P}(f, r, z)$ (где r – удаление от источника, z – глубина, f -–частота

[2] Мы выполняли расчеты, варьируя параметры дна в следующих интервалах значений: c_b: 1600–1800 м/с, ρ_b: 1,5–2 г/см^3, β_b: 0,05–0,25 дБ/длину волны. Моделирование показало, что во всех случаях начиная с расстояния 40-50 км от источника основная часть энергии акустического поля переносится первой модой.

звука) представлены на Рис. 6.5 в виде контурного графика, на котором для дистанций $r > 60$ км хорошо прослеживается одно- или двухмодовая интерференционная структура. Для количественной оценки вклада различных модальных компонент в формирование звукового поля данной тональной компоненты на различных удалениях от источника было выполнено разложение вычисленного звукового поля $\hat{P} = \hat{P}(f, r, z)$ по акустическим модам [73], рассчитанным для различных поперечных сечений рассматриваемой трассы с помощью разработанной нами программы ac_modes. Поскольку модовые функции образуют ортонормированный базис, звуковое поле $\hat{P}(f, r, z)$ в любом поперечном сечении волновода (т.е. при некотором заданном r) допускает разложение

$$\hat{P}(f, r, z) = \sum A_j(r)\phi_j(r, z) \tag{6.1}$$

по собственным функциям $\phi_j(r, z)$ акустической спектральной задачи (3.2) (как и прежде, мы будем обозначать соответствующие собственные значения $k_j^2 = k_j^2(r)$). Используя ортогональность модовых функций (соотношение (3.4)), амплитуды в разложении (6.1) можно рассчитать по формуле

$$A_j(r) = (P, \phi_j)_\rho = \int\limits_0^H \frac{\hat{P}(f, r, z)\phi_j(r, z)}{\rho(z)} dz \tag{6.2}$$

Результаты расчета амплитуд первых пяти мод по формуле (6.2) для звукового поля, представленного на Рис. 6.5, показаны на Рис.6.6 (на графиках амплитуды представлены в логарифмических единицах, подобных децибелам). Рис. 6.6 показывает, что на расстояниях более 40 км от источника в интерференционной структуре поля доминирует первая мода. Превышение над уровнем второй моды достигает 10 дБ на удалении 60 км и 20 дБ на удалении 120 км. Вклад третьей и более высоких мод исчезающе мал. Интересно отметить, что на отрезке трассы от 120 до 130 км от источника некоторая часть энергии первой моды перекачивается во вторую. По-видимому, это связано с сильным взаимодействием этих мод [73, 75], обусловленным резким убыванием глубины в этой

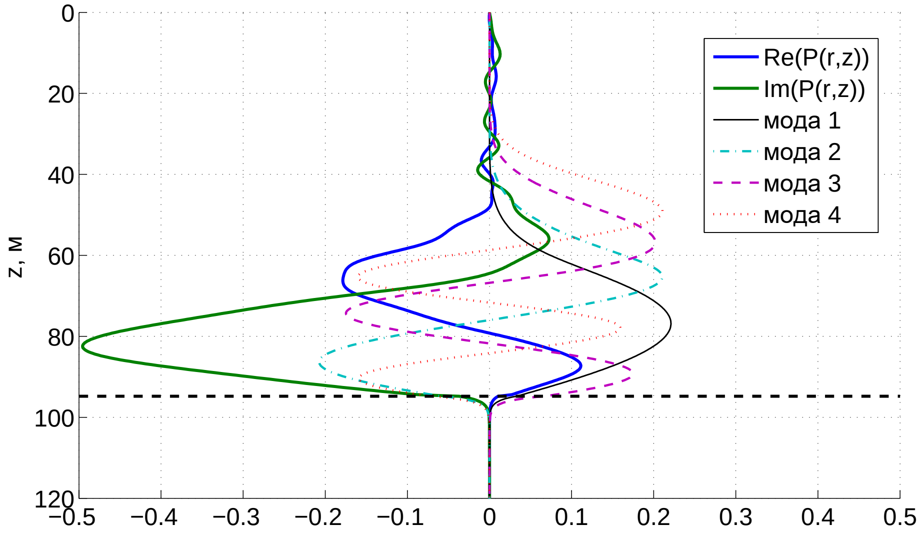


Рис. 6.7. Зависимость вещественной и мнимой компонент акустического поля $P(f, r, z)$ от глубины z при $r = 136$км (в точке приема), а также собственные функции первых четырех мод. Нормировка поля выбрана таким образом, чтобы его вертикальный разрез было удобно соотносить с графиками модовых функций.

части трассы. При дальнейшем распространении, в связи с наличием потерь, уровень второй модальной компоненты вновь станет пренебрежимо мал по сравнению с уровнем первой.

Дополнительно на Рис. 6.7 показан вертиальный разрез вещественной и мнимой компонент акустического поля в сечении волновода, содержащем приемник, а также собственные функции вертикальных мод, рассчитанные для этого сечения (разумеется, компоненты поля домножены на константу таким образом, чтобы их было удобно соотносить с графиками модовых функций). Видно, что на этом участке трассы звуковое поле представляет собой результат интерференции первой и второй мод (причем вклад первой моды является более значительным).

6.4. Расчет групповых скоростей мод и основанная на них оценка дальности

В данном разделе мы коротко обсудим способ решения задачи акустической дальнометрии в рамках двумерной модели распространения звука. Мы будем рассматривать случай протяженной акустической трассы в мелком море (будем считать, что расстояние между источником и приемником звука составляет десятки или сотни километров). Будем предполагать, что источник и приемник работают в системе единого времени, и что излучаемый сигнал содержит информацию о времени излучения. В этом случае задача определения дальности может быть решена путем умножения времени прихода сигнала (длины временного интервала между моментами излучения и приема) на значение скорости распространения. Некоторая сложность состоит в том, что при распространении сигнала в мелком море наблюдается его дисперсия, т.е. увеличение длительности, связанное с тем, что различные модальные компоненты распространяются с разной скоростью (более того, эта скорость зависит также от частоты звука, что приводит к дополнительной дисперсии для широкополосных сигналов). Ситуация упрощается благодаря тому, что модальные коэффициенты затухания в мелком море быстро возрастают с увеличением номера моды. По этой причине на значительном удалении от источника максимальный приход, как правило, соответствует первой моде на центральной частоте в спектре сигнала (разумеется, при условии, что эта мода эффективно возбуждается источником). Таким образом, при решении задачи акустической дальнометрии в рамках двумерной модели распространения звука в мелком море достаточно получить оценку среднего по трассе значения групповой скорости первой моды. В этом разделе мы опишем способ получения такой оценки в идеализированном случае наличия полной информации о вариациях поля скорости звука и рельефа дна вдоль акустической трассы.

Напомним, что для j-ой модальной компоненты звукового поля $A_j(r)\phi_j(r,z)$

(в разложении (6.1)) распространение акустической энергии в горизонтальном направлении в данной точке трассы r происходит с групповой скоростью данной моды в данном поперечном сечении, которая может быть вычислена по формуле [73, 75]

$$v_j^g(f) = d\omega/dk_j \,. \tag{6.3}$$

Если известны модовые функции $\phi_j(r,z)$ и волновые числа $k_j = k_j(r)$, то групповую скорость $v_j^g(r)$ в данном сечении волновода можно рассчитать, используя соотношение [73]

$$\frac{1}{v_j^g(r)} = \frac{\omega}{k_j}\int\limits_0^H \frac{(\phi_j(z))^2}{\rho(z)c^2(z)}dz \,. \tag{6.4}$$

Дистанция от источника до приемника вдоль геодезической R_{GPS} и время распространения j-ой модальной компоненты сигнала вдоль трассы t_j (в рамках двумерной теории распространения звука) связаны следующим интегральным соотношением

$$t_j = \int\limits_0^{R_{GPS}} \frac{dr}{v_j^g(r)} \,. \tag{6.5}$$

Формула (6.5) является точной, если пренебречь горизонтальной рефракцией звука в океане. Тем не менее, она неудобна для практических вычислений, в т.ч., например, для решения задач акустической дальнометрии, т.к. величина R_{GPS}, которую в этом случае требуется оценить, находится в верхнем пределе интеграла. Поэтому мы вводим величину

$$v_{eff}(j,f) = \frac{R_{GPS}}{t_j} \,, \tag{6.6}$$

которую будем называть эффективной скоростью распространения j-ой модальной компоненты вдоль данной трассы. Очевидно, что задача акустической дальнометрии сводится к оценке величины $v_{eff}(j,f)$.

Если трасса состоит из n сегментов, каждый из которых составляет часть ε_i от ее длины (так что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n = 1$), причем на i-ом сегменте эффективная скорость равна v_{eff}^i, то эффективная скорость на всей трассе может быть найдена по формуле:

$$v_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{v_{eff}^i}} \,. \tag{6.7}$$

Предположим теперь, что в начальной $r = r_i^{(1)}$ и конечной точке $r = r_i^{(2)}$ некоторого сегмента трассы известны профили скорости звука в воде и найдены групповые скорости j-ой моды $v_j^g(r_i^{(1)})$ и $v_j^g(r_i^{(2)})$ соответственно. Предполагая, что изменение групповой скорости данной моды внутри сегмента описывается линейной функцией, вычислим интеграл (6.5) в пределах от $r_i^{(1)}$ до $r_i^{(2)}$. Тогда получим следующее значение эффективной скорости (для j-ой моды) на данном интервале:

$$v_{eff}^i(j, f) = \frac{v_j^g(r_i^{(2)}) - v_j^g(r_i^{(1)})}{\ln\left(\frac{v_j^g(r_i^{(2)})}{v_j^g(r_i^{(1)})}\right)} \,. \tag{6.8}$$

Подчеркнем еще раз, что эффективная скорость зависит от модальной компоненты сигнала (номера моды j), а также от частоты звука f. Последняя зависимость, однако, может быть весьма слабой, если толщина водного слоя намного больше длины волны.

Комбинируя формулы (6.7) и (6.8), легко вычислить эффективную скорость звука для протяженной трассы (такой, как показана на Рис. 6.2), на которой имеется несколько гидрологических станций (включая начальную и конечную точки), разбивающих ее на сегменты.

Из общих соображений, подтвержденных результатами расчетов, представленными на Рис.6.5 и Рис. 6.6, при дальнем распространении в мелком море следует ожидать, что в точке приема будет фиксироваться только модальный импульс, соответствующий $j = 1$ (во всяком случае, его интенсивность будет существенно выше, чем у прочих модальных компонент сигнала). В Таблице 6.1 представлены результаты расчета эффективных скоростей для частот $f = 300$, 400, 500 Гц и номеров мод $j = 1, 2, 3$ по формулам (6.7) и (6.8), а также эффективная скорость, рассчитанная по данным натурного эксперимента. Из Таблицы 6.1 видно, что групповые скорости каждой моды в отдельности слабо зависят от частоты (в гораздо большей степени они зависят от номера моды). Также видно, что именно групповые скорости первой моды в наибольшей степени соответствуют эффективной скорости распространения сигнала в эксперименте.

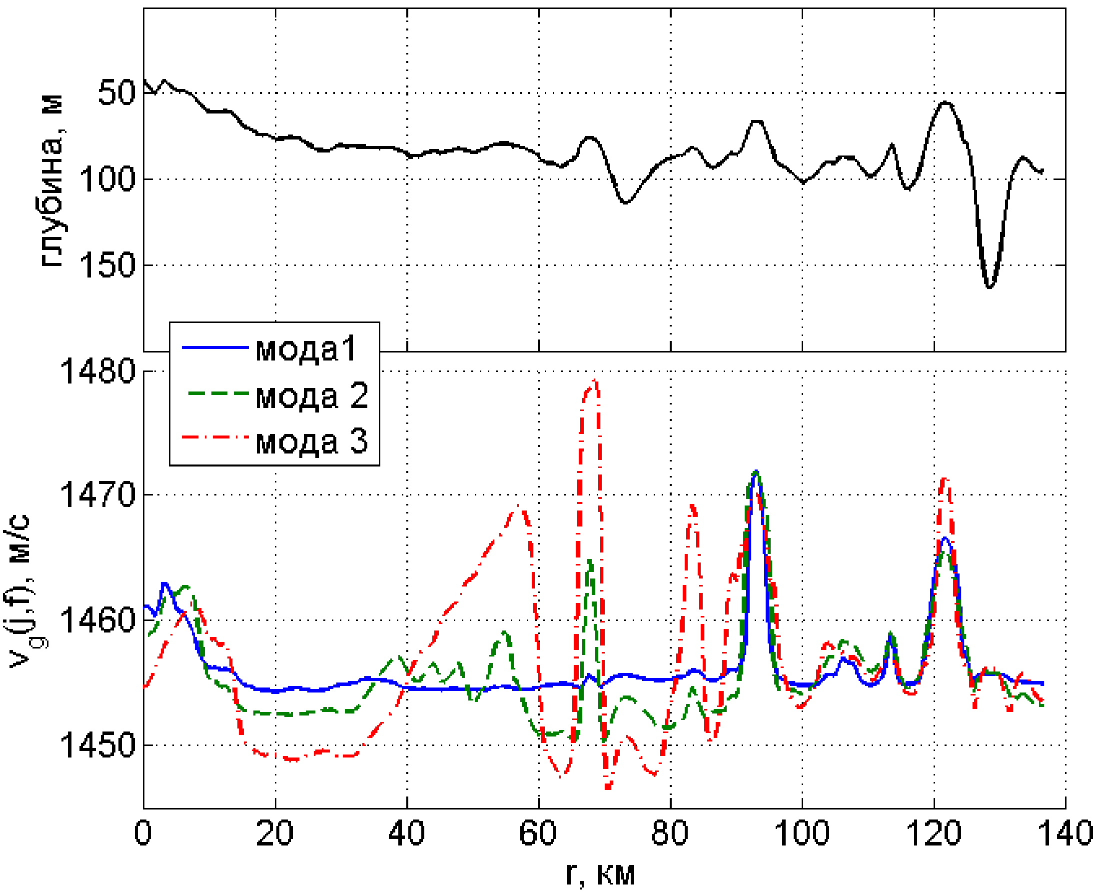


Рис. 6.8. Значения групповых скоростей $v_j^g(r)$ на различных участках трассы для мод с номерами $j = 1, 2, 3$ на частоте $f_0 = 400$ Гц и рельеф дна вдоль акустической трассы. Видно, что изменения групповых скоростей в значительной мере коррелируют с вариациями глубины, однако для первой моды ($j = 1$) эти вариации наименее выражены.

Среднее время прихода сигнала в эксперименте, определяемое по максимуму импульсной характеристики, получаемой в ходе корреляционной обработки, составило $\tau^{exp} = 93,8841$ с. Решим теперь задачу дальнометрии, умножив это время на различные значения усредненных по трассе групповых скоростей, представленные в Таблице 6.1, и рассмотрим возникающую при этом ошибку (по сравнению с расстоянием R_{GPS}, определенным с помощью GPS). Оценку

Частота, Гц \ Номер моды	1	2	3
300	1455,9	1453,0	1453,7
400	1456,1	1454,1	1451,8
500	1456,1	1454,8	1452,6
Эксперимент		1455,4	

Таблица 6.1. Эффективные скорости распространения сигналов $v_{eff}(j, f)$ (в м/с), вычисленные по формулам (6.7), (6.8) для $f = 300$, 400, 500 Гц и $j = 1$, 2, 3, а также наблюдаемые в эксперименте. При расчете используется разбиение трассы на 4 сегмента точками гидрологических измерений.

расстояния $R_{est}(j, f)$, получаемую с помощью метода акустической дальнометрии при использовании скорости $v_{eff}(j, f)$, мы определим соотношением

$$R_{est}(j, f) = \tau^{exp} v_{eff}(j, f)\,. \tag{6.9}$$

Невязку этой оценки $\Delta R(j, f)$ с расстоянием, определенным по данным GPS, можно вычислить по формуле

$$\Delta R(j, f) = R_{est}(j, f) - R_{GPS}\,.$$

Значения невязок для различных мод на частотах $f = 300, 400, 500$ Гц представлены в Таблице 6.2 (значения даны в метрах). Положительные значения всех невязок в первом столбце таблицы указывают на тот факт, что вычисленное по групповым скоростям первой моды расстояние несколько больше расстояния, определенного по данным GPS. Из Таблицы 6.2 видно, что для решения задачи дальнометрии с использованием времени распространения τ^{exp} (которое соответствует максимуму импульсной характеристики) необходимо использовать в расчетах групповые скорости первой моды волновода мелкого моря. Таким образом, данные, представленные в таблице, подтверждают приведенные выше теоретические рассуждения.

Частота, Гц \ Номер моды	1	2	3
300	46,9	-225,3	-159,6
400	65,7	-122,0	-338,0
500	65,7	-56,3	-262,9

Таблица 6.2. Невязка оценки расстояния по методу акустической дальнометрии $\Delta R(j,f)$ (в м), полученная при использовании различных значений $v_{eff}(j,f)$ из Таблицы 6.1 путем сравнения с расстоянием, определенным с помощью GPS.

Для многих практических задач описанный выше метод оценки эффективных скоростей является в достаточной степени точным. Для некоторых акваторий, имеющих особое значение, в таких задачах, по-видимому, целесообразно составлять сезонные карты значений групповых скоростей первой моды (по-видимому, эта величина имеет относительно низкую пространственно-временную изменчивость «в среднем», см. оценку ниже). Ниже, однако, будет предложен ряд уточнений к описанной методике, которые позволят уменьшить невязки теоретических и экспериментальных оценок эффективных скоростей и времен распространения. Хотя выполненная ранее оценка эффективной скорости по формулам (6.7) и (6.8) полностью учитывает всю имеющуюся информацию о гидрологических условиях на акустической трассе, в ней не учитываются неоднородности батиметрии между каждой парой гидрологических станций. Эти неоднородности можно учесть, если разбить трассу на существенно большее количество сегментов, имеющих равную длину (например, 0,5 км). В этом случае будут использованы уточненные зависимости $v_j^g(r)$, и формула (6.7) станет фактически эквивалентна интегральному соотношению (6.6).

На Рис. 6.8 представлены зависимости $v_j^g(r)$ для первых трех мод, рассчитанные с шагом 500 м вдоль всей трассы (для частоты $f_0 = 400$ Гц). Из рисунка видно, что колебания групповых скоростей повторяют вариации батиметрии (это явление заслуживает дополнительного исследования, которое будет выполнено нами в дальнейших работах). При этом, однако, значение групповой скорости первой моды почти постоянно (и равно приблизительно 1455 м/с) в широком диапазоне значений r, и лишь две подводные горы на расстояниях около 90 и 120 км от источника вызывают узкие пики этой величины.

Устойчивость групповой скорости первой моды к малым вариациям батиметрии является важным для дальнейшего свойством этой величины. Выполним теперь расчет эффективных скоростей распространения модальных компонент импульсов, используя описанное выше разбиение трассы на мелкие сегменты. Результаты такого расчета представлены в Таблице 6.3, а соответствующие теоретические оценки времен прихода модальных компонент показаны в Таблице 6.4. Видно, что значения в первом столбце Таблицы 6.3 почти не отличаются от соответствующих значений в Таблице 6.1. Таким образом, еще раз подтверждается слабая зависимость эффективных скоростей первой модальной компоненты от разбиения трассы на сегменты, ведь в первом случае их было 4, а во втором около 280. В то же время эффективные скорости распространения второй и третьей модальных компонент сигнала сильно зависят от выбора

Номер моды / Частота, Гц	1	2	3
300	1456,1	1456,2	1456,6
400	1456,2	1455,6	1456,7
500	1456,2	1455,5	1456,2
Эксперимент	1455,4		

Таблица 6.3. Эффективные скорости распространения сигналов $v_{eff}(j,f)$ (в м/с), вычисленные по формулам (6.7), (6.8) для $f = 300$, 400, 500 Гц и $j = 1$, 2, 3, а также наблюдаемые в эксперименте. . При расчете используется равномерное разбиение трассы на сегменты длиной 500 м. В отличие от эффективных скоростей, приведенных в Таблице 6.1, данные в этой таблице учитывают вариации глубины между точками гидрологических измерений.

Частота, Гц \ Номер моды	1	2	3
300	65,7	75,1	122,0
400	75,1	18,8	112,7
500	75,1	9,4	75,1

Таблица 6.4. Невязка оценки расстояния по методу акустической дальнометрии $\Delta R(j,f)$ (в м), полученная при использовании различных значений $v_{eff}(j,f)$ из Таблицы 6.3 путем сравнения с расстоянием, определенным с помощью GPS.

разбиения (причины этого ясны из Рис. 6.8).

Отметим также, что положительные значения всех невязок в оценке расстояния в Таблице 6.4 показывают, что, очевидно, имеется некоторый до сих пор неучтенный нами эффект, приводящий к тому, что теоретические значения скоростей распространения модальных компонент импульсного сигнала несколько превышают наблюдаемые в эксперименте.

Также следует отметить, что относительная методическая погрешность определения расстояния в данном случае составляет около 0,055%. Хотя это значение все еще является достаточно малым (а данный уровень точности является достаточным для многих приложений), оно все же заметно превышает погрешность, которую рассматриваемая методика дальнометрии обеспечивает во многих других экспериментах, в том числе и для трасс протяженностью несколько сотен километров (на которых неопределенность параметров среды может проявляться в большей степени).

В следующем разделе будет показано, что методическую погрешность для данного эксперимента можно “уложить” в те же границы, что в предшествующих работах по апробации методики дальнометрии, выполненных группой Моргунова (напомним, что речь идет о 0,04% [125]).

В завершение данного раздела сделаем еще одно замечание, касающееся

ρ_b, г/см^3 / c_b, м/с	1,6	1,7	1,8
1600	1456,19	1456,19	1456,20
1700	1456,21	1456,21	1456,22
1800	1456,24	1456,25	1456,26

Таблица 6.5. Значения эффективной скорости распространения сигналов $v_{eff}(j, f)$ (в м/с), вычисленные по формулам (6.7), (6.8) для $f = 400$, Гц и $j = 1$ при различных значениях акустических параметров верхнего слоя дна – скорости звука c_b и плотности ρ_b. В данной таблице (ввиду слабой зависимости скорости от указанных параметров) у значений приведены два знака после запятой.

влияния на рассматриваемые величины параметров дна, о которых, как было уже отмечено ранее, достоверная информация у нас отсутствует. Поскольку водные моды малых номеров взаимодействуют с дном относительно слабо (что выражается, в частности, в том, что скорость убывания модовых функций ниже границы раздела уменьшается с ростом номера моды), конкретные значения плотности ρ_b и скорости звука c_b в верхнем слое дна на самом деле фактически не влияют на усредненное вдоль трассы значение групповой скорости мод, по крайней мере для $j = 1$, 2, 3. В подтверждение этого мы представили значения данной величины, рассчитанные для различных c_b и ρ_b, в виде Таблицы 6.5. Видно, что в указанном диапазоне значений параметров дна вариации средней групповой скорости первой моды составляют менее 0,005% ее значения. Отметим, что для второй и третьей моды эти вариации достигают 0,012% и 0,02% соответственно. Таким образом, методическая погрешность определения дальности в данном случае вряд ли может быть полностью отнесена на счет недостаточности информации об акустических свойствах дна вдоль рассматриваемой трассы.

6.5. Учет горизонтальной рефракции звука: длины горизонтальных лучей

Как было отмечено в предыдущем разделе, положительность всех ошибок оценки расстояний в Таблице 6.4 указывает на то, что в эксперименте обнаруживается некоторое явление, ввиду которого модальные компоненты импульсного сигнала движутся со сниженной скоростью (относительно наших теоретических оценок) либо проходят расстояния, превышающие длину геодезической линии, соединяющей источник и приемник. Учитывая тот факт, что экспериментальная трасса ориентирована вдоль кромки шельфа и почти ортогонально градиенту глубины, в данном случае естественно ожидать проявление горизонтальной рефракции звука [73, 75], т.е. искривления лучевых траекторий в горизонтальной плоскости под влиянием неоднородностей батиметрии. Подробное теоретическое описание этого эффекта приведено в разделе 2.5.2 настоящей работы.

В частности, в разделе 2.5.2 показано, что в случае распространения звука поперек наклона дна в идеальном клине проекции лучей на горизонтальную плоскость имеют форму гипербол (см. формулу (2.14)). Разумеется, такие гиперболы имеют большую длину, чем прямая (точнее, геодезическая) линия, соединяющая источник и приемник. Таким образом, можно ожидать, что в нашем случае модальные компоненты сигнала проходят большие дистанции, чем расстояние от источника до приемника R_{GPS}, рассчитываемое как длина геодезической (по данным GPS). Хотя в нашем случае волновод является существенно более сложным (в связи с неоднородным полем скорости звука и вариациями батиметрии вдоль трассы), соответствующие модам горизонтальные лучи, как будет показано ниже, все еще схожи с гиперболами.

Траектории горизонтальных лучей, соответствующих различным вертикальным модам, могут быть вычислены путем решения системы Гамильтона (3.23), как это описано в разделе 3.2. При нахождении лучей, соединяющих источник и приемник звука (собственных горизонтальных лучей), некоторую

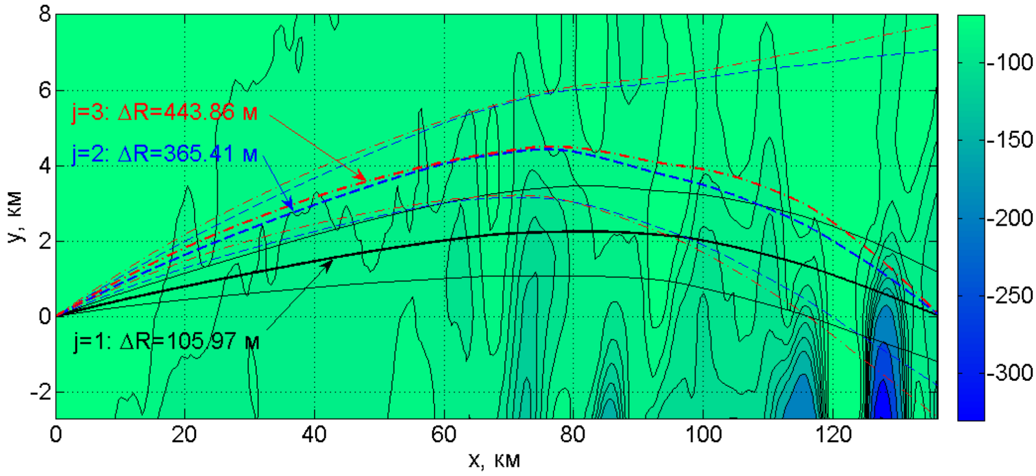


Рис. 6.9. Лучи первых трех мод для трассы в случае частоты 400 Гц. Видно, что длина луча первой моды превышает длину трассы на 105,97 метров. При этом сам луч выходит из источника под углом $\alpha = 2,56°$. Аналогичные данные приведены на рисунке для 2-й и 3-й моды.

дополнительную сложность составляет решение задачи стрельбы. Эта задача была решена нами путем деления интервала поиска пополам. Результат решения этой задачи представлен на Рис. 6.9, где сплошными линиями показаны горизонтальные лучи для первой вертикальной моды ($j = 1$), пунктирными линиями – лучи для $j = 2$ и штрих-пунктирной линией – лучи для $j = 3$, при этом собственные лучи изображены жирными линиями (расчеты проведены для частоты $f_0 = 400$ Гц). После нахождения этих лучей нами были также рассчитаны их длины, которые превышают расстояние от источника до приемника по геодезической на ΔR_1=106 м, $\Delta R_2 = 365$ м и ΔR_3 =444 м для первой, второй и третьей мод соответственно (эти значения соответствуют частоте 400 Гц, значения для частот 300 и 500 Гц приведены в Таблице 6.6). Важно отметить, что моды меньших номеров всегда в меньшей степени подвержены влиянию горизонтальной рефракции, что и подтверждают наши расчеты. Даже для трассы протяженностью 136 км поправка засчет горизонтальной рефракции составляет всего около 100 м для первой моды, по модальной компоненте которой и идентифицируется приход импульсного сигнала в эксперименте. Другой особенностью горизонтальных лучей является то, что (в соответствии с (3.23)) их траектории

Частота, Гц \ Номер моды	1	2	3
300	173	389	520
400	106	365	444
500	82	347	392

Таблица 6.6. Удлинение дистанции $\Delta R_j = \Delta R_j(f)$ (в м), которую проходят сигналы по пути из источника в приемник, вызванное искривлением горизонтальных лучей, соответствующих модам с номерами $j = 1, 2, 3$ на частотах $f = 300, 400, 500$ Гц.

зависят от частоты звука [75]. По этой причине горизонтальная рефракция является дополнительным физическим механизмом, ответственным за дисперсию импульсных сигналов в мелком море. Действительно, хотя групповые скорости одной и той же моды на частотах в полосе от 300 до 500 Гц почти не отличаются, дополнительные расстояния $\Delta R_j = \Delta R_j(f)$, проходимые лучами (по сравнению с геодезической), сильно зависят от частоты (см. Таблицу 6.6).

С учетом удлинения лучевых траекторий задачу акустической дальнометрии следовало бы решать, используя формулу

$$R_{est}(j, f) = \tau^{exp} v_{eff}(j, f) - \Delta R_j(f)\,. \tag{6.10}$$

Ошибки в определении дальности до источника по этой формуле рассчитаны в Таблице 6.7. Представленные в таблице значения показывают, что при решении задачи акустической дальнометрии с использованием времени прихода максимума ИХВ и с учетом горизонтальной рефракции звука на наклонном дне, обеспечивается относительная методическая погрешность определения дальности 0,022%. Данный уровень погрешности уже хорошо укладывается в рамки, установленные при апробации методики решения задач дальнометрии в многочисленных экспериментах, проведенных в ТОИ ДВО РАН за последние 20 лет.

Разумеется, при решении задач дальнометрии на практике значения $\Delta R_j(f)$

Частота, Гц \ Номер моды	1	2	3
300	-107	-314	-398
400	-31	-346	-331
500	-7	-338	-317

Таблица 6.7. Невязка оценки расстояния по методу акустической дальнометрии $\Delta R(j,f)$ (в м), полученная при использовании различных значений $v_{eff}(j,f)$ из Таблицы 6.3 путем сравнения с расстоянием, определенным с помощью GPS. Для расчета расстояния использована формула (6.10), которая учитывает удлинения горизонтальных лучей засчет горизонтальной рефракции звука, приведенные в Таблице 6.6.

неизвестны, хотя бы потому, что эти величины зависят от положения точки приема, которая и должна определяться в результате решения таких задач. Тем не менее, при организации системы акустической навигации на некоторой акватории с известными гидрологическими условиями[3] можно заранее рассчитать удлинения лучевых траекторий, соединяющих точку расположения источника навигационных сигналов (ИНС) со всеми точками акватории. После этого можно осуществлять позиционирование в два этапа по следующей схеме

1. Положение приемника определяется с помощью формулы (6.9), которая не учитывает горизонтальную рефракцию.

2. После грубой оценки положения точки приема определяется удлинение $\Delta R_j(f)$ лучевых траекторий, соединяющих эту точку со всеми ИНС. Используя найденные $\Delta R_j(f)$, положение точки приема можно уточнить, определяя дальности до ИНС по формуле (6.10), которая учитывает горизонтальную рефракцию звука.

Интересно отметить, что дисперсия, вызванная горизонтальной рефракци-

[3] Они могут быть известны, например, из данных многолетних наблюдений или из результатов моделирования динамики океана.

ей, в нашем случае приводит к тому, что первая модальная компонента сигнала в полосе частот от 300 до 500 Гц должна удлиниться приблизительно до 67 мс (что хорошо согласуется с экспериментальными данными), причем расхождение времени прихода главного максимума (частота 400 Гц, 1 мода) с наблюдаемым в эксперименте составляет всего около 26 мс. Без учета горизонтальной рефракции удлинение первой модальной компоненты сигнала во временной области составило бы всего около 5 мс. Таким образом, внутримодовая дисперсия импульсного звукового сигнала в трехмерных волноводах может оказаться существенно более выраженной, чем предсказывает двумерная теория распространения звука. Кроме того, как следует из представленных здесь результатов расчетов, модальные компоненты для $j = 2, 3$ должны отставать от главного максимума (соответствующего $j = 1$) приблизительно на 200 мс. В принимаемых в эксперименте сигналах этих компонент не наблюдается, и дисперсия на рассматриваемой трассе, главным образом, обусловлена горизонтальной рефракцией звука.

Отметим, что расчет функций $k_j = k_j(x, y)$, играющих роль индекса рефракции для горизонтальных лучей предполагает наличие информации о рельефе дна во всей расчетной области (детальной карты глубин). Данная карта была получена нами путем извлечения батиметрических данных из базы SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) Национального авиакосмического агентства США (NASA). При расчетах также были использованы полученные в эксперименте профили скорости звука (поле скорости звука считалось независимым от поперечной к трассе горизонтальной координаты y, что очевидным образом продиктовано пространственными масштабами задачи).

6.6. Выводы к шестой главе

В этой главе изложена общая методика решения задач акустической дальнометрии в волноводах мелкого моря. Для решения таких задач в случае, когда известно время распространения от ИНС до точки приема (определяемое по наибольшему локальному максимуму ИХВ), необходимо уметь получать оценку эффективной скорости распространения сигнала, которая соответствует этому максимуму. Показано, что в первом приближении такая оценка может быть получена через усреднение по трассе групповой скорости первой моды на центральной частоте излучаемого сигнала. Вкладом высших мод на протяженных трассах (десятки и сотни километров) можно пренебречь, и главный максимум ИХВ будет ассоциирован с первой модальной компонентой сигнала. Принципиальная важность этих выводов состоит в том, что при разработке систем акустического позиционирования и дальнометрии на практике вместо целого профиля скорости звука в точке с данными географическими координатами достаточно знать всего одну скалярную величину. Кроме того, как показывает Рис. 6.8, эта величина является наиболее устойчивой (к вариациям различных параметров) характеристикой различных поперечных сечений волновода. Таким образом, опираясь на групповую скорость первой моды, можно получить надежные и устойчивые теоретические оценки эффективных скоростей распространения импульсных сигналов на шельфе.

Важным эффектом, который нужно иметь в виду при оценке времен распространения и дистанций с использованием рассчитанных по указанной методике эффективных скоростей, является горизонтальная рефракция звука. С одной стороны, горизонтальные лучи мод низших номеров (в особенности первой) наименее подвержены горизонтальной рефракции, и увеличение расстояния, проходимого сигналом, в нашем случае составило всего около 100 м для трассы протяженностью 136 км, ориентированной наилучшим для проявления этого эффекта образом (вдоль кромки шельфа). При организации систем дальней акустической навигации такие трассы являются скорее исключительными, чем типичными (так как в типичном случае источник должен находиться у берега, а приемник – в глубоководном районе), и на практике влияние горизонтальной рефракции чаще всего будет еще меньшим.

В рассмотренном здесь эксперименте относительная методическая погрешность определения расстояния от источника до приемника без учета горизонтальной рефракции составила около 0,055%, что заметно выше, чем в других экспериментах по апробации рассматриваемой методики, выполненных в ТОИ ДВО РАН, где погрешность, как правило, не превышала 0,04%, в т.ч. и для более сложных волноводов и трасс протяженностью несколько сотен километров. Учет горизонтальной рефракции при анализе рассмотренного в этой главе эксперимента позволил скорректировать оценку расстояния от источника до приемника таким образом, что относительная методическая погрешность оказалась равной 0,022%. Следует также отметить, что технические средства, использованные в эксперименте, обеспечивают относительную (инструментальную) погрешность определения времени прихода, соответствующего максимуму ИХВ, составляющую всего 0,005%. Случайная ошибка определения данной величины по совокупности измерений за два часа регистрации фазоманипулированных сигналов (которые излучались каждые 3 минуты) может быть оценена как 0,01%. Таким образом, величина методической поправки, связанной с горизонтальной рефракцией звука, в данном случае заметно превышает случайные ошибки измерений, имеющие место в натурном эксперименте.

Кроме того, в условиях практически полного отсутствия межмодовой дисперсии (ввиду отсутствия модальных компонент высших мод) и слабо выраженной зависимости групповой скорости первой моды от частоты горизонтальная рефракция становится основной причиной увеличения протяженности носителя ИХВ во временной области, т.е. фактически основным механизмом внутримодовой дисперсии. Этот интересный физический результат нашей работы следует принимать во внимание при оценке расплывания импульсных сигналов с расстоянием. В рассмотренном нами случае разность времен прихода первой моды на частотах 300 и 500 Гц составляет около 67 мс, что на порядок превышает соответствующую величину, предсказываемую двумерной теорией распространения звука.

Результаты шестой главы опубликованы в работах [56, 57, 59].

Заключение

При выполнении исследований, которые легли в основу данной диссертации, соискателем разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение в описании явлений горизонтальной рефракции звука в мелком море с трехмерными неоднородностями рельефа дна, а также в разработке математических инструментов для ее количественного описания.

Общая теоретическая картина явления складывается из совокупности показательных примеров, в которых это явление проявляется с различных сторон. В наших работах эффект горизонтальной рефракции звука изучается для всевозможных типичных неоднородностей рельефа дна. Мы рассмотрели его проявления в случае наклонного дна на континентальном шельфе, чашеобразного дна, характерного для округлых бухт, а также волноводов мелкого моря с подводным каньоном и подводным хребтом. Во всех случаях мы старались как сформировать лучевую картину наблюдаемых явлений (т.е. описать геометрию горизонтальных лучей и волновых фронтов), так и дать качественное и количественное описание волновой структуры акустического поля. Большая часть этих примеров впервые рассмотрена именно в работах автора настоящей диссертации, до появления которых практически единственной известной трехмерной задачей акустики мелкого моря, имеющей аналитическое решение, была задача о распространении звука в прибрежном клине с проницаемым дном. Совокупность аналитических решений трехмерных задач, полученных в работах соискателя, в определенном смысле исчерпывает возможные сценарии проявления горизонтальной рефракции звука на неоднородностях рельефа дна. Эти сценарии включают в себя как волноводное (каньон, шепчущая галерея), так и антиволноводное (подводный хребет) распространение, которые характеризуются, соответственно, фокусировкой и дефокусировкой горизонтальных лучей. В случае волноводного распространения, т.е. для подводного каньона и шепчущей галереи, сформированной в окрестности семейства искривленных изобат, горизонтальная рефракция звука приводит к образованию модовой структуры акустического поля в горизонтальной плоскости. Промежуточный сценарий, при котором лучи просто отклоняются в одном горизонтальном направлении (без фокусировки), реализуется при распространении звука над наклонным дном.

Отметим, что даже решение для клина, полученное Дином и Бэкингемом с помощью метода изображений, вряд ли можно считать сколь-нибудь раскрывающим суть явления горизонтальной рефракции звука. Действительно, ввиду того, что оно имеет форму ряда, элементы которого получаются путем вычисления несобственных интегралов, физика описываемого им явления скрыта от нас под непрозрачной вычислительной оболочкой. Полученные в наших работах решения трехмерных задач акустики мелкого моря существенно более полезны в точки зрения формирования физического понимания эффекта горизонтальной рефракции звука ввиду их явной и относительно элементарной аналитической формы, устанавливающей простые и понятные связи между параметрами задачи и характеристиками волновых полей. Основной элемент новизны в этой группе результатов состоит именно в том, что нам удалось получить новые аналитические представления звуковых полей в волноводах мелкого моря с трехмерными неоднородностями батиметрии различного типа. Хотя все использованные в работе математические методы были известны ранее (метод ВКБ, метод Вея-Нормана и т.д.), в задачах моделирования горизонтальной рефракции они были впервые использованы автором настоящей диссертации.

Наиболее перспективными математическими инструментами для качественного и количественного описания трехмерного распространения звука в мелком море, на наш взгляд, являются трехмерная лучевая теория распространения звука (дополненная асимптотическими формулами, основанными на методе канонического оператора Маслова для возможности выполнения расчетов в фокальных точках семейства лучей), а также метод модовых параболических уравнений. Связующим звеном между ними является описание на языке вертикальных мод и горизонтальных лучей. Данная работа содержит вклад в развитие этих математических подходов.

Более общим и универсальным, на наш взгляд, является метод псевдодифференциальных модовых параболических уравнений (ПДМПУ), позволяющий выполнять расчеты звукового поля для волновода мелкого моря со сколь угодно сложными рельефом дна и неоднородностями скорости звука в водном слое (в т.ч. взятыми из данных натурных измерений). Этот метод обладает оптимальным соотношением обеспечиваемого уровня точности расчетов и их вычислительной эффективности. Алгоритм применения данного метода предполагает предварительный расчет волновых чисел $k_j = k_j(x, y)$ и соответствующих им модовых функций для всех точек акватории x, y и всех мод j, возбуждаемых источником звука. Решение этой задачи может быть значительно оптимизировано путем использования теории возмущений для акустических мод. Кроме того, ПДМПУ допускает очень крупные шаги сетки, которые на практике могут ограничиваться только разрешением имеющихся батиметрических данных. Подчеркнем, что на этом направлении основным достижением автора настоящей диссертации является именно разработка эффективной методики расчета звуковых полей с помощью широкоугольных и псевдодифференциальных модовых параболических уравнений (как в декартовой, так и в криволинейной системах координат). Данная методика включает в себя сами уравнения, начальные условия для моделирования точечного источника и граничные условия прозрачности, а также алгоритм численного решения ПДМПУ и ШМПУ.

Другим перспективным инструментом для решения двумерных и трехмерных задач акустики мелкого моря представляются разработанные нами итеративные параболические уравнения (ИПУ). Хотя идея их использования в задачах акустики океана принадлежит Трофимову (соискатель является соавтором пионерской работы, в которой ИПУ были впервые применены к решению задач акустики), в последующих работах, где решающий вклад принадлежит автору настоящей диссертация, теория ИПУ получила значительное развитие. Личный вклад автора диссертации и в этом случае состоит в разработке методики расчета звуковых полей с использованием ИПУ. Данная методика включает в себя, в частности, численную реализацию условий на наклонных границах раздела, граничные условия прозрачности, а также алгоритм решения ИПУ с этими условиями.

Кроме того, в диссертации также содержатся и вполне практические выводы, относящиеся к описанию влияния горизонтальной рефракции на точность решения задач акустической дальнометрии и акустической навигации. Разумеется, это лишь один пример приложения, в котором изучаемый нами эффект играет важную роль. К числу других непосредственных приложений, для которых разработанные методы адаптируются в настоящий момент, относятся задачи мониторинга антропогенных акустических шумов на шельфе.

Словарь терминов

АПЭОКК — аппроксимация Паде экспоненты операторного квадратного корня (в англоязычной литературе известен как метод SSP — Split Step Padé).

ГАВ — геоакустический волновод.

ГУП — граничные условия прозрачности.

ИНС — источник навигационных сигналов.

ИПУ — итеративные параболические уравнения.

ИХВ — импульсная характеристика волновода.

МВИ — метод виртуальных источников.

МКОМ — модифицированный канонический оператор Маслова.

МПУ — модовые параболические уравнения.

ПДМПУ — псевдодифференциальное модовое параболическое уравнение.

ПЗК — подводный звуковой канал.

ШГ — шепчущая галерея.

ШМПУ — широкоугольные модовые параболические уравнения.

Список литературы

1. *Weston D. E.* Horizontal refraction in a three-dimensional medium of variable stratification // *Proceedings of the Physical Society.* — 1961. — Vol. 78, no. 1. — P. 46.
2. *Harrison C. H.* Acoustic shadow zones in the horizontal plane // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1979. — Vol. 65, no. 1. — P. 56–61.
3. *Burridge R., Weinberg H.* Horizontal rays and vertical modes // Wave propagation and underwater acoustics. — Springer, 1977. — P. 86–152.
4. *Doolittle R., Tolstoy A., Buckingham M.* Experimental confirmation of horizontal refraction of cw acoustic radiation from a point source in a wedge-shaped ocean environment // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1988. — Vol. 83, no. 6. — P. 2117–2125.
5. *Badiey M., Lynch J.* Recent studies of acoustic wave propagation in shallow water waveguides with variable water column properties // AIP Conference Proceedings / American Institute of Physics. — Vol. 1495. — 2012. — P. 105–126.
6. *Reeder D. B., Lin Y.-T.* 3d acoustic propagation through an estuarine salt wedge at low-to-mid-frequencies: Modeling and measurement // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1888–1902.
7. *DeCourcy B. J., Lin Y.-T., Siegmann W. L.* Effects of front width on acoustic ducting by a continuous curved front over a sloping bottom // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1923–1933.
8. Parameter dependence of acoustic mode quantities in an idealized model for shallow-water nonlinear internal wave ducts / M. A. Milone, B. J. DeCourcy, Y.-T. Lin, W. L. Siegmann // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1934–1945.

9. Underwater acoustic energy fluctuations during strong internal wave activity using a three-dimensional parabolic equation model / G. A. Dossot, K. B. Smith, M. Badiey et al. // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1875–1887.
10. Multiscale multiphysics data-informed modeling for three-dimensional ocean acoustic simulation and prediction / T. F. Duda, Y.-T. Lin, A. E. Newhall et al. // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1996–2015.
11. *Harrison C. H.* Three-dimensional ray paths in basins, troughs, and near seamounts by use of ray invariants // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1977. — Vol. 62, no. 6. — P. 1382–1388.
12. *Taroudakis M. I.* A coupled–mode formulation for the solution of the helmholtz equation in water in the presence of a conical sea-mount // *Journal of Computational Acoustics.* — 1996. — Vol. 4, no. 01. — P. 101–121.
13. *Athanassoulis G. A., Prospathopoulos A. M.* Three-dimensional acoustic scattering of a source-generated field from a cylindrical island // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1996. — Vol. 100, no. 1. — P. 206–218.
14. *Luo W., Schmidt H.* Three-dimensional propagation and scattering around a conical seamount // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2009. — Vol. 125, no. 1. — P. 52–65.
15. *Deane G., Buckingham M.* An analysis of the three-dimensional sound field in a penetrable wedge with a stratified fluid or elastic basement // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1993. — Vol. 93, no. 3. — P. 1319–1328.
16. *Кацнельсон Б. Г., Пересёлков С. А.* Горизонтальная рефракция низкочастотного звукового поля, вызванная солитонами внутренних волн в мелководном волноводе // *Акуст. журн.* — 2000. — Т. 46, № 6. — С. 779.
17. *Кацнельсон Б. Г., Бади М., Линч Д.* Горизонтальная рефракция звука в мелком море и ее экспериментальные наблюдения // *Акустический жур-*

нал. — 2007. — Т. 53, № 3. — С. 362–376.

18. Measurement and modeling of three-dimensional sound intensity variations due to shallow-water internal waves / M. Badiey, B. G. Katsnelson, J. F. Lynch et al. // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2005. — Vol. 117, no. 2. — P. 613–625.
19. *Kuz'kin V. M., Pereselkov S. A.* Effect of intense internal waves on the sound field interference structure // *Physics of Wave Phenomena.* — 2010. — Vol. 18, no. 3. — P. 223–229.
20. Monitoring the gray whale sound exposure mitigation zone and estimating acoustic transmission during a 4-D seismic survey, Sakhalin Island, Russia / Roberto Racca, Melanie Austin, Alexander Rutenko, Koen Bröker // *Endangered Species Research.* — 2015. — Vol. 29, no. 2. — P. 131–146.
21. *Baer R. N.* Propagation through a three-dimensional eddy including effects on an array // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1981. — Vol. 69, no. 1. — P. 70–75.
22. Экспериментальное тестирование технологии высокоточной подводной акустической дальнометрии / Ю. Н. Моргунов, В. В. Безответных, В. А. Буренин и др. // *Акустический журнал.* — 2018. — Т. 64, № 2. — С. 191–196.
23. Deep water acoustic range estimation based on an ocean general circulation model: Application to PhilSea10 data / M. Wu, M. P. Barmin, R. K. Andrew et al. // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 6. — P. 4754–4773.
24. Three-dimensional effects in global acoustics / M. D. Collins, B. E. McDonald, K. D. Heaney, W. A. Kuperman // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1995. — Vol. 97, no. 3. — P. 1567–1575.
25. *Perkins J. S., Baer R. N.* An approximation to the three-dimensional parabolic-equation method for acoustic propagation // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1982. — Vol. 72, no. 2. — P. 515–522.

26. *Lee D., Botseas G., Siegmann W. L.* Examination of three-dimensional effects using a propagation model with azimuth-coupling capability (for3d) // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1992. — Vol. 91, no. 6. — P. 3192–3202.
27. *Lin Y.-T., Duda T. F., Newhall A. E.* Three-dimensional sound propagation models using the parabolic-equation approximation and the split-step fourier method // *Journal of Computational Acoustics.* — 2013. — Vol. 21, no. 01. — P. 1250018.
28. *Sturm F.* Leading-order cross term correction of three-dimensional parabolic equation models // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2016. — Vol. 139, no. 1. — P. 263–270.
29. *Lee K., Seong W., Na Y.* Three-dimensional Cartesian parabolic equation model with higher-order cross-terms using operator splitting, rational filtering, and split-step Padé algorithm // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 2041–2049.
30. *Ivansson S.* Local accuracy of cross-term corrections of three-dimensional parabolic-equation models // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 2030–2040.
31. *Авилов К. В., Куличков С. Н., Попов О. Е.* Calculation of the sound fields in the environment model including simultaneously atmosphere, water and bottom // *Ученые записки физического факультета Московского университета.* — 2017. — № 5. — С. 1750101–1750101.
32. *Авилов К. В., Попов О. Е.* Вычисление низкочастотных звуковых полей в трехмерно неоднородных моделях среды, включающих воду, воздух и грунт // Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики. — 2018. — С. 323–326.
33. *Calazan R. M., Rodríguez O. C.* Traceo3d ray tracing model for underwater noise predictions // Doctoral Conference on Computing, Electrical and Industrial Systems / Springer. — 2017. — P. 183–190.

34. *Porter M. B.* Beam tracing for two-and three-dimensional problems in ocean acoustics // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 2016–2029.
35. *Collins M. D.* The adiabatic mode parabolic equation // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1993. — Vol. 94, no. 4. — P. 2269–2278.
36. *Trofimov M. Y.* Narrow-angle parabolic equations of adiabatic single-mode propagation in a horizontally inhomogeneous shallow sea // *Acoustical Physics.* — 1999. — Vol. 45. — P. 575–580.
37. *Dobrokhotov S. Y., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B.* Asymptotic solutions of 2d wave equations with variable velocity and localized right-hand side // *Russian Journal of Mathematical Physics.* — 2010. — Vol. 17, no. 1. — P. 66–76.
38. *Katsnelson B., Petrov P.* Whispering gallery waves localized near circular isobaths in shallow water // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1343–1352.
39. *Petrov P. S., Trofimov M. Y.* A nonstationary form of the range refraction parabolic equation and its application as an artificial boundary condition for the wave equation in a waveguide // *EPL (Europhysics Letters).* — 2009. — Vol. 85, no. 3. — P. 34001.
40. *Trofimov M. Y., Petrov P.* On the application of the nonstationary form of the tappert equation as an artificial boundary condition // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2010. — Vol. 167, no. 6. — P. 857–867.
41. *Петров П. С., Захаренко А. Д., Трофимов М. Ю.* Волновое уравнение с вязкоупругим затуханием и его применение в задачах акустики мелкого моря // *Акустический журнал.* — 2012. — Т. 58, № 6. — С. 747–755.
42. Мониторинг акустического поля сейсморазведочных импульсов в прибрежной зоне / А Н Рутенко, Д И Боровой, В А Гриценко и др. // *Акустический журнал.* — 2012. — Т. 58, № 3. — С. 356–369.
43. *Trofimov M. Y., Petrov P. S., Zakharenko A. D.* A direct multiple-scale ap-

proach to the parabolic equation method // *Wave Motion.* — 2013. — Vol. 50, no. 3. — P. 586–595.

44. Wave chaos in a randomly inhomogeneous waveguide: spectral analysis of the finite-range evolution operator / D. V. Makarov, L. E. Kon'kov, M. Yu. Uleysky, P. S. Petrov // *Physical Review E.* — 2013. — Vol. 87, no. 1. — P. 012911.
45. *Petrov P. S., Petrova T. N.* Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a sea with an underwater canyon // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2014. — Vol. 136, no. 4. — P. EL281–EL287.
46. *Petrov P. S., Ehrhardt M.* On Mayfield's stability proof for the discretized transparent boundary condition for the parabolic equation // *Applied Mathematics Letters.* — 2015. — Vol. 44. — P. 45–49.
47. *Petrov P. S., Sturm F.* An explicit analytical solution for sound propagation in a three-dimensional penetrable wedge with small apex angle // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2016. — Vol. 139, no. 3. — P. 1343–1352.
48. *Petrov P. S., Ehrhardt M.* Transparent boundary conditions for iterative high-order parabolic equations // *Journal of Computational Physics.* — 2016. — Vol. 313. — P. 144–158.
49. *Petrov P. S., Makarov D. V., Ehrhardt M.* Wide-angle parabolic approximations for the nonlinear Helmholtz equation in the Kerr media // *EPL (Europhysics Letters).* — 2016. — Vol. 116, no. 2. — P. 24004.
50. *Makarov D. V., Kon'kov L. E., Petrov P. S.* Influence of oceanic synoptic eddies on the duration of modal acoustic pulses // *Radiophysics and Quantum Electronics.* — 2016. — Vol. 59, no. 7. — P. 576–591.
51. *Petrov P. S., Prants S. V., Petrova T. N.* Analytical lie-algebraic solution of a 3d sound propagation problem inthe ocean // *Physics Letters A.* — 2017. — Vol. 381. — P. 1921–1925.
52. *Петров П. С., Сергеев С. А., Толченников А. А.* Моделирование распро-

странения импульсных акустических сигналов в глубоком океане с помощью канонического оператора Маслова // *Доклады Академии наук.* — 2017. — Т. 473, № 2. — С. 142–145.

53. *Petrov P. S., Sergeev S. A., Tolchennikov A. A.* Modeling of pulse signals in 3d propagation problems of deep-water acoustics based on the modified Maslov's canonical operator // *Russian Journal of Mathematical Physics.* — 2018. — Vol. 25, no. 1. — P. 102–112.

54. К вопросу о методе изображений в задаче о распространении звука в клине в акустике океана: некоторые исправления и дополнения / J. Tang, П. С. Петров, S. Piao, С. Б. Козицкий // *Акустический журнал.* — 2018. — Т. 64, № 2. — С. 228–240.

55. *Petrov P. N., Petrov P. S.* Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a shallow sea with the bathymetry described by a parametric quadratic function // *J. Acoust. Soc. America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1946–1955.

56. Исследования пространственно-временной структуры акустического поля, формируемого в глубоком море источником широкополосных импульсных сигналов, расположенным на шельфе Японского моря / Ю. Н. Моргунов, А. А. Голов, А.В. Буренин, П.С. Петров // *Акустический журнал.* — 2019. — Т. 65, № 5. — С. 641–649.

57. Особенности глубоководного приёма импульсных псевдослучайных сигналов при распространении из шельфа в глубокое море / В. А. Акуличев, Ю. Н. Моргунов, А. А. Голов и др. // *Доклады академии наук.* — 2019. — Т. 487, № 3. — С. 322–327.

58. *Петров П. С., Сергеев С. А., Толченников А. А.* Об использовании асимптотических формул на основе модифицированного канонического оператора Маслова при моделировании распространения импульсных акустических сигналов в трехмерных волноводах мелкого моря // *Акустический журнал.* — 2019. — Т. 65. — С. 799–807.

59. Экспериментальное и теоретическое исследование времен прихода и эффективных скоростей при дальнем распространения импульсных акустических сигналов вдоль кромки шельфа в мелком море / П. С. Петров, А. А. Голов, В. В. Безответных и др. // *Акустический журнал.* — 2020. — Т. 66, № 1. — С. 20–33.
60. *Petrov P. S., Antoine X.* Pseudodifferential adiabatic mode parabolic equations in curvilinear coordinates and their numerical solution // *Journal of Computational Physics.* — 2020. — P. 109392.
61. Wide-angle mode parabolic equations for the modelling of horizontal refraction in underwater acoustics and their numerical solution on unbounded domains / P. S. Petrov, M. Ehrhardt, A. G. Tyshchenko, P. N. Petrov // *Journal of Sound and Vibration.* — 2020. — P. 115526.
62. *Petrov P. S., Trofimov M. Y., Zakharenko A. D.* Mode parabolic equations for the modeling of sound propagation in 3d-varying shallow water waveguides // Days on Diffraction (DD), 2012 / IEEE. — 2012. — P. 197–202.
63. *Petrov P. S.* Asymptotic solution for the problem of acoustic waves propagation in a penetrable truncated wedge // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2013 / IEEE. — 2013. — P. 110–115.
64. *Petrov P. S., Petrova T. N., Monakhova A. S.* Adiabatic approximate solution for the problem of sound propagation in shallow sea with a broadening underwater canyon // Proceedings of Meetings on Acoustics PRUAC2015 / ASA. — Vol. 24. — 2015. — P. 070004.
65. *Petrov P. S., Ehrhardt M.* Transparent boundary conditions for the high-order parabolic approximations // 2015 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2015. — P. 255–260.
66. *Petrov P. S.* Three-dimensional iterative parabolic approximations // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2015. — Vol. 138, no. 3. — P. 1929–1929.
67. *Petrov P. S., Petrova T. N.* On sound propagation in a shallow-water acousti-

cal waveguide with variable bottom slope // 2016 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2016. — P. 327–331.

68. Three-dimensional model benchmarking for cross-slope wedge propagation / O. C. Rodriguez, F. Sturm, P. Petrov, M. Porter // Proceedings of Meetings on Acoustics 173EAA / ASA. — Vol. 30. — 2017. — P. 070004.

69. On the source images method for sound propagation in a penetrable wedge: Some corrections and appendices / J. Tang, P. S. Petrov, S. B. Kozitskiy, S. Piao // 2017 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2017. — P. 304–309.

70. *Petrov P. S., Ehrhardt M., Makarov D. V.* Multiscale approach to parabolic equations derivation: Beyond the linear theory // *Procedia Computer Science.* — 2017. — Vol. 108. — P. 1823–1831.

71. *Petrov P. S., Tyshchenko A. G., Ehrhardt M.* Numerical solution of iterative parabolic equations approximating the nonlinear Helmholtz equation // 2018 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2018. — P. 241–244.

72. Transformation of the modal structure of acoustical field in course of the sound propagation from continental shelf to the deep ocean / P. S. Petrov, A. V. Burenin, A. A. Golov, Yu. N. Morgunov // 2018 Days on Diffraction (DD) / IEEE. — 2018. — P. 235–240.

73. Computational ocean acoustics / F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter, H. Schmidt. — Springer Science & Business Media, 2011. — P. 360–426.

74. *Brekhovskikh L., Lysanov Y. P.* Fundamentals of ocean acoustics. — Spring-Verlag, Berlin, 2003. — P. 149–163.

75. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* Fundamentals of shallow water acoustics. — Springer Science & Business Media, 2012. — P. 102–124.

76. *Chapman C., Hobro J., Robertsson J.* Elastic corrections to acoustic finite-difference simulations // SEG Technical Program Expanded Abstracts 2010. — Society of Exploration Geophysicists, 2010. — P. 3013–3017.

77. *Stephen R. A., Swift S. A.* Modeling seafloor geoacoustic interaction with

a numerical scattering chamber // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1994. — Vol. 96. — P. 973–990.

78. *Brekhovskikh L. M., Godin O. A.* Acoustics of layered media I: Plane and quasi-plane waves. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 5.
79. *Nowick A. S.* Anelastic relaxation in crystalline solids. — Elsevier, 2012. — Vol. 1.
80. *Day S. M., Minster J. B.* Numerical simulation of attenuated wavefields using a padé approximant method // *Geophysical Journal International.* — 1984. — Vol. 78, no. 1. — P. 105–118.
81. *Emmerich H., Korn M.* Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields // *Geophysics.* — 1987. — Vol. 52, no. 9. — P. 1252–1264.
82. *Day S. M.* Efficient simulation of constant q using coarse-grained memory variables // *Bulletin of the Seismological Society of America.* — 1998. — Vol. 88, no. 4. — P. 1051–1062.
83. Local high-order absorbing boundary conditions for time-dependent waves in guides / T. Hagstrom, M. L. De Castro, D. Givoli, D. Tzemach // *Journal of Computational Acoustics.* — 2007. — Vol. 15, no. 01. — P. 1–22.
84. *Hagstrom T., Mar-Or A., Givoli D.* High-order local absorbing conditions for the wave equation: Extensions and improvements // *Journal of Computational Physics.* — 2008. — Vol. 227, no. 6. — P. 3322–3357.
85. *Higdon R. L.* Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multidimensional wave equation // *Mathematics of computation.* — 1986. — Vol. 47, no. 176. — P. 437–459.
86. *Higdon R. L.* Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation // *Mathematics of computation.* — 1987. — Vol. 49, no. 179. — P. 65–90.
87. *Hagstrom T., Warburton T.* Complete radiation boundary conditions: minimizing the long time error growth of local methods // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* — 2009. — Vol. 47, no. 5. — P. 3678–3704.

88. *Hagstrom T., Warburton T., Givoli D.* Radiation boundary conditions for time-dependent waves based on complete plane wave expansions // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2010. — Vol. 234, no. 6. — P. 1988–1995.

89. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Метод энергетических оценок в смешанной задаче // *Успехи математических наук.* — 1980. — Т. 35, № 5 (215. — С. 53–120.

90. *Гордиенко В. М.* О корректности смешанной задачи для волнового уравнения // *Сибирские электронные математические известия.* — 2010. — Т. 7, № 0. — С. 130–138.

91. *Гордиенко В. М.* Диссипативность граничного условия в смешанной задаче для трехмерного волнового уравнения // *Сибирские электронные математические известия.* — 2013. — Т. 10, № 0. — С. 311–323.

92. *Sommerfeld A.* Die greensche funktion der schwingungsgleichung // *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* — 1912. — Vol. 21. — P. 309–353.

93. *Свешников А.* Принцип излучения // *Доклады Академии наук.* — 1950. — Т. 73, № 5. — С. 917–920.

94. *Алексеев Г. В.* Метод нормальных волн в подводной акустике. — Дальнаука, 2006.

95. *Ciraolo G., Magnanini R.* A radiation condition for uniqueness in a wave propagation problem for 2-D open waveguides // *Mathematical methods in the applied sciences.* — 2009. — Vol. 32, no. 10. — P. 1183–1206.

96. Diffraction by a defect in an open waveguide: a mathematical analysis based on a modal radiation condition / A.-S. Bonnet-Ben Dhia, G. Dakhia, C. Hazard, L. Chorfi // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 2009. — Vol. 70, no. 3. — P. 677–693.

97. The uniqueness and existence of solutions for the 3-D Helmholtz equation in a stratified medium with unbounded perturbation / L. Liu, Y. Qin, Y. Xu,

Y. Zhao // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* — 2013. — Vol. 36, no. 15. — P. 2033–2047.

98. *Мокеева Н. В.* Исследование вопроса о корректности задач дифракции в случае угловых областей // *Записки научных семинаров ПОМИ.* — 2005. — Т. 324. — С. 131–147.
99. *Babich V. M., Mokeeva N. V., Samokish B. A.* The problem of scattering of a plane wave by a transparent wedge: A computational approach // *Journal of Communications Technology and Electronics.* — 2012. — Vol. 57, no. 9. — P. 993–1000.
100. *Sturm F. B., Fawcett J. A., Jensen F. B.* Benchmarking two three-dimensional parabolic equation methods // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1998. — Vol. 103, no. 5. — P. 2990–2990.
101. *Castor K., Sturm F.* Investigation of 3d acoustical effects using a multi-processing parabolic equation based algorithm // *Journal of Computational Acoustics.* — 2008. — Vol. 16, no. 02. — P. 137–162.
102. Tank experiments of sound propagation over a tilted bottom: Comparison with a 3-d pe model / A. Korakas, F. Sturm, J.-P. Sessarego, D. Ferrand // *Journal of the Acoustical Society of America.* — 2008. — Vol. 123, no. 5. — P. 3598–3598.
103. *Sturm F., Korakas A.* Comparisons of laboratory scale measurements of three-dimensional acoustic propagation with solutions by a parabolic equation model // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2013. — Vol. 133, no. 1. — P. 108–118.
104. *Jensen F. B., Ferla C. M.* Numerical solutions of range-dependent benchmark problems in ocean acoustics // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1990. — Vol. 87, no. 4. — P. 1499–1510.
105. *Trofimov M. Y., Kozitskiy S. B., Zakharenko A. D.* A mode parabolic equation method in the case of the resonant mode interaction // *Wave Motion.* — 2015. — Vol. 58. — P. 42–52.

106. *Trofimov M. Y., Zakharenko A. D., Kozitskiy S. B.* Mode gaussian beam tracing // *Computer Physics Communications.* — 2016. — Vol. 207. — P. 179–185.

107. Comsol multiphysics reference manual v. 5.2. — 2017.

108. *Долгих Г. И., Чупин В. А.* Экспериментальная оценка преобразования гидроакустического излучения в сейсмоакустическую волну // *Акустический журнал.* — 2005. — Т. 51, № 5. — С. 628–632.

109. Particulars of a transmitted acoustic signal at the shelf of decreasing depth / G. I. Dolgikh, S. S. Budrin, S. G. Dolgikh et al. // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2017. — Vol. 142, no. 4. — P. 1990–1996.

110. Study of low-frequency hydroacoustic waves' behavior at the shelf of decreasing depth / G. I. Dolgikh, S. Piao, S. S. Budrin et al. // *Applied Sciences.* — 2020. — Vol. 10, no. 9. — P. 3183.

111. *Заславский Ю. М., Заславский В. Ю.* Сейсмоакустические волны в прибрежной акватории // *Акустический журнал.* — 2020. — Т. 66, № 5. — С. 110–120.

112. *Kravtsov Y. A., Orlov Y. I.* Geometrical optics of inhomogeneous media. — Spring-Verlag, Berlin, 1990. — P. 160–172.

113. Numerical investigation of out-of-plane sound propagation in a shallow water experiment / F. Sturm, S. Ivansson, Y.-M. Jiang, N. R. Chapman // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2008. — Vol. 124, no. 6. — P. EL341–EL346.

114. *Austin M. E., Chapman N. R.* The use of tessellation in three-dimensional parabolic equation modeling // *Journal of Computational Acoustics.* — 2011. — Vol. 19, no. 03. — P. 221–239.

115. *de Moraes Calazan R., Rodríguez O. C.* Simplex based three-dimensional eigenray search for underwater predictions // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2018. — Vol. 143, no. 4. — P. 2059–2065.

116. *Ballard M. S., Sagers J. D.* Measurements and modeling of acoustic propa-

gation in a scale model canyon // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1858–1866.

117. *Sagers J. D., Lenhart R. D., Ballard M. S.* Observation of out-of-plane ambient noise on two vector sensor moorings in lake travis // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1903–1912.
118. *Babich V. M., Pankratova T. F.* Discontinuities of green's function in a mixed boundary value problem for a wave equation with a variable coefficient // *Theory of functions. Spectral theory. Wave propagation.(A 74-10470 01-23) Leningrad, Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta, 1973,.* — 1973. — P. 9–27.
119. *Katchalov A., Popov M.* The application of the gaussian beam summation method to the computation of high-frequency wave fields // Dokl. Akad. Nauk. — Vol. 258. — 1981. — P. 1097–1100.
120. *Popov M. M.* A new method of computation of wave fields in high frequency // *approximation. Zapiski Naychn. Semin.* — 1981. — Vol. 104.
121. *Červený V., Popov M. M., Pšenčík I.* Computation of wave fields in inhomogeneous media—gaussian beam approach // *Geophysical Journal International.* — 1982. — Vol. 70, no. 1. — P. 109–128.
122. Functions of noncommuting operators in an asymptotic problem for a 2d wave equation with variable velocity and localized right-hand side / S. Dobrokhotov, D. Minenkov, V. Nazaikinskii, B. Tirozzi // Operator Theory, Pseudo-Differential Equations, and Mathematical Physics. — Springer, 2013. — P. 95–125.
123. *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И.* Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах // *Известия Российской академии наук. Серия математическая.* — 2017. — Т. 81, № 2. — С. 53–96.
124. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — Наука, 1976.

125. Экспериментальные исследования особенностей распространения импульсных сигналов из шельфа в глубокое море / В. В. Безответных, А. В. Буренин, Ю. Н. Моргунов, Ю. А. Половинка // *Акустический журнал.* — 2009. — Т. 55, № 3. — С. 374–380.

126. Исследование влияния гидрологических условий на распространение псевдослучайных сигналов из шельфа в глубокое море / Ю. Н. Моргунов, В. В. Безответных, А. В. Буренин, Е. А. Войтенко // *Акустический журнал.* — 2016. — Т. 62, № 3. — С. 341–341.

127. *Weston D. E.* Guided propagation in a slowly varying medium // *Proceedings of the Physical Society.* — 1959. — Vol. 73, no. 3. — P. 365.

128. *Абдуллаев С., Заславский Г.* Нелинейная динамика лучей в неоднородных средах // *ЖЭТФ.* — 1981. — Т. 80, № 2. — С. 524.

129. *Абдуллаев С. С., Заславский Г. М.* Фрактали и динамика лучей в продольно-неоднородной среде // *Акустический журнал.* — 1988. — Т. 34. — С. 578–582.

130. *Вировлянский А. Л.* Статистическое описание лучевого хаоса в подводном акустическом волноводе // *Акустический журнал.* — 2005. — Т. 51, № 1. — С. 90–100.

131. *Makarov D. V., Uleysky M. Y., Prants S. V.* Ray chaos and ray clustering in an ocean waveguide // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* — 2004. — Vol. 14, no. 1. — P. 79–95.

132. *Макаров Д. В., Коньков Л. Е., Улейский М. Ю.* Соответствие между лучевой и волновой картинами и подавление хаоса при дальнем распространении звука в океане // *Акустический журнал.* — 2008. — Т. 54, № 3. — С. 439–450.

133. *Вировлянский А. Л., Макаров Д. В., Пранц С. В.* Лучевой и волновой хаос в подводных акустических волноводах // *Успехи физических наук.* — 2012. — Т. 182, № 1. — С. 19–48.

134. *Simmen J., Flatté S. M., Wang G.-Y.* Wavefront folding, chaos, and diffrac-

tion for sound propagation through ocean internal waves // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1997. — Vol. 102, no. 1. — P. 239–255.

135. Classical chaos in nonseparable wave propagation problems / D. R. Palmer, M. G. Brown, F. D. Tappert, H. F. Bezdek // *Geophysical research letters.* — 1988. — Vol. 15, no. 6. — P. 569–572.
136. *Брюнинг Й., Доброхотов С. Ю., Потеряхин М. А.* Об усреднении для гамильтоновых систем с одной быстрой фазой и малыми амплитудами // *Математические заметки.* — 2001. — Т. 70, № 5. — С. 660–669.
137. *Аникин А. Ю., Брюнинг Й., Доброхотов С. Ю.* Усреднение и траектории гамильтоновой системы, возникающей в графене, помещённом в сильное магнитное поле и периодическое электрическое поле // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2015. — Т. 20, № 2. — С. 5–20.
138. Acoustic multipath arrivals in the horizontal plane due to approaching nonlinear internal waves / M. Badiey, B. G. Katsnelson, Y.-T. Lin, J. F. Lynch // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2011. — Vol. 129, no. 4. — P. EL141–EL147.
139. Focused sound from from three-dimensional sound propagation effects over a submarine canyon / L. Chiu, Y-T. Lin, C-F. Chen et al. // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2011. — Vol. 129, no. 6. — P. EL260–EL266.
140. *Barclay D. R., Lin Y.-T.* Three-dimensional ambient noise modeling in a submarine canyon // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2019. — Vol. 146, no. 3. — P. 1956–1967.
141. Horizontal lloyd mirror patterns from straight and curved nonlinear internal waves / K. G. McMahon, L. K. Reilly-Raska, W. L. Siegmann et al. // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2012. — Vol. 131, no. 2. — P. 1689–1700.
142. Horizontal ducting of sound by curved nonlinear internal gravity waves in the continental shelf areas / Y.-T. Lin, K. G. McMahon, J. F. Lynch, W. L. Siegmann // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2013. — Vol.

133, no. 1. — P. 37–49.

143. *Porter M. B., Reiss E. L.* A numerical method for bottom interacting ocean acoustic normal modes // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1985. — Vol. 77, no. 5. — P. 1760–1767.
144. *Алексеев Г., Комаров Е.* Быстрый алгоритм вычисления собственных значений для многослойного поглощающего волновода // *Акустический журнал.* — 1990. — Т. 36, № 6. — С. 965–971.
145. *Zaikin O. S., Petrov P. S.* Algorithm of reconstruction of the sound speed profile in a shallow-water geoacoustic waveguide from modal dispersion data // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.* — 2016. — Vol. 52, no. 3. — P. 259–265.
146. *Агеева Н. С., Крупин В. Д.* Влияние дна на формирование звукового поля в мелком море // *Акустический журнал.* — 1980. — Т. 26, № 2. — С. 161–166.
147. *Агеева Н. С., Крупин В. Д.* Частотные характеристики нормальных волн в мелком море со слоистым поглощающим дном // *Акустический журнал.* — 1981. — Т. 27, № 5. — С. 669–677.
148. *Акуличев В. А., Буланов В. А., Бугаева Л. К.* Особенности распространения звука при наличии пузырьковых облаков в возмущённом приповерхностном слое океана // *Доклады Академии наук.* — 2019. — Т. 487, № 6. — С. 691–695.
149. *Алексеев Г. В., Комаров Е. Г.* Несамосопряженная сингулярная спектральная задача для оператора гельмгольца с разрывными коэффициентами // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 1992. — Т. 32, № 4. — С. 587–597.
150. *Ivansson S., Karasalo I.* Computation of modal wavenumbers using an adaptive winding-number integral method with error control // *Journal of Sound and Vibration.* — 1993. — Vol. 161, no. 1. — P. 173–180.
151. *Крупин В. Д.* Применение метода ВКБ для вычислений групповых ско-

ростей и коэффициентов затухания нормальных мод в арктическом подводном звуковом канале // *Акустический журнал.* — 2005. — Т. 51, № 3. — С. 374–382.

152. *Pekeris C. L.* Theory of propagation of explosive sound in shallow water, geol // *Soc. Am. Mem.* — 1948. — Vol. 27. — P. 117.
153. *Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. — McGraw-Hill, 1957.
154. *Frisk G. V.* Ocean and Seabed Acoustics: a theory of wave propagation. — Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1994.
155. *Brekhovskikh L. M., Godin O. A.* Wave propagation in a range dependent waveguide // Acoustics of Layered Media II. — Springer, 1999. — P. 243–360.
156. *Godin O. A.* A note on differential equations of coupled-mode propagation in fluids // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1998. — Vol. 103, no. 1. — P. 159–168.
157. Transport theory for shallow water propagation with rough boundaries / Eric I Thorsos, Frank S Henyey, WT Elam et al. // AIP Conference Proceedings / American Institute of Physics. — Vol. 1272. — 2010. — P. 99–105.
158. *Трофимов М. Ю.* Широкоугольные модовые параболические уравнения // *Акустический журнал.* — 2002. — Т. 48, № 6. — С. 274–278.
159. *Pierce A. D.* Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified medium // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1965. — Vol. 37, no. 1. — P. 19–27.
160. *Гулин О.* К расчетам низкочастотных акустических полей в нерегулярных волноводах при наличии сильного обратного рассеяния // *Акустический журнал.* — 2008. — Т. 54, № 4. — С. 575–586.
161. *Гулин О.* Моделирование распространения низкочастотного звука в нерегулярном мелководном волноводе с жидким дном // *Акустический журнал.* — 2010. — Т. 56, № 5. — С. 642–650.
162. *Gulin O.* The contribution of a lateral wave in simulating low-frequency

sound fields in an irregular waveguide with a liquid bottom // *Acoustical Physics.* — 2010. — Vol. 56, no. 5. — P. 613–622.

163. *Gulin O. E., Yaroshchuk I. O.* Simulation of underwater acoustical field fluctuations in range-dependent random environment of shallow sea // *Journal of Computational Acoustics.* — 2014. — Vol. 22, no. 01. — P. 1440006.
164. *Гулин О., Ярощук И.* О локальном эффекте взаимодействия мод низкочастотного звукового поля в случайно-неоднородном двумерном мелком море // *Ученые записки физического факультета Московского университета.* — 2017. — № 5. — С. 1750114.
165. *Petrov P. N., Dobrokhotov S. Y.* Asymptotic solution of the Helmholtz equation in a three-dimensional layer of variable thickness with a localized right-hand side // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2019. — Vol. 59, no. 4. — P. 529–541.
166. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. — Москва : Наука, 1974. — Т. 3.
167. *Smirnov V. I.* A Course of Higher Mathematics: Part 2. Complex Variables Special Functions. — Pergamon Press, 1964.
168. *Lin Y.-T., Lynch J. F.* Analytical study of the horizontal ducting of sound by an oceanic front over a slope // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2012. — Vol. 131, no. 1. — P. EL1–EL7.
169. *DeCourcy B. J., Lin Y.-T., Siegmann W. L.* Approximate formulas and physical interpretations for horizontal acoustic modes in a shelf-slope front model // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2016. — Vol. 140, no. 1. — P. EL20–EL25.
170. *Lord Rayleigh.* The problem of the whispering gallery // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.* — 1910. — Vol. 20, no. 120. — P. 1001–1004.
171. *Raman C., Sutherland G.* Whispering-gallery phenomena at St. Paul's cathedral // *Nature.* — 1921. — Vol. 108. — P. 42.

172. *Babič V. M., Buldyrev V. S.* Short-wavelength diffraction theory: asymptotic methods. — Springer-Verlag, Berlin, 1991. — P. 97–129.

173. *DeCourcy B. J., Lin Y.-T., Siegmann W. L.* Estimating the parameter sensitivity of acoustic mode quantities for an idealized shelf-slope front // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2018. — Vol. 143, no. 2. — P. 706–715.

174. *Hentschel M., Schomerus H.* Fresnel laws at curved dielectric interfaces of microresonators // *Physical Review E.* — 2002. — Vol. 65, no. 4. — P. 045603.

175. Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip / D. K. Armani, T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, K. J. Vahala // *Nature.* — 2003. — Vol. 421, no. 6926. — P. 925–928.

176. *Shim J.-B., Wiersig J., Cao H.* Whispering gallery modes formed by partial barriers in ultrasmall deformed microdisks // *Physical Review E.* — 2011. — Vol. 84, no. 3. — P. 035202.

177. Асимптотики собственных функций двумерного оператора $\nabla D(x)\nabla$, связанные с бильярдами с полужесткими стенками, и захваченные береговые волны / А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. В. Цветкова // *Математические заметки.* — 2019. — Т. 105, № 5. — С. 792–797.

178. Равномерная асимптотика в виде функции Эйри для квазиклассических связанных состояний в одномерных и радиально-симметричных задачах / А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. В. Цветкова // *Теоретическая и математическая физика.* — 2019. — Т. 201, № 3. — С. 382–414.

179. *Доброхотов С. Ю.* Асимптотики поверхностных волн, захваченных берегами и неоднородностями рельефа дна // *Доклады Академии наук.* — 1986. — Т. 289, № 3. — С. 575–579.

180. *Dobrokhotov S., Rouleux M.* The semi-classical maupertuis–jacobi correspondence for quasi-periodic hamiltonian flows with applications to linear water waves theory // *Asymptotic Analysis.* — 2011. — Vol. 74, no. 1-2. — P. 33–73.

181. *Abawi A. T., Kuperman W. A., Collins M. D.* The coupled mode parabolic equation // *J. Acoust. Soc. America.* — 1997. — Vol. 102, no. 1. — P. 233–238.

182. *Heaney K. D., Campbell R. L., Murray J. J.* Comparison of hybrid three-dimensional modeling with measurements on the continental shelf // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2012. — Vol. 131, no. 2. — P. 1680–1688.

183. *Wolfson M., Tappert F.* Study of horizontal multipaths and ray chaos due to ocean mesoscale structure // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2000. — Vol. 107, no. 1. — P. 154–162.

184. *Tyshchenko A. G., Petrov P. S., Ehrhardt M.* Wide-angle mode parabolic equation with transparent boundary conditions and its applications in shallow water acoustics // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2019 / IEEE. — 2019. — P. 221–226.

185. *Wei J., Norman E.* Lie algebraic solution of linear differential equations // *Journal of Mathematical Physics.* — 1963. — Vol. 4, no. 4. — P. 575–581.

186. *Leontovich M. A., Fock V. A.* Solution of the problem of electromagnetic wave propagation along the earth's surface by the method of parabolic equation // *J. Phys. USSR.* — 1946. — Vol. 10. — P. 13 – 23.

187. *Tappert F. D.* The parabolic approximation method // Wave Propagation and Underwater Acoustics / Ed. by J. B. Keller, J. S. Papadakis. — Berlin, Heidelberg : Springer, 1977. — P. 224–287.

188. *Луньков А.* Донная реверберация в присутствии интенсивных внутренних волн // *Акустический журнал.* — 2019. — Т. 65, № 6. — С. 774–783.

189. *Рутенко А. Н., Козицкий С. Б., Манульчев Д. С.* Влияние наклонного дна на распространение звука // *Акустический журнал.* — 2015. — Т. 61, № 1. — С. 76–76.

190. *Рутенко А. Н., Манульчев Д., Козицкий С. Б.* Исследование распространения акустических сигналов из моря на сушу // *Акустический жур-*

нал. — 2019. — Т. 65, № 3. — С. 343–352.

191. *Prants S. V.* An algebraic approach to quadratic parametric processes // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 1986. — Vol. 19, no. 17. — P. 3457.
192. *Гулин О. Э.* О векторных характеристиках в статистически-неоднородных волноводах // *Акустический журнал.* — 1984. — Т. 30, № 4. — С. 460–466.
193. *Nazaikinskii V. E., Shatalov V., Sternin B. Y.* Methods of Noncommutative Analysis. Theory and Applications. — Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1996.
194. *Richtmyer R. D.* Principles of Advanced Mathematical Physics. — New York : Springer-Verlag, 1978.
195. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — Наука, 1985.
196. *Prants S. V.* Lie algebraic solution of bloch equations with time-dependent coefficients // *Physics Letters A.* — 1990. — Vol. 144, no. 4-5. — P. 225–228.
197. *Prants S. V.* A group-theoretical approach to study atomic motion in a laser field // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2011. — Vol. 44, no. 26. — P. 265101.
198. *Kiselev A. P., Plachenov A. B.* Laplace–Gauss and Helmholtz–Gauss paraxial modes in media with quadratic refraction index // *JOSA A.* — 2016. — Vol. 33, no. 4. — P. 663–666.
199. *So I. A., Kiselev A. P., Plachenov A. B.* Gaussian-type beams in longitudinally inhomogeneous, lens-like media. Gradual transition from waveguide to antiwaveguide // *EPL (Europhysics Letters).* — 2019. — Vol. 127, no. 6. — P. 64002.
200. *Sodha M., Ghatak A.* Inhomogeneous optical waveguides. — Springer Science & Business Media, 2013.
201. *Abawi A. T., Porter M. B.* Propagation in an elastic wedge using the virtual source technique // *The Journal of the Acoustical Society of America.* —

2007. — Vol. 121, no. 3. — P. 1374–1382.

202. *Claerbout J. F.* Fundamentals of geophysical data processing. — Blackwell, Oxford, 1985.

203. *Greene R. R.* The rational approximation to the acoustic wave equation with bottom interaction // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1984. — Vol. 76, no. 6. — P. 1764–1773.

204. *Baskakov V. A., Popov A. V.* Implementation of transparent boundaries for numerical solution of the schrödinger equation // *Wave motion.* — 1991. — Vol. 14, no. 2. — P. 123–128.

205. *Marcus S. W.* A generalized impedance method for application of the parabolic approximation to underwater acoustics // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1991. — Vol. 90. — P. 391–398.

206. *Papadakis J. S.* Exact nonreflecting boundary conditions for parabolic-type approximations in underwater acoustics // *Journal of Computational Acoustics.* — 1994. — Vol. 2. — P. 83–98.

207. A review of transparent and artificial boundary conditions techniques for linear and nonlinear schrödinger equations / X. Antoine, A. Arnold, Ch. Besse et al. // *Commun. in Comput. Physics.* — 2008. — Vol. 4, no. 4. — P. 729–796.

208. *Popov A. V.* Accurate modeling of transparent boundaries in quasi-optics // *Radio Science.* — 1996. — Vol. 31, no. 6. — P. 1781–1790.

209. *Mikhin D.* Exact discrete nonlocal boundary conditions for high-order Padé parabolic equations // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2004. — Vol. 116. — P. 2864–2875.

210. *Mikhin D.* Analytic discrete transparent boundary conditions for high-order Padé parabolic equations // *Wave motion.* — 2008. — Vol. 45. — P. 881–894.

211. *Ehrhardt M., Zisowsky A.* Discrete non-local boundary conditions for split-step Padé approximations of the one-way Helmholtz equation // *J. Comput. Appl. Math.* — 2007. — Vol. 200. — P. 471–490.

212. *Ehrhardt M.* Discrete transparent boundary conditions for Schrödinger-type equations for non-compactly supported initial data // *Appl. Numer. Math.* — 2008. — Vol. 58. — P. 660–673.

213. *Arnold A., Ehrhardt M.* Discrete transparent boundary conditions for wide angle parabolic equations in underwater acoustics // *Journal of Computational Physics.* — 1998. — Vol. 145, no. 2. — P. 611–638.

214. *Collins M. D.* A self-starter for the parabolic equation method // *J. Acoust. Soc. America.* — 1992. — Vol. 92, no. 4. — P. 2069–2074.

215. *Авилов К. В.* Вычисление гармонических звуковых полей в волноводах в уточненном широкоугольном параболическом приближении // Труды IX всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Тбилиси / ТГУ. — Т. 2. — 1985. — С. 236–239.

216. *Авилов К. В.* Псевдодифференциальные параболические уравнения распространения звука в океане, плавно неоднородном по горизонтали, и их численное решение // *Акуст. журн.* — 1995. — Т. 41, № 1. — С. 5–12.

217. *Collins M. D.* A split-step padé solution for the parabolic equation method // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1993. — Vol. 93, no. 4. — P. 1736–1742.

218. Acoustic ducting, reflection, refraction, and dispersion by curved nonlinear internal waves in shallow water / J. F. Lynch, Y.-T. Lin, T. F. Duda, A. E. Newhall // *IEEE Journal of Oceanic Engineering.* — 2010. — Vol. 35, no. 1. — P. 12–27.

219. *Antoine X., Huang Y., Lu Y. Y.* Computing high-frequency scattered fields by beam propagation methods: A prospective study // *Journal of Algorithms & Computational Technology.* — 2010. — Vol. 4, no. 2. — P. 147–166.

220. *Godin O. A.* Reciprocity and energy conservation within the parabolic approximation // *Wave motion.* — 1999. — Vol. 29, no. 2. — P. 175–194.

221. *Lu Y. Y.* Improving beam propagation method for TM polarization // *Optics and Quantum Electronics.* — 2003. — Vol. 35, no. 4. — P. 507–519.

222. *Antoine X., Dreyfuss P., Ramdani K.* A construction of beam propagation methods for optical waveguides // *Communications in Computational Physics.* — 2009. — Vol. 6, no. 3. — P. 565–576.

223. *Lu Y. Y.* Some techniques for computing wave propagation in optical waveguides // *Communications in Computational Physics.* — 2006. — Vol. 1, no. 6. — P. 1056–1075.

224. *Antoine X., Lorin E., Tang Q.* A friendly review of absorbing boundary conditions and perfectly matched layers for classical and relativistic quantum waves equations // *Molecular Physics.* — 2017. — Vol. 115, no. 15-16. — P. 1861–1879.

225. *Bérenger J.-P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *J. Comp. Phys.* — 1994. — Vol. 114. — P. 185–200.

226. *Collino F.* Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations // *J. Comp. Phys.* — 1997. — Vol. 131. — P. 164–180.

227. *Antoulas A. C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. — SIAM, 2005. — Vol. 6.

228. *Levy M.* Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. — The institution of electrical engineers, 2000.

229. *Попов А. В., Хозиоский С. А.* Об одном обобщении параболического уравнения теории дифракции // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 1977. — Т. 17, № 2. — С. 527–533.

230. *Малюжинец Г. Д., Попов А. В., Черкашин Ю. Н.* К развитию одного вычислительного метода теории дифракции // III Всесоюзный симпозиум по дифракции волн. Рефераты докладов. — Москва : Наука, 1968. — С. 176–178.

231. *Grikurov V. E., Kiselev A. P.* Gaussian beams at large distances // *Radiophys. & Quant. Electron.* — 1986. — Vol. 29. — P. 233–237.

232. *Abrahamsson L., Kreiss H.-O.* Boundary conditions for the parabolic equation in a range-dependent duct // *J. Acoust. Soc. America.* — 1990. —

Vol. 87. — P. 2438–2441.

233. *Dougalis V. A., Sturm F., Zouraris G. E.* On an initial-boundary value problem for a wide-angle parabolic equation in a waveguide with a variable bottom // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2009. — Vol. 32. — P. 1519–1540.

234. *Collins M. D., Siegmann W. L.* Treatment of variable topography with the seismoacoustic parabolic equation // *IEEE Journal of Oceanic Engineering.* — 2016. — Vol. 42, no. 2. — P. 488–493.

235. Seismo-acoustic benchmark problems involving sloping fluid–solid interfaces / K. Woolfe, M. D. Collins, D. C. Calvo, W. L. Siegmann // *Journal of Computational Acoustics.* — 2016. — Vol. 24, no. 04. — P. 1650022.

236. *Collins M. D., Siegmann W. L.* Parabolic Wave Equations with Applications. — Springer, 2019.

237. *Papadakis J. S.* Impedance formulation of the bottom boundary condition for the parabolic equation model in underwater acoustics // NORDA Parabolic Equation Workshop. — NORDA Tech, 1982. — P. note 143.

238. *Nayfeh A. H.* Perturbation methods. — John Wiley & Sons, 2008.

239. *Thomson D. J.* Wide-angle parabolic equation solutions to two range-dependent benchmark problems // *J. Acoust. Soc. America.* — 1990. — Vol. 87. — P. 1514–1520.

240. *Sun Z. Z., Wu X.* The stability and convergence of a difference scheme for the Schrödinger equation on an infinite domain using artificial boundary conditions // *Journal of Computational Physics.* — 2006. — Vol. 214. — P. 209–223.

241. *Ehrhardt M.* Discrete artificial boundary conditions : Ph. D. thesis / M. Ehrhardt ; Technische Universität Berlin, Berlin. — 2001.

242. *Arnold A.* Mathematical properties of quantum evolution equations // Quantum Transport / Ed. by NaoufelBen Abdallah, Giovanni Frosali. — Springer Berlin Heidelberg, 2008. — Vol. 1946 of *Lecture Notes in Mathematics.* — P. 45–109.

243. *Doi S.-i.* Smoothness of solutions for Schrödinger equations with unbounded potentials // *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* — 2005. — Vol. 41. — P. 175–221.

244. *Mayfield B.* Non-local boundary conditions for the Schrödinger equation : Ph. D. thesis / B. Mayfield ; University of Rhode Island, Providence, RI. — 1989.

245. *Fibich G., Tsynkov S.* High-order two-way artificial boundary conditions for nonlinear wave propagation with backscattering // *J. Comp. Phys.* — 2001. — Vol. 171. — P. 632–677.

246. *Feshchenko R. M., Popov A. V.* Exact transparent boundary condition for the parabolic equation in a rectangular computational domain // *J. Opt. Soc. Amer. A.* — 2011. — Vol. 28. — P. 373–380.

247. *Feshchenko R. M., Popov A. V.* Exact transparent boundary condition for the three-dimensional schrödinger equation in a rectangular cuboid computational domain // *Physical Review E.* — 2013. — Vol. 88, no. 5. — P. 053308.

248. *Schädle A.* Non-reflecting boundary conditions for the two-dimensional Schrödinger equation // *Wave motion.* — 2002. — Vol. 35. — P. 181–188.

249. Применение сложных акустических сигналов в дальней навигации подводных объектов / В. А. Акуличев, А. Е. Бородин, А. В. Буренин и др. // *Доклады Академии наук.* — 2007. — Т. 417, № 5. — С. 693–696.

250. Аппаратно-программный измерительный комплекс для исследований в области акустической навигации / В. В. Безответных, А. В. Буренин, Ю. Н. Моргунов, А. А. Тагильцев // *Акустический журнал.* — 2011. — Т. 57, № 6. — С. 804–808.

251. *Акуличев В. А., Моргунов Ю. Н., Бородин А. Е.* Региональная система подводного навигационного обеспечения и дистанционного управления // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* — 2014. — Т. 7, № 2. — С. 36.

252. Deep ocean long range underwater navigation / P. N. Mikhalevsky, B. J. Sperry, K. F. Woolfe et al. // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 2020. — Vol. 147, no. 4. — P. 2365–2382.

253. Применение псевдослучайных сигналов для подводной дальнометрии на шельфе / В. А. Акуличев, В. В. Безответных, Ю. Н. Моргунов, Ю. А. Половинка // *Доклады Академии наук.* — 2010. — Т. 432, № 4. — С. 541–543.

254. Acoustic tomography for monitoring the sea of japan: A pilot experiment / Robert C Spindel, Jungyul Na, Peter H Dahl et al. // *IEEE Journal of Oceanic Engineering.* — 2003. — Vol. 28, no. 2. — P. 297–302.

255. Эксперимент по оценке влияния вертикального профиля скорости звука в точке излучения на шельфе на формирование импульсной характеристики в глубоком море / В. А. Акуличев, В. В. Безответных, А. В. Буренин и др. // *Акустический журнал.* — 2010. — Т. 56, № 1. — С. 51–52.

256. *Collins M. D., Westwood E. K.* A higher-order energy-conserving parabolic equqation for range-dependent ocean depth, sound speed, and density // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1991. — Vol. 89, no. 3. — P. 1068–1075.